

20.02.2003 р. / [Електронний ресурс] Режим доступу . [www.rada.gov.ua](http://www.rada.gov.ua).

3. Про затвердження програми "Етанол". Постанова Кабінету Міністрів України № 1044 від 04.07.2000 р. / [Електронний ресурс]. - Режим доступу. [www.rada.gov.ua](http://www.rada.gov.ua).

4. Про стан використання біодизелю та біоетанолу в світі та Україні. Аналітична записка. НАЄР [Електронний ресурс]. - Режим доступу : [www.naer.org.ua](http://www.naer.org.ua).

5. Калетнік Г.М. Розвиток ринку біопалив в Україні: Монографія / Калетнік Г.М. - К Аграрна наука, 2008 - 464 с.

6. Програма розвитку спиртової галузі на 2007-2011 роки [Електронний ресурс]. - Режим доступу : [www.ukrspirt.com](http://www.ukrspirt.com)

7. Гументик М.Я. Ефективність виробництва біоетанолу на основі альтернативних, енергетичних культур / М.Я. Гументик // Теорія і Практика ринків. - 2007. - № 1/2007 (2).

8. Калетнік Г. М. Перспективи виробництва біоетанолу в Україні // Аграрна техніка та обладнання . – 2009. – №2. – С. 50-55.

---

### Summary

**A production of bioethanol is perspective industry in Ukraine / Visocka V. V., Klymchuk O. V.**

*Basic progress the sector of alternative sources of energy trends are expounded in the article, in particular productions of bioethanol in Ukraine. Efficiency of this type of fuel is analysed in Ukraine. A question opens up about alcoholic industry, which has the ramified network of factories which do not use the powers in a complete measure.*

**Keywords:** bioethanol, alcoholic industry, efficiency, production.

УДК 303. 34

## **РОЗПОДІЛ ПАРЕТО ТА ІНШІ МАТЕМАТИЧНІ ПІДХОДИ В МАКРОЕКОНОМІЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ**

**Найко Д. А.,** к.ф.-м.н., доцент  
**Шевчук О.Ф.,** ст.викладач

*Подається огляд відомих в літературі спроб побудувати економіку за зразком природничих наук з використанням математичного моделювання. Обговорюються питання побудови сучасної моделі економіки.*

**Ключові слова:** розподіл Парето, математичне моделювання, поведінкові функції, виробничі функції.

**Вступ.** З метою зменшення об'єму даної публікації, в другому та третьому пунктах посилання робимо на перелік літературних джерел, наведений в роботі [1].

Події, що сталися в світі за останнє десятиріччя, виявились в значній мірі несподіваними для багатьох професійних економістів. Виникло цілком природне бажання пояснити те, що відбувається мовою природничих наук.

Економіст Лінден Ларуш [1], який є сподвижником президента Рейгана і творцем так званої рейганоміки, запропонував термін „фізична економіка“. Під словом „фізична“ Ларуш розуміє економіку, побудовану за зразком точних і природничих наук.

В теоретичній економіці найрозвиненішою є класична (ортодоксальна) економіка, яка є відокремленою від природничих наук, зокрема фізики [2,3]. Неокласична економіка не зуміла ні передбачити, ні пояснити розвитку реальної економіки за останнє десятиріччя. Але саме природничі науки мають досвід побудови та дослідження динамічних моделей систем, що розвиваються, до яких відноситься і людське суспільство.

Тому поява альтернативних неортодоксальних методів теоретичної економіки є логічною [4]. Насамперед мова йде про „синергетичну економіку“, яка спирається на досягнення теорії систем, що розвиваються (її називають синергетикою) [5–11]. Синергетика зарекомендувала себе в фізиці, хімії та, особливо, в біології.

Вихідні положення класичної економіки зводяться до наступного:

1. Люди (і виробники, і споживачі) чинять розумно і переслідують мету. Мета виробників – максимум прибутку, мета споживачів – максимум задоволення потреб.

2. Ринкова рівновага, тобто баланс попиту і пропозиції товарів, грошей та праці, реалізується в результаті балансу цілей виробників та споживачів.

В математичних моделях цього напрямку цілі формуються у вигляді цільових функцій та додаткових умов.

Предметом ортодоксальної економіки є ринкова рівновага при фіксованих параметрах. Тому ортодоксальну економіку називають статичною. Нерівноважні процеси розглядаються переважно поблизу рівноваги, коли результат процесу є обумовленим.

Вихідними положеннями еволюційної економіки є такі:

1. Люди ведуть себе відповідно до поведінкових реакцій. Іноді цю поведінку можна інтерпретувати як бажання максимального прибутку, іноді ні. В математичних моделях еволюційної економіки поведінкові реакції формалізуються у вигляді функцій попиту, пропозиції, доходів та витрат.

2. Ринкова рівновага досягається в результаті балансу попиту та пропозиції, а також доходів та витрат. Проте ці функції міняються з часом в зв'язку з розвитком науки і техніки. Тому рівновага ніколи не настає, хоча система постійно прямує до неї.

3. При побудові еволюційної економіки розумно спиратися на теорію систем, що розвиваються (ТСР) та біологічну еволюцію.

Фактично положення 1–3 еволюційної економіки приймаються і в інших неортодоксальних економіках: фізичній та синергетичній. Тому їх можна розглядати як варіанти еволюційної економіки.

Ці два підходи не заперечують, а доповнюють один одного. Пояснимо це на прикладі з класичної фізики.

При розв'язуванні задач з механіки можна, з одного боку, використати рівняння Ньютона. В такому разі необхідно задати поле сил, що і робиться виходячи з конкретних умов. В економіці (та інших СР) аналогом поля сил є поведінкові реакції. З іншого боку, можна використати принцип мінімуму дій. При цьому необхідно задати форму лагранжіана. Ці підходи еквівалентні в тому розумінні, що задавши лагранжіан, можна вивести рівняння руху та форму силового поля (і навпаки).

В економіці аналогом дій є цільові функції. Задавши їх, можна „вивести“ відповідні їм поведінкові функції (що не є легким завданням). Еквівалентність підходів зовсім не означає, що результати моделювання будуть цілком збігатись. Останнє можливо лише у випадку, коли гіпотези про форму поведінкових функцій повністю відповідають гіпотезам про цільовий функціонал.

Сформулювати вигляд поведінкових функцій на основі емпіричних даних можна порівняно просто. При цьому вдається описати і передбачити ряд „несподіваних“ явищ, таких, як поява декількох стійких стаціонарних станів, перехід між станами, появу нестійких станів та виникнення хаосу.

В еволюційній економіці застосовуються обидва підходи [5–7, 16–18]. Результати, отримані різними методами, в значній мірі перекриваються.

В такій ситуації впровадження в економіку фізичної методології є виправданим.

В даній роботі ми розглядаємо також деякі аспекти побудови моделі сучасної економіки. Ця модель не записується за допомогою формул на папері чи якоюсь мовою програмування, вона реалізується в середовищі комп'ютерної алгебри Maple.

**1. Розподіл Парето.** Нехай  $X$  – випадкова величина,  $x$  – довільна змінна. Тоді *функцією розподілу*  $F(x)$  ймовірностей випадкової величини  $X$  називається ймовірність події  $X < x$ . Тобто

$$F(x) = P(X < x).$$

*Щільністю* ймовірностей випадкової величини  $X$  називається функція

$$f(x) = F'(x).$$

В зв'язку з тим, що  $f(x)$  є похідною функції  $F(x)$ , то  $f(x)$  ще називають *диференціальною* функцією розподілу, а  $F(x)$  – *інтегральною*.

Неперервна випадкова величина  $X$  розподілена за законом Парето з параметрами  $a > 0$  та  $x_0 > 0$ , якщо її інтегральна функція розподілу має вигляд

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \leq x_0; \\ 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^a, & \text{коли } x > x_0. \end{cases}$$

Для даного розподілу математичне сподівання  $M(X)$  існує при  $a > 1$  і дорівнює

$$M(X) = \frac{a}{a-1} x_0,$$

а дисперсія  $D(X)$  існує при  $a > 2$  і дорівнює

$$D(X) = \frac{a}{(a-1)^2(a-2)} x_0^2.$$

Мода розподілу Парето дорівнює  $x_0$ , а медіана цього розподілу дорівнює  $x_0 \sqrt[a]{2}$ .

Нехай в країні діє закон про оподаткування, що поширюється на тих приватних підприємців, річний дохід яких перевищує деякий встановлений законом рівень  $x_0$ . Тоді вважають, що річний дохід навмання вибраної особи, яка оподатковується, є випадковою величиною  $X$ , розподіленою за законом Парето з параметрами  $a$  та  $x_0$ . В такому разі, наприклад, ймовірність того, що дохід  $X$  такого підприємця буде не меншим за  $k_1$  і не більшим за  $k_2$  дорівнює

$$P(k_1 < X < k_2) = \left(\frac{x_0}{k_1}\right)^a - \left(\frac{x_0}{k_2}\right)^a.$$

До закону Парето повернемося згодом.

**2. Поведінкові функції в економіці. Функція попиту.** Поведінкові реакції виражаються насамперед функцією попиту  $Q(U, p)$ , яка відображає залежність кількості товару  $Q$ , придбаного за одиницю часу, від наявних коштів  $U$  та ціни  $p$ . Кошти  $U$ , призначені для придбання товарів, або збігаються з повними накопиченнями виробника, або визначаються його доходами ( $y$ ) за одиницю часу (якщо накопичення раптом відсутні). В другому випадку функція попиту залежить від доходу та ціни  $p$ . В обох випадках якісні властивості функції споживання однакові. Важливо те, що функція  $Q(U, p)$  не змінюється при пропорційній зміні ціни  $p$ , коштів  $U$  та доходів  $y$ . Це використовується при деномінації грошей (тобто  $Q(U, p)$  – функція нульового рангу [20]). Тому вона залежить від однієї змінної – купівельної спроможності  $r$ , яка дорівнює відношенню  $r = U/p$ .

Через  $Q_I$  позначимо функцію попиту на товари та послуги першої необхідності,  $Q_{II}$  – на товари довгострокового користування,  $Q_{III}$  – на елітні товари.

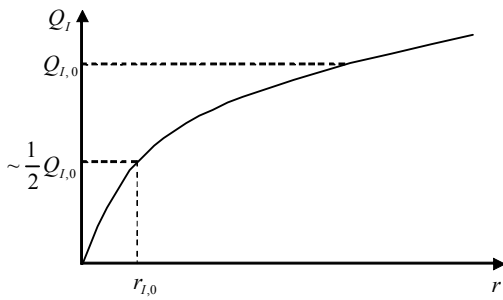


Рис. 1.

Функцію попиту на товари першої необхідності  $Q_I(r)$  наведено на рис.1. Величина  $Q_{I,0}(r)$  є прожитковим мінімумом, що забезпечує існування. При досягненні значення  $Q_{I,0}(r)$  функція попиту зростає повільно. Її зростання пов'язане із зміною асортименту, престижем тощо, тобто з тим, що називається „людським фактором“.

Звідси випливає, що при  $r = 0$  функція  $Q_I(r) = 0$ , а далі зростає, але повільніше за лінійну функцію, тобто скрізь є опуклою. Її зручно подати у вигляді

$$Q_I(r) = Q_{I,0} \left[ \frac{r}{r + r_{I,0}} + E_1 r \right]. \quad (1)$$

Параметр  $\varepsilon_1$  відображає наявність товарів іншого виду, що відрізняються і за якістю і за ціною. Він малий і при малих  $r$  мало впливає на  $Q_I(r)$ .

Функція попиту на товари другої категорії  $Q_{II}(r)$  задається формулою

$$Q_{II}(r) = \theta(r - r_{\min}) \left[ Q_{II,0} \cdot \frac{r - r_{\min}}{(r - r_{\min}) + r_{II,0}} + \varepsilon_2 (r - r_{\min}) \right], \quad (2)$$

$$\text{де } \theta(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ 1, & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Функція  $Q_{II}$  має такі властивості:

1) вона має пороговий характер. При нестачі коштів (або високій ціні, тобто при  $r < r_{\min}$ ) люди відмовляються купувати товари другої категорії.

2) функція практично не насичується. Ця властивість грає важливу роль в еволюційній економіці [21].

Важливою характеристикою функції  $Q_{II}(r)$  є стрімкість зростання, тобто її поведінка в околі значення  $r = r_{\min}$ . Цей параметр відображає чутливість попиту до зміни ціни і/або накопичень. Мірою чутливості є еластичність попиту за купівельною здатністю  $E_r$ . В даному випадку

$$E_r = \frac{r}{Q} \cdot \frac{dQ}{dr} = \frac{d(\ln Q)}{d(\ln r)}. \quad (3)$$

З (2) випливає, що при  $r = r_{\min}$  величина  $E_r$  формально є нескінченною.

При  $r = 2r_{\min}$

$$E_r(r \approx 2r_{\min}) \approx \frac{r_{\min} r_{II,0}}{(r - r_{\min})(r - r_{\min} + r_{II,0})} = \frac{2r_{II,0}}{r_{\min} + r_{II,0}}. \quad (4)$$

Еластичність попиту за ціною  $E_p$  зв'язана з еластичністю  $E_r$  за купівельною спроможністю  $r$  співвідношенням

$$E_{\tilde{p}} = \frac{\tilde{p}}{Q} \cdot \frac{dQ}{d\tilde{p}} = -E_r \quad (5)$$

Часто використовують подання функції попиту, як залежність  $Q$  від умовної ціни  $\tilde{p}$  (яка обернено пропорційна купівельній спроможності:

$\tilde{p} = p/U = 1/r$ ) в найпростішій лінійній формі [22, 23]. Цій формі відповідає залежність  $Q_{II}(r)$  у вигляді

$$Q_{II} = Q_{II,0}(1 - r_{\min}\tilde{p}). \quad (6)$$

Параметр  $r_{\min}$  відображає межу між споживанням товарів I-ї та II-ї категорії.

Величина  $r_{II,0}$  характеризує поведінку середнього класу. Люди цього прошарку задовольняються товарами II-ї категорії середньої вартості і не намагаються наслідувати еліту. Параметр  $Q_{II,0}$  описує рівень життя заможних людей. В розвинених країнах це рівень життя середнього класу.

Величина  $\varepsilon_2$  відображає ріст попиту на елітні товари.

Використовуючи різні методи можна відтворити функцію попиту  $Q_I(r)$  на товари першої необхідності досить однозначно. При цьому використовують такі величини, як „життєвий мінімум“ (йому відповідає параметр  $Q_{I,0}$ ), „продовольчий кошик“ (відповідає параметр  $r_{I,0}$ ). Визначення параметрів функції попиту  $Q_{II}(r)$  є складнішим і здебільшого спирається на експертні оцінки.

Зручно ввести сумарну функцію  $Q(r)$ :

$$Q(r) = Q_I(r) + Q_{II}(r), \quad (7)$$

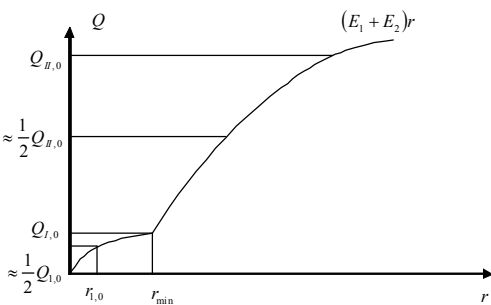


Рис. 3.

яку подано на рис. 3. З нього видно, що при  $r < r_{\min}$  попитом користуються лише товари першої необхідності. При  $r > r_{\min}$  споживаються товари як I так і II категорії (та елітні).

Функція  $Q(r)$  не є опуклою,  $Q_I(r)$  – опукла скрізь,  $Q_{II}(r)$  опукла лише в області свого існування, але в інтервалі  $0 < r < \infty$ , взагалі

кажучи, є сигмоїдною і, отже, не є опуклою.

**Виробнича функція.** Виробнича функція  $F(r, n, \tau)$  визначається, як кількість продукту  $F$ , виробленого за одиницю часу  $\tau$ , в залежності від числа людей  $n$ , зайятих у виробництві та відкладених коштів. За одиницю часу приймають протяжність виробничого циклу його (називають часом обороту). В економіці прийнято розділяти кошти, вкладені в працю ( тобто в зарплату)  $\Pi$  і капітал  $K$ .

На початку XX ст. Було запропоновано емпіричну функцію Кобба-Дугласа [20,24]

$$F(r, n, \tau) = K^\alpha \Pi^{1-\alpha}, \quad (8)$$

де  $\alpha \leq 1$  – емпіричний параметр, а величина  $\Pi = n(P + P^*)$ . Тут  $P$  – зарплата, а  $P^*$  – традиційні витрати в розрахунку на одного працюючого.

З (8) випливає, що виробнича функція зростає із збільшенням  $\Pi$  повільніше за лінійну функцію, отже, відношення  $F/\Pi$  спадає.

Зростання кількості продукту, що виробляється одним працюючим не лише сповільнюється, але й має верхню межу, яка визначається рівнем

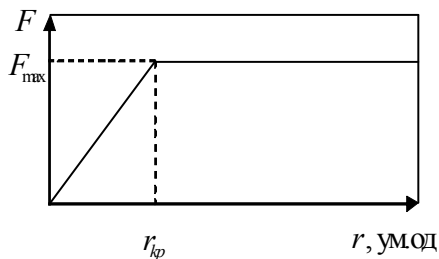


Рис.4.

технології та організації виробництва. Формулою Кобба-Дугласа цей ефект не описується. Виробничу функцію можна записати і в простішій формі:

$$F(V, n, \tau) = nF\left(\frac{V}{n}, \tau\right) = \begin{cases} n \frac{V}{pn\tau} = \frac{r}{\tau} & \text{при } \frac{r}{n\tau} \leq F_{\max}, \\ nF_{\max} & \text{при } \frac{r}{n\tau} \geq F_{\max}, \end{cases} \quad (9)$$

де  $F_{\max}$  – максимальна кількість продукту, виробленого одним працюючим,  $V$  – оборотні кошти,  $V/n$  – оборотні кошти в розрахунку на одного працюючого,  $r = V/p$ .

У (9) прийнято, що при малих оборотних коштах і неповному використанні виробничих потужностей функція,  $F(r)$  зростає пропорційно до  $r$ , але лише до деякої межі, яка визначається рівнем технології, організацією виробництва та фізичними можливостями працюючих.

Виробничу функцію  $F(r)$  (9) подано на рис.4. Роль „людського фактора“ у виробничій функції є суттєвою. Вона проявляється у відношенні до праці, її організації та трудовій дисципліні. Ці фактори відображаються параметрами  $F_{\max}$  та  $\tau$ .

**3.Економічна структура суспільства.** Під економічною структурою суспільства (ЕСС) розуміють розподіл елементів суспільства (тобто сімей) за ліквідним накопиченням  $\rho(U)$  [25,27]. Тут  $U$  – накопичення (в умовних одиницях), а  $\rho(U)$  – це частина людей, накопичення яких знаходяться в межах від  $U$  до  $U + \Delta U$  (тобто щільність розподілу). Ліквідними вважаються накопичення в грошових одиницях та цінних паперах, які можуть швидко і без витрат конвертуватися в гроші.

Можлива і інша характеристика – розподіл сімей за доходами  $\rho(y)$ , де  $y$  – доходи сімей за одиницю часу. Розподіли  $\rho(U)$  та  $\rho(y)$  різні, хоча і зв'язані між собою.

В соціології замість розподілів  $\rho(U)$  та  $\rho(y)$  використовується також відома крива Лоренца [22].

За побудовою крива Лоренца являє собою залежність накопичень  $U(N)$  від числа  $N$ , що мають накопичення від  $N$  і нижче. Обернена функція

$$N(U) = \int_0^U \rho(u^*) du^*,$$

звідси

$$\frac{dN}{dU} = \rho(U) = \frac{1}{\frac{dU(N)}{dN}}. \quad (10)$$

Цим визначається зв'язок кривої Лоренца  $U(N)$  з розподілом за накопиченнями. Аналогічно можна ввести криву Лоренца за доходами.

У соціології крива Лоренца використовується для характеристики економічної поляризації суспільства. Для цього вводиться індекс поляризації (індекс Джіні), який дорівнює відношенню середніх накопичень в найбагатшій децилії до накопичень в найбіднішій. Вважається, що коли це відношення більше за 15, то в суспільстві виникає соціальна напруга.

Розподіл за доходами  $\rho(y)$  знайти не складно, що, наприклад, зроблено в [28], проте вірогідність його в області великих доходів викликає сумніви.

Математичну модель, що дозволяє реконструювати  $\rho(U)$  за дотичними даними, запропоновано в [25–27]. У моделі використано рівняння балансу доходів та витрат сімей з урахуванням випадкових факторів:

$$\frac{dU}{dt} = P(U) - Q_I(U) - Q_{II}(U) + g\xi(t), \quad (11)$$

де  $Q_I(U)$  та  $Q_{II}(U)$  – функція попиту,  $P(U)$  – доходи сім'ї,  $\xi(t)$  – випадкова функція одиничних амплітуд,  $g$  – коефіцієнт, що відображає величину випадкових витрат (або здобутків). Функція доходів  $P(U)$  залежить від роду діяльності і тому різна для різних груп суспільства.

Для робітників та службовців, що отримують фіксовану зарплату, величина  $P$  стала і від  $U$  не залежить.

Дохід підприємців залежить від вкладених коштів і в першому наближенні пропорційний їм :

$$P(U) = A[1 + a\xi(t)]U + P_0. \quad (12)$$

Тут  $AU$  – різниця між виручкою та витратами, тобто додаткова вартість. Параметр  $A$  – коефіцієнт додаткової вартості, значення якого є різними для різних людей (тобто  $A$  також є розподіленим параметром, хоча розподіл є досить вузьким).  $P_0$  – сталий малий дохід.

Величина  $a\xi(t)$  відображає випадкові процеси при виробництві та реалізації товару.

Для реконструкції  $P(U)$  достатньо розв'язати рівняння (11), еквівалентне рівнянню Фоккера-Планка

$$\frac{\partial \rho_i(U)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial U} \left( \frac{\partial V(U)}{\partial U} \rho_i(U) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial U} \left[ G_i^2 \frac{\partial}{\partial U} - \rho_i(U) \right] \right), \quad (13)$$

де  $\rho_i(U)$  – розподіл за накопиченнями в  $i$ -й групі;

$$V(U) = \int_0^U [P(U^*) - Q_I(U^*) - Q_{II}(U^*)] dU^*.$$

(14)

Величину  $V(U)$ , як і в статистичній фізиці, називають потенціалом, хоча в даному випадку ніякого відношення до енергії вона немає,  $G_i^2 = AaU + g$  – аналог коефіцієнта дифузії. Інформацію про коефіцієнти  $a$  і  $g$  вдається отримати переважно методом експертних оцінок.

Стационарний розв'язок рівняння (13) має вигляд



$$\bar{\rho}_i(U) = \rho_{i,0} \exp\left[-\frac{2V(U)}{G^2}\right], \quad (15)$$

де  $\rho_{i,0}$  – нормувальний коефіцієнт, такий, що  $\int \rho_i(U) dU = v_i$  ( $v_i$  – частка даної групи в суспільстві).

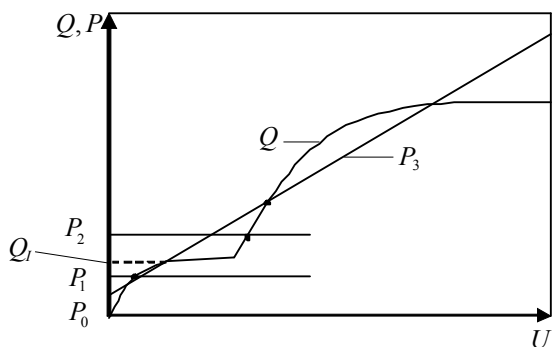


Рис. 5.

Для груп з незмінними доходами  $\bar{\rho}_i(U)$  – унімодальний розподіл, близький до нормального. Його максимум відповідає мінімуму «потенціалу»  $U$ , тобто нулю підінтегрального виразу в (14). Для низькооплачуваних груп населення, де  $P = P_1 < Q_{I,0}$ , ця точка відповідає перетину лінії  $P_1 = const$  з функцією  $Q(U)$ . Люди цих

груп витрачають всі доходи не товари першої необхідності.

Для високооплачуваних ( $P = P_2 > Q_{I,0}$ ) це точка перетину лінії  $P_2 = const$  з функцією  $Q(U) = Q_I(U) + Q_{II}(U)$ . Люди цих груп тратять доходи не лише для повсякденні потреби, але й на придбання товарів другої категорії.

Для груп, що займаються підприємницькою діяльністю, максимумами  $\bar{\rho}_i(U)$  припадають на точки перетину функції  $P_3(U) = AU + P_0$  та функції попиту  $Q(U)$ .

На рис. 5 наведено графік цих функцій. Видно, що точок перетину може бути декілька. Точки, позначені •, відповідають максимумам «потенціалу» (стійким стаціонарним станам).

Функція  $p(U)$  має два максимуми: при  $\bar{U}_1$  та  $\bar{U}_2$ . Перший відноситься до підприємців, які не змогли отримати стартовий капітал (їх спосіб життя відповідає низькооплачуванним шарам населення). Другий максимум – до вдаліших бізнесменів (їх спосіб життя такий же, як і високооплачуваних шарів населення).

З рисунка видно, що може виникнути третя група активного населення, де накопичення перевищують величину  $U_3$ . В рамках моделі в цій групі взагалі не існує стаціонарного стану, оскільки доходи завжди перевищують витрати, що враховується функцією споживання  $Q_{II}(U)$ . Цю групу можна умовно назвати „втікаючим“ хвостом (аналогічно до подібного явища у фізиці). Реально доходи накопичення цієї групи або обмежуються державою, або переводяться в інші країни (з чим і пов'язаний витік капіталу), або переводяться в інші форми накопичень (коштовності, предмети розкошу тощо). Вже з урахуванням цих факторів розподіл в області „хвоста“ можна розглядати як стаціонарний. Але виразом (15) він вже не описується. В економіці з цим явищем зіткнулись порівняно давно. Відомий економіст Парето на основі емпіричних даних запропонував в області „хвоста“ використовувати розподіли типу

$$\rho_i(U) = \frac{\chi}{U^v}, \quad (16) \text{ де } v$$

– параметр порядку;  $v = 1 - 2$ . Розподіл типу Парето має місце не лише в економіці, але і в біології та фізиці нерівноважних процесів [29, 30].

В економіці найпоширенішим є розподіл Парето з параметром  $\nu \cong 2$  [30].

Зазначимо, що за властивостями функція  $\rho(U)$  подібна до розподілу частинок в потенціальному полі  $V(U)$  при „температурі“  $K\Pi = G^2$ . Іншими словами, люди намагаються скупчитись в областях мінімуму „потенціалу“.

Викладену вище математичну модель було використано для реконструкції ЕСС в Радянському союзі та Росії в період від 1987 до наших днів [25, 31, 32], що виявилось надзвичайно цікавим. Було зроблено ряд цікавих висновків, зокрема щодо витікання капіталу [37], про розподіл „втікаючого хвоста“ [28] тощо.

На основі аналізу банківських даних було отримано ЕСС Японії [33].

Розподіли за накопиченнями та доходами використовуються в соціології та економіці. Вони грають важливу роль в податковій системі, в питанні ціноутворення і в проблемі адресної емісії грошей [34–37]. Ми не спиняємось на цих питаннях, проте зробимо деякі зауваження.

Оптимальне оподаткування залежить від розподілів  $\rho(y)$  та  $\rho(U)$ . Це значить, що обкладання повинно бути прогресивнішим за високої поляризації суспільства. Податкова система повинна відслідковувати зміну функцій розподілу  $\rho(y)$  та  $\rho(U)$ , тобто мінятися разом з ними. Особливо важливо вчасно від слідкувати ситуацію в правій частині розподілу, тобто в області „хвоста“. Прибуток  $\Pi$  дорівнює різниці валового доходу  $R_T$  та загальних витрат  $C_T$ :

$$\Pi = R_T - C_T. \quad (17)$$

Валовий дохід залежить від ціни  $p$ , величини  $Q_T$  і загальних витрат  $C_T$ , де  $Q_T$  – повна кількість виготовленого (і реалізованого) продукту.

Максимум прибутку досягається при ціні  $P_{opt}$ , яка задовольняє умову

$$\frac{d\Pi}{dp} = \int_0^{\infty} Q(U, p) \rho(U) dU + p \int_0^{\infty} \frac{dQ}{dp} \rho(U) dU - s \int_0^{\infty} \frac{dQ}{dp} \rho(U) dU = 0. \quad (18)$$

( $s$  – змінні питомі витрати, що залежать від ціни  $p$ . Але в силу слабкої залежності,  $s$  можна вважати сталою). Вираз (18) можна переписати в формі

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} \Pi &= \int_0^{\infty} Q_I(U) \rho(U) + p \int_0^{\infty} \frac{dQ_I}{dp} \rho(U) - s \int_0^{\infty} \frac{dQ_I}{dp} \rho(U) dU = \\ &= p \int_0^{\infty} Q_I(r) \rho(pr) (1 - E_r) dU - s \int_0^{\infty} \frac{dQ_I}{dp} \rho(U) dU, \end{aligned} \quad (19)$$

де  $E_r$  – еластичність попиту за купівельною спроможністю, що набуває максимуму при

$$\frac{dE_r}{dr} = \frac{d}{dr} \left( \frac{dQ_I}{dr} \cdot \frac{r}{Q_I} \right) = \frac{d^2 Q_I}{dr^2} \cdot \frac{r}{Q_I} + \frac{dQ_I}{dr} \cdot \frac{1}{Q_I} (1 - E_r) = 0. \quad (20)$$

Звідси максимальне значення еластичності попиту

$$(E_r)_{\max} = 1 + \frac{d^2 Q_I}{dr^2} \left( \frac{dQ_I}{dr} \right)^{-1} \quad (21)$$

З аналізу цих рівностей випливає, що при виробництві товарів та послуг першої необхідності прибуток, як функція, не має максимуму і монотонно

зростає з ростом останньої. В унімодальному суспільстві прибуток швидко зростає доти, доки ціна набуде значення  $p = x_{\max}$ , де  $x_{\max}$  – накопичення, що відповідає максимуму розподілу  $\rho(x)$ , а потім зростання сповільнюється і прибуток прямує до асимптотичної межі.

В бімодальному суспільстві картина якісно така ж сама. В обох випадках максимальний прибуток досягається при гранично високій ціні. Це означає, що вигідно мало виробляти продукції, але продавати її за дуже високою ціною. Зрозуміло, що така стратегія є неприйнятною для суспільства в цілому за будь-якої його структури.

На перший погляд цей висновок здається парадоксальним, але при детальному аналізі з'ясовується, що в усіх країнах, включаючи розвинені, використовуються міри державного регулювання не ринкового характеру. В межах даної роботи ми також не спиняємось на динамічному моделюванні макроекономічних процесів. Проте зауважимо, що в ТСР для опису явищ спочатку будуються базові моделі, для виявлення суті явища. На основі базових потім будуються імітаційні моделі. Така послідовність моделей з успіхом використовуються в біофізиці [38].

Детально про математичне моделювання переходів суспільства з одного стану в інший, причини криз, вплив держави та ринку не кризові явища можна знайти в роботах [40–43]. В результаті моделювання макроекономічних процесів, приходять до висновку про те, що, наприклад, ринкова рівновага, взагалі кажучи, не є єдиною. Навіть при одних і тих же макроекономічних параметрах країна може перейти або в високопродуктивний (ВП) стан, або в низькопродуктивний (НП) стан, в залежності від початкових умов. При цьому обидва стани є стаціонарними і в них має місце ринкова рівновага цін та накопичень. Модель також дозволяє відповісти на питання, які саме фактори (і в якій мірі) можуть викликати кризу (тобто перехід в НП стан) і навпаки, які фактори сприяють оберненому переходу в ВП стан.

В результаті досліджень [1–45] показано роль ЕСС в економіці, наявність двох стаціонарних і стійких станів макроекономіки (високопродуктивного та низькопродуктивного) і можливість переходів між ними. Новим і важливим є інше – динамічні моделі в економіці дозволяють якісно описати переходи між станами і виявити головні параметри, що керують цими процесами.

**Модель сучасної економіки.** Наведемо та обговоримо деякі аспекти з роботи [2], що стосуються сучасного моделювання економіки, на прикладі російської економіки.

Як продемонстровано вище, наприкінці минулого століття виник новий напрямок досліджень: *системний аналіз економіки, що розвивається*, в якому методологія математичного моделювання складних систем, розвинена в природничих науках, була синтезована з досягненнями сучасної економічної теорії. Модель було створено в 2004 році на замовлення Федерального агентства по податках та зборах. Прагматичною метою проекту було створення інструмента системного використання інформації із зовнішніх (по відношенню до податкової служби) джерел для оцінки розмірів тіньового обороту та

податкового потенціалу Росії. З наукової точки зору метою проекту була перевірка придатності нових теоретичних концепцій опису реальних макроекономічних явищ, а також обробка та розвиток нової технології моделювання. Модель описує розвиток в часі повного циклу суспільного відтворення в гранично агрегованому вигляді. Вся сукупність вироблених в країні та імпортованих благ подається в моделі одним показником – реальним ВВП. Розвиток економіки, що виражається рухом макроекономічних показників, описується в моделі як результат діяльності семи економічних агентів: *фірми, банку, населення, власників, держави, центрального банку, зовнішньої торгівлі*. Діяльність останніх трьох агентів описується *сценаріями державної економічної політики*.

Одним із результатів дослідження моделі було встановлення того, що капітал і досі зосереджується в фінансовому секторі, а реальний сектор зростає за рахунок займаних засобів.

Модель будується на ряді нових принципів. Суть моделі складають описи поведінки перших чотирьох агентів, які приймають раціональні рішення відносно контрольованих ними потоків. Навпаки, такі агенти як держава чи ЦБ ведуть себе не раціонально і тому їх *поведінка в моделі описується сценаріями*.

Ціль агента – це просто *варіаційний принцип*, відібрати реальну поведінку серед всіх мислимих. Одним з найрадикальніших принципів є *принцип раціональних сподівань*. Він полягає в тому, що модельні агенти для своїх прогнозів використовують ту ж модель, яку будуємо ми. Це не є тривіальним, бо кожен з модельних агентів має справу з різними змінними, тому і цілі в них різні. Як новизна в моделі є *нова формалізація поняття „капітал агента“*.

Стосовно технології розробки моделі зауважимо, що при побудові моделі доводиться розглядати цілий ряд альтернативних гіпотез, оскільки всю процедуру розв'язування доводиться повторювати багато разів для різних наборів обмежень в задачах різних агентів. Тому побудова такої економічної моделі може бути здійснена значною мірою завдяки використанню нових технологій моделювання.

Розробка та використання моделі, що має *канонічну форму*, на всіх етапах підтримується оригінальною інструментальною системою ЕКОМОД, яка реалізована в середовищі комп'ютерної алгебри Maple.

Система контролює коректність моделі.

Система забезпечує автоматичну генерацію умов оптимальності, автоматичне спрощення системи співвідношень на основі їх семантики, розрахунки по моделі (ідентифікація, чисельні експерименти).

Система дає можливість знайти вхідний вигляд та зміст співвідношень після будь-яких перетворень, швидко повторювати всі перетворення при модифікації початкових гіпотез, зберігати дерево варіантів моделі в файловій системі, подавати та зберігати результати розрахунків.

Модель в системі ЕКОМОД аж до отримання результатів розрахунків записується в стандартній математичній нотації.

Початкова модель економіки Росії, про яку йдеться, записується як система з 102 неоднорідних нелінійних рівнянь та нерівностей. Автоматичне

спрощення дозволяє звести їх число до 57. Подальші дослідження дозволяють звести модель до нелінійної неавтономної крайової задачі для 6 диференціальних та 11 скінченно-різницевих рівнянь з 17 невідомими. Ці дані відносяться до 37 версії моделі, попередні версії відрізнялись деякими змінами у вихідних описах блоків, що відображають альтернативні гіпотези про цілі і можливості економічних агентів.

**Висновки.** За допомогою моделей вдалось зрозуміти внутрішню логіку розвитку економічних процесів, що ховається за видимою і, як часто здається, парадоксальною картиною економічних явищ, які не вкладаються у відомі теоретичні схеми. Досвід застосування моделей показав, що вони служать надійним інструментом аналізу макроекономічних закономірностей, а також прогнозу наслідків макроекономічних рішень при умові збереження відносин, що склалися в суспільстві.

---

### Література

1. Чернавский Д.С. О проблемах физической экономики / Д.С.Чернавский, Н.И.Старков, А.В. Щербаков // Успехи физических наук. – 2002. – Т. 172, №9 – С. 1045 –1066.

2. Пospelov И. Г. Модель современной экономики России: методы, технология, результаты / И. Г. Пospelov // Материалы Международной конференции „Путь в будущее – наука, глобальные проблемы, мечты и надежды“, 26–28 ноября, 2007, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва.

---

### Summary

**Pareto distribution and other mathematical approach to macroeconomic modeling / D.A. Naiko, O.F. Shevchuk**

*A review of literature on constructing economics after the pattern of natural sciences with the use of mathematical modeling are presented, and some original results in modern economic model are discussed.*