



Гель П. В.

Винницький
національний
аграрний
університет

Резник С. И.

Винницький
національний
технічний
університет

УДК 532.51(066.2)

О ВОЗМОЖНОМ МЕХАНИЗМЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

У статті проведено теоретичне дослідження турбулентного перемішування в прилеглому шарі в'язкого потоку нестисливої рідини. Результатом дослідження є формула поздовжньої компоненти швидкості турбулентного потоку рідини.

In this paper a theoretical investigation of turbulent mixing in boundary layer of viscous flow of incompressible liquid was putted into effect. As a result a formula of longitudinal component of velocity of turbulent flow was obtained.

Турбулентные течения очень часто встречаются в природе и широко используются в технических устройствах. Такие течения отличаются от ламинарных значительно большей способностью к переносу импульса, тепла и взвешенных в потоке частиц примесей. Они характеризуются повышенным воздействием на обтекаемые потоком твердые тела и ускоренным протеканием химических реакций (в частности, горения). Вследствие наличия внутренних неоднородностей турбулентные течения интенсивно рассеивают проходящие сквозь них звуковые и электромагнитные волны, вызывая флуктуации их амплитуд и фаз.

Поэтому знание закономерностей турбулентных движений оказывается важным во многих отраслях науки и техники – в метеорологии, океанологии, гидрологии, прикладной гидроаэродинамике, гидравлике, астрофизике, технике радиосвязи, гидроакустике, баллистике, ядерной энергетике, авиации, ракетной технике и многих других отраслях техники.

Турбулентные течения привлекают к себе пристальное внимание не только с практической, но и с теоретической точек зрения как примеры нелинейных механических систем с очень большим числом степеней свободы [1, 2, 3].

В данной работе ставится задача аналитически рассмотреть процесс движения

жидкости в пограничном слое на основании теории турбулентного перемешивания, разработанной авторами работы [4].

Процесс движения несжимаемой вязкой жидкости может быть описан уравнениями Навье-Стокса [2]:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + \rho g_i, \quad (1)$$

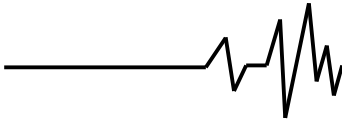
$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0, \quad (i, k = 1, 2, 3), \quad (2)$$

где ρ – массовая плотность жидкости; v_i – i -я компонента мгновенной скорости жидкости; t – время; p – давление; μ – коэффициент динамической вязкости жидкости; g_i – ускорение массовых сил, действующих

вдоль оси x_i ; $\frac{d}{dt}$ – оператор, равный

$$\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Понятие о пограничном слое, впервые введенное в 1904 г. Л. Прандтлем, позволило разделить поток на две области: первую – область невязкого потока, подчиняющуюся уравнениям движения Эйлера [3], и вторую – область вязкого течения вблизи поверхности тела, подчиняющуюся уравнениям (1, 2). Из-за



недостаточного понимания турбулентных процессов задача определения характеристик турбулентного течения является не только сложной математической, но и феноменологической проблемой [1, 2]. В последние годы особенно пристальное внимание было уделено именно процессам в непосредственной близости от стенки.

В работе [5] высказано предложение, что в ламинарном подслое могут существовать процессы вязкой стабилизации и невязкие "сильные" выбросы, возникающие за счет пульсаций давления. Каждая область существования выброса является своеобразным движущимся генератором вихрей. Картина происходящих в пограничном слое событий была описана в работе [6], в которой отражена полная последовательность явлений, связанных с процессами струйного выброса жидкости от стенки. В работах [5, 6] отмечается, что с увеличением числа Рейнольдса происходит увеличение частоты выбросов и их интенсивности.

Запишем уравнения (1, 2) в безразмерных переменных, используя соотношения:

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i v_*}{\nu}; \quad \tilde{v}_i = \frac{v_i}{v_*}; \quad \tilde{p} = \frac{P}{\rho v_*^2}; \quad \tilde{t} = \omega t, \quad (3)$$

где ν – кинематический коэффициент вязкости; ω – частота выбросов; v_* – динамическая скорость.

Без учета массовых сил получаем:

$$\frac{\omega \nu}{v_*^2} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v}_\kappa \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{x}_\kappa} = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i} + \nabla^2 \tilde{v}_i, \quad (4)$$

$$\sum_{\kappa=1}^3 \frac{\partial \tilde{v}_\kappa}{\partial \tilde{x}_\kappa} = 0, \quad (i, \kappa = 1, 2, 3). \quad (5)$$

Чтобы имитировать существование в потоке жидкости выбросов струй из пристеночной области, свяжем турбулентное движение жидкости с существованием множества замкнутых вихревых нитей, образующих вихревые площадки. При контакте вихрей вследствие их нейтрализации образуются своеобразные струи, ударяющие по поверхности стенки. Торможение этих струй можно рассматривать как шлепки [7], приводящие к последующему восстановлению вихрей и, как следствие, к возникновению выбросов.

Естественно, что любую площадку σ_i следует рассматривать как площадку разрыва горизонтальных компонент скорости жидкости.

Однако вертикальная компонента \tilde{v}_3 на любой из площадок непрерывна.

Запишем уравнение (4) для разрыва продольной скорости:

$$\frac{\omega \nu}{v_*^2} \frac{\partial (\Delta \tilde{v}_1)}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v}_3 \frac{\partial (\Delta \tilde{v}_1)}{\partial \tilde{x}_3} = \frac{\partial^2 (\Delta \tilde{v}_1)}{\partial \tilde{x}_3^2}, \quad (6)$$

где $2\Delta \tilde{v}_1$ – тангенциальный разрыв продольной скорости на площадке σ_0 (рис. 1, профиль 5). Если учесть влияние на движение жидкости всех других вихрей, распределенных над соседними площадками σ_i , то поле продольных скоростей \tilde{v}_1 жидкости можно представить следующим выражением:

$$\tilde{v}_1 = \Delta \tilde{v}_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_{31}, \tilde{t}) + \Delta v_{1\omega}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_{31}, \tilde{t}), \quad (7)$$

где $\Delta \tilde{v}_1$ – вклад, вносимый диффундирующими вихрями, распределенными над соседними площадками σ_i . Уравнение неразрывности (5) для выбранной модели турбулентности на основании соотношения (7) принимает вид:

$$\frac{\partial (\Delta \tilde{v}_\kappa)}{\partial \tilde{x}_\kappa} + \frac{\partial (\Delta \tilde{v}_{\kappa\omega})}{\partial \tilde{x}_\kappa} = 0. \quad (8)$$

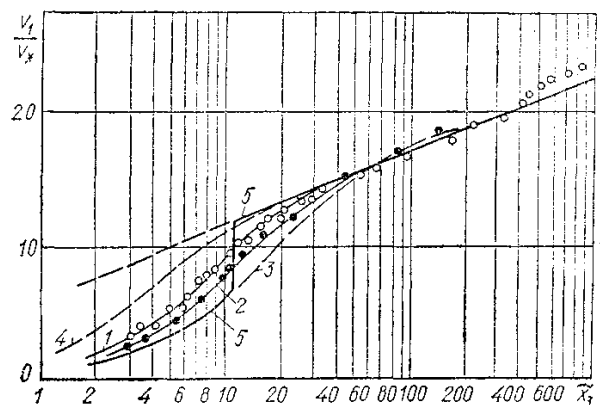
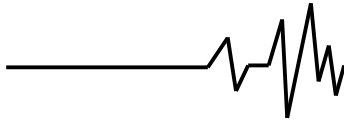


Рис. 1. Сравнение результатов экспериментов с формулой (29): 1 – данные Клебанова; 2 – данные Лауфера; 3, 4 – предельные теоретические кривые; 5 – профиль для \tilde{v}_1 с разрывом на σ_0

Проинтегрируем уравнение (6), потребовав выполнения граничных условий:



$$\left. \begin{aligned} \Delta \tilde{v}_1(\tilde{x}, \tilde{t}) &= \Delta v_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3^*, \tilde{t}) \quad \text{при } \tilde{x}_3 = \tilde{x}_3^*; \\ \Delta \tilde{v}_1(\tilde{x}, \tilde{t}) &= 0 \quad \text{при } \tilde{x}_3 = \infty; \\ \Delta \tilde{v}_1(\tilde{x}, \tilde{t}) &= \Delta v_{10} \quad \text{при } \tilde{t} = 0; \\ \tilde{x} &= (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3), \end{aligned} \right\} (9)$$

где \tilde{x}_3^* – положение площадки разрыва.

Предположим, что распределение $\Delta \tilde{v}_1(\tilde{x}_3)$ на $\tilde{x}_3 \in (\tilde{x}_3^*, +\infty)$ можно представить в виде:

$$\Delta \tilde{v}_1(\tilde{x}_3, \tilde{t}) = \Delta \tilde{v}_1(\tilde{x}_3^*) \varphi(\tilde{x}_3, \tilde{t}), \quad (10)$$

где $\varphi(\tilde{x}_3, \tilde{t})$ – искомая функция.

С учетом (10) уравнение (6), после соответствующих преобразований приобретает вид:

$$\frac{\omega v}{v_*^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v}_3 \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{x}_3} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tilde{x}_3^2} \quad (11)$$

с граничными условиями:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\tilde{x}_3, \tilde{t}) &= \varphi(\tilde{x}_3^*, \tilde{t}) \quad \text{при } \tilde{x}_3 = \tilde{x}_3^*; \\ \varphi(\tilde{x}_3, \tilde{t}) &= 0 \quad \text{при } \tilde{x}_3 = \infty; \\ \varphi(\tilde{x}_3, 0) &= 1 \quad \text{при } \tilde{t} = 0. \end{aligned} \right\} (12)$$

Перейдем в уравнение (11) к новым переменным:

$$\varphi(\tilde{x}_3, \tilde{t}) = \varphi_1(\eta, t'); \quad \eta = \frac{\tilde{x}_3}{\beta(\tilde{t})}; \quad d\tilde{t} = \frac{dt'}{\gamma(\tilde{t})}, \quad (13)$$

где $\beta(\tilde{t})$ и $\gamma(\tilde{t})$ – некоторые искомые функции.

После преобразований уравнение (11) приобретает вид:

$$\frac{\omega v}{v_*^2} \left(\gamma \frac{\partial \varphi_1}{\partial t'} - \frac{\tilde{x}_3}{\beta^2} \frac{\partial \beta}{\partial \tilde{t}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} \right) + \frac{\tilde{v}_3}{\beta} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta^2}. \quad (14)$$

Используя новые переменные

$$\varphi_2 = \varphi_2(\xi); \quad \xi = \frac{\eta}{\sqrt{\int \delta dt'}}; \quad \delta(t') = \frac{1}{\beta \gamma} \frac{v_*^2}{\omega v} \quad (15)$$

и уравнение непрерывности давления [4]:

$$\frac{\omega v}{v_*^2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial(\tilde{p} \tilde{v}_\kappa)}{\partial \tilde{x}_\kappa} = 0, \quad (16)$$

уравнение (14) можно свести к виду:

$$-\frac{1}{2} \xi \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \xi^2}. \quad (17)$$

Решение уравнения (17) имеет вид:

$$\varphi_2 = c - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\tilde{x}_3^*}^{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right) d\left(\frac{\xi}{2}\right), \quad (18)$$

где c – постоянная интегрирования, а параметр ξ определяется следующей формулой:

$$\xi = \frac{\omega v}{v_*^2} \frac{\tilde{x}_3}{\beta(\tilde{t}) \sqrt{\int \frac{d\tilde{t}}{\beta^2(\tilde{t})}}}. \quad (19)$$

Таким образом, можно записать:

$$\tilde{v}_1(\tilde{x}, \tilde{t}) = \kappa \tilde{x}_3 (1 - \text{erf} \xi) + \Delta \tilde{v}_{10} \text{erf} \xi, \quad (20)$$

где $\text{erf} \xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right) d\left(\frac{\xi}{2}\right)$ – интеграл

вероятности.

По аналогии с (7) в общем случае можно записать:

$$\tilde{v}_\kappa = \Delta \tilde{v}_\kappa(\tilde{x}, \tilde{t}) + \Delta \tilde{v}_{\kappa 0}(\tilde{x}, \tilde{t}). \quad (21)$$

Для определения “вихревой” составляющей скорости $\Delta \tilde{v}_{\kappa 0}$ запишем уравнение (4) для течения жидкости непосредственно на поверхности разрыва:

$$\frac{\omega v}{v_*^2} \frac{\partial \tilde{v}_{i\omega}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v}_{\kappa\omega} \frac{\partial \tilde{v}_{i\omega}}{\partial \tilde{x}_\kappa} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i} + \nabla^2 \tilde{v}_{i\omega}, \quad (22)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}_3^2}$; $i, \kappa = (1, 2, 3)$.

При решении уравнения (22) целесообразно ввести некоторую функцию φ_3 , являющуюся аналогом потенциала скорости для $\Delta \tilde{v}_{i\omega}$, удовлетворяющую соотношениям:

$$\Delta \tilde{v}_{i\omega} = \frac{1}{m} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \tilde{x}_i}, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (23)$$

где m – некоторая постоянная, учитывающая эффекты вязкости и стенки.

Уравнение (22) приобретает следующий вид:

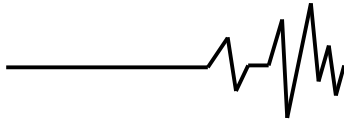
$$\frac{\omega v}{v_*^2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{2m} \sum_{\kappa=1}^3 \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial \tilde{x}_\kappa} \right)^2 = -\tilde{p} + \nabla \varphi_3. \quad (24)$$

Решение полученного уравнения можно записать в таком виде:

$$\varphi_3 = c_2 - 2m \ln(c_1 - \eta), \quad (25)$$

где c_1 и c_2 – постоянные интегрирования.

Суммарное влияние всех вихрей на рассматриваемую площадку выражается формулой:



$$\varphi = c_{2x} - 2m \prod_{i=1}^n \ln(c_1 - \eta_i). \quad (26)$$

достаточно корректно аппроксимируют экспериментальные данные.

Таким образом, скорость $\Delta \tilde{v}_{1\omega}$ равна:

$$\Delta \tilde{v}_{1\omega} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{x}_1} = 2m \sum_{i=1}^n \frac{1}{c_1 - \eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial \tilde{x}_1}. \quad (27)$$

В формуле (27) с достаточной точностью суммирование можно заменить интегрированием по \tilde{x}_1 :

$$\Delta \tilde{v}_{1\omega} = 2m \ln(c_1 - \eta) + c_2. \quad (28)$$

Теперь окончательно можно получить следующую формулу для продольной скорости турбулентного течения

$$\tilde{v}_1(\tilde{x}, \tilde{t}) = \kappa \tilde{x}_3 (1 - \operatorname{erf} \xi) + (c_2 + 2m \ln(c_1 - \eta)) \operatorname{erf} \xi \quad (29)$$

Полученная формула непрерывно описывает профиль продольной скорости $\tilde{v}_1(\tilde{x}, \tilde{t})$ в $\tilde{x}_3 \in (0; +\infty)$.

Сопоставление формулы (29) с данными экспериментов [8] показано на рис. 1. Из рисунка видно, что теоретические кривые

Литература

1. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1970.-288 с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973. – 848 с.
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974. – 711 с.
4. Бельский С.З., Фрадкин Е.С. Теория турбулентного перемешивания. – Труды физического института им. Лебедева АН СССР, 1965, т. 29. – С. 27-41.
5. Блэк Е.Дж. Некоторые практические приложения новой теории турбулентности пристеночного слоя. – В кн.: Достижения в области теплообмена. – М.: Мир, 1970. – 258 с.
6. Корино Е.Р., Бродки Р.С. Визуальные исследования пристеночной области в турбулентном течении. – Механика, 1971, № 1. – С. 56-82.
7. Седов Л.И. Механика сплошной среды, т.2. – М.: Наука, 1970. – 568 с.
8. Ротта И.К. Турбулентный пограничный слой в несжимаемой жидкости. – Л.: Судостроение, 1967. -237 с.