

УДК 66.069.833: 532.62

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ ЕКСТРАГУВАННЯ В СИСТЕМІ «ТВЕРДЕ ТІЛО – РІДИНА»

*Буйвол С.М., аспірант*

*Светлічний П.І., к.т.н, доцент*

*Одеська національна академія харчових технологій, м. Одеса*

*Запропоновано математичну модель, яка враховує змішаний (внутрішньо- і зовнішньо- дифузійний) механізм процесу екстрагування цільового компонента (олії).*

*Mathematical model that considers mixed (internal and external diffusion) mechanism of target component (oil) extraction process has been offered.*

Екстрагування цінних компонентів із рослинної сировини відносять до важливих процесів, підвищення ефективності яких виявляє визначений вплив на техніко-економічні показники.

В харчовій промисловості лікарську сировину використовують в виді водних і водоспиртових екстрактів. При цьому основним являється екстрагування, тобто приготування настоянок [1].

Метою даної роботи являється побудова математичної моделі процесу екстрагування розчинних речовин з насіння амаранту під дією електромагнітного поля. Об'єктом дослідження являвся екстракт масла амаранту, отриманий обробкою СВЧ. В якості екстрагенту використовували гексан, спирт, нефрас.

Існують безліч моделей екстракційних процесів як для умов непереривності чи періодичності їх протікання, так і для різного направлення основних потоків вихідного матеріалу і екстрагенту. Математична модель дозволяє різнобічно дослідити процес з точки зору впливу на нього різних змінних, які були включені в експеримент [2].

Узагальнення експериментальних даних проведено в безрозмірних змінних. Для цього знаходимо визначений розмір, виходячи з густини потоку маси на межі розділу твердої і рідкої фази:

$$g = \frac{1}{S_p} * \frac{dM}{d\tau} \quad (1)$$

де  $g$  – густина потоку екстракту,

$S_p$  – площа межі розділу,

$M$  – маса екстракту,

$\tau$  – час процесу.

Розглянемо рівняння (1) на прикладі сферичних зерен, які містять екстракт. В такому випадку:

$$M = N * m_0, \quad S_p = N * S_0 \quad (2)$$

де,  $N$  – число зерен в середині розчинника,

$m_0$  – маса екстракту всередині одного зерна,

$S_0$  – площа поверхні одного зерна.

Для сфери сферичної форми маємо

$$S_o = 4 * \pi * r^2, \quad m_o = \theta * m \quad (3)$$

де,  $r$  – радіус однієї гранули,

$m$  – маса однієї гранули,

$\theta$  – доля екстракту в одній гранулі.

Так як  $m = \frac{\pi}{6} * \rho * r^3$  ( $\rho$  - густина зерен), то  $m_o = \frac{\pi}{6} * \theta * \rho * r^3$  (для амаранту  $\theta = 0,12$ )

Після підстановок (2) в (1) з розрахунком (3) отримуємо

$$g = \frac{1}{4 * \pi * r^2 * N} * \frac{d}{d\tau} * \left( \frac{\pi}{6} * \theta * \rho * r^3 * N \right)$$

$$g = \frac{\theta * r}{24} * \frac{d\rho}{d\tau} \quad (4)$$

З (4) слідує визначаючий розмір – радіус однієї гранули. Цим доказано, що дисперсійний склад являється діючим фактором в процесі екстрагування [1]. Виведемо три фактора, які визначають процес:

- дисперсний склад твердої фази;
- час;
- температура.

Цільовою функцією являється концентрація екстракту в розчиннику  $C$ . Безрозмірною концентрацією назовемо відношення:

$$z = \frac{C}{C_o}$$

( $C_o$  – початкова концентрація екстракту всередині зерен відносно об'єму розчинника)

За незалежні перемінні приймемо безрозмірну температуру

$$x = \frac{t}{t_k} \quad (t_k - \text{температура кипіння розчинника})$$

і безрозмірний комплекс  $y = \frac{g * \tau^2}{r}$  ( $g$  – прискорення вільного падіння)

В прийнятих позначеннях математичну модель процесу екстрагування представляє функція двох перемінних:  $z = f(x, y)$

Найбільше поширення в теорії подібності мають степеневі функції. В даному випадку така функція має вид:

$$z = A * x^\alpha * y^\gamma \quad (5)$$

де параметри  $A, \alpha, \gamma$  підлягають визначенню.

Після логарифмування (5) отримуємо лінійну функцію

$$W = a + \alpha * U + \gamma * V \quad (6)$$

де,  $W = \ln z$ ,  $U = \ln x$ ,  $V = \ln y$ ,  $a = \ln A$

Використовуючи метод найменших квадратів, коефіцієнти в (6) знайдемо із системи рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \sum_{i=1}^n (a + \alpha * U_i + \gamma * V_i - W_i)^2 &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{i=1}^n (a + \alpha * U_i + \gamma * V_i - W_i)^2 &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} \sum_{i=1}^n (a + \alpha * U_i + \gamma * V_i - W_i)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

де,  $i$  – номер експериментальної точки ( $U, V, W$ )

$n$  – кількість експериментальних точок.

В результаті диференціювання і підсумування в рівняннях (7) отримаємо лінійну систему рівнянь:

$$\begin{aligned} n * a + b_1 * \alpha + b_2 * \gamma &= B_1 \\ b_1 * a + b_3 * \alpha + b_4 * \gamma &= B_2 \\ b_2 * a + b_4 * \alpha + b_5 * \gamma &= B_3 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{де, } b_1 = \sum_{i=1}^n U_i, \quad b_2 = \sum_{i=1}^n V_i, \quad b_3 = \sum_{i=1}^n U_i^2, \quad b_4 = \sum_{i=1}^n U_i * V_i, \quad b_5 = \sum_{i=1}^n V_i^2$$

$$B_1 = \sum_{i=1}^n W_i; \quad B_2 = \sum_{i=1}^n W_i * U_i; \quad B_3 = \sum_{i=1}^n W_i * V_i$$

Знайшовши рішення системи (8), отримаємо  $a, \alpha, \gamma$  и  $A = e^\alpha$

Повертаємось до старих змінних, отримаємо формулу для прогнозу концентрації в залежності від температури і часу процесу екстрагування.

$$C = A * C_0 * \left(\frac{t}{t_k}\right)^\alpha * \left(\frac{g * \tau^2}{r}\right)^\gamma \quad (9)$$

Зв'язок формули (9) з класичними дифузійними критеріями Фур'є і Шервуда можна отримати, якщо застосувати нове число подібності.

$$B = \frac{g * \tau}{\beta}$$

де  $\beta$  – коефіцієнт масовіддачі

$$\text{Тоді } B * Sh * Fo = \frac{g * \tau}{\beta} * \frac{r * \beta}{D} * \frac{D * \tau}{r^2} = \frac{g * \tau^2}{r}$$

і математична модель екстракції має вид:

$$C = A * C_0 * \left(\frac{t}{t_k}\right)^\alpha * (B * Sh * Fo)^\gamma \quad (10)$$

Адекватність моделі була перевірена на лабораторному стенді, де були проведені 96 дослідів.



**Рис. 1 – Мікрохвильовий екстрактор**

Фрагмент результатів експерименту показані в таблиці.

№ дослідю	$\left(\frac{C}{C_0}\right)$	$\left(\frac{C}{C_0}\right)^*$	$\Delta$	$\delta$
1	0,54	3,02	2,47	4,52
2	0,54	3,11	2,56	4,69
3	0,39	2,45	2,06	5,28
4	0,37	2,19	1,81	4,85
5	0,40	2,32	1,91	4,71
6	0,42	2,45	2,03	4,81
7	0,28	2,19	1,91	6,80
8	0,32	2,32	1,99	6,07
9	0,46	2,74	2,27	4,85

Таким чином, отримані рівняння можуть бути використані для прогнозування виходу олії з насіння амаранту при обробці електромагнітним полем.

#### Література

1. Лысянский В.М. Экстрагирование в пищевой промышленности/ В.М.Лысянский, С.М.Гребенюк. – М.: Агропромиздат, 1988. – 187 с.
2. Адлер Ю.П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных решений / Ю.П.Адлер, Е.В.Маркова, Ю.В.Грановский. – М.: Наука, 1976. – 279 с.
3. Бурдо О.Г., Ряшко Г.М . Экстрагирование в системе «кофе - вода». Одесса, 2007. – 176 с.
4. Стадник Р.В., Семенишин Є.М. Визначення коефіцієнта внутрішньої дифузії при екстрагуванні олії з не подрібненого насіння амаранту гібриду (*amaranthus hibrydus*) // Наук. пр. Одес. нац. акад. харчових технологій. – 2010. – Вип. 37. – Т. 1. – С. 317.