



Найко Д. А.

Вінницький  
національний  
аграрний  
університет

Краєвський В. О.

Вінницький  
національний  
технічний  
університет

УДК 621.77

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОЧАТКОВОЇ СТАДІЇ ПРОЦЕСУ ЗГИНАННЯ

*В работе разработана математическая модель начальной стадии процесса сгибания полосы переменной ширины и толщины матрицей и пуансоном, которые имеют радиусы закруглений, соизмеримые с расстоянием между ними. На основе модели предложен алгоритм, позволяющий определять точки касания полосы к матрице и пуансону и уравнение нейтральной поверхности полосы. Алгоритм реализован в математическом приложении Maple.*

*The article is devoted to the development of the mathematical model of the plate with variable breadth and thickness initial stage of flexure by lower die and male mold which have bending radius, commensurable with distance between them. On base of the mathematical model the algorithm, which permits to determine contact point of plate with lower die and male mold and the equation of the plate cambered axle, is offered. The algorithm is implemented in mathematical application Maple.*

### Вступ.

У випадку, коли проектується оснастка для листового штампування на існуюче обладнання, яке призначене для виконання іншого виду робіт і має незначний діапазон робочого зусилля [1], важливим є точне визначення зусилля деформування. При визначенні зусилля деформування при операціях згинання здебільшого радіусами заокруглень матриці та пуансона або нехтували або нейтральну поверхню (на якій не діють напруження розтягу та стискання, фактично нейтральна поверхня – це серединна поверхня) смуги апроксимували прямою лінією [2,3]. Але у випадку, коли відстань між матрицею та пуансоном співрозмірна з їх радіусами заокруглень, то це може призвести до значної похибки. Похибка викликана невірним визначенням точок прикладання зусилля деформування. Це, в свою чергу, впливає як на величину повного зусилля деформування так і на його напрям, тобто на перерозподіл повного зусилля деформування на повздовжню та поперечну складові. Введемо до розгляду три стадії процесу згинання смуги (рис. 1). У початковій стадії радіус згинання смуги у точці

дотику більший за радіус матриці. В основній стадії радіус згинання повністю визначається радіусом матриці, а пуансон діє на смугу по дотичній. На заключній стадії пуансон діє на смугу не по дотичній, а на кінець смуги.

Метою роботи є визначення нейтральної поверхні смуги на початковій стадії операції згинання матрицею та пуансоном, що мають радіуси заокруглень, які співрозмірні з відстанню між ними.

### Основна частина.

Смуга товщиною  $s$  притиснена прижимом до матриці (рис. 2). На вільний кінець смуги з зусиллям  $P$  діє пуансон. Введемо декартову систему координат, початок відліку якої знаходиться у точці виходу смуги з-під прижиму. Нехай поверхня матриці у вибраній системі координат описується рівнянням

$$m = m(x), \quad (1)$$

а поверхня пуансона

$$p = p(x). \quad (2)$$



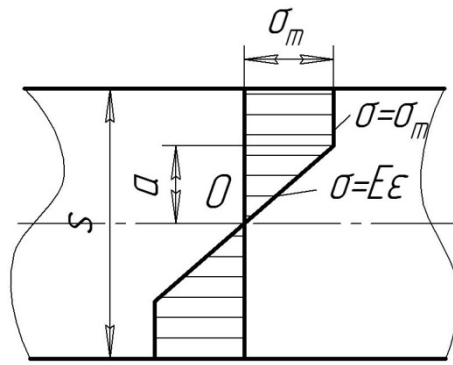
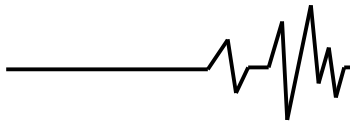


Рис. 3. Розподіл тангенціальних напружень на ділянці пружно-пластичних деформацій

Знайдемо момент, що створюється тангенціальними напруженнями відносно точки O:

$$\frac{M}{b(x)} = 2 \cdot \int_0^{s(x)/2} \sigma \delta \cdot d\delta = 2 \cdot \left[ \int_0^a \epsilon E \delta \cdot d\delta + \int_a^{s(x)/2} \sigma_m \delta \cdot d\delta \right]. \quad (5)$$

Легко показати, що

$$\epsilon = \frac{\delta}{\rho_{cp}}; \quad a = \frac{\sigma_m \cdot \rho_{cp}}{E}, \quad (6)$$

де  $\delta$  – відстань до нейтральної поверхні;  $\rho_{cp}$  – радіус згинання нейтральної поверхні;  $\sigma_m$  – границя текучості;  $E$  – модуль пружності.

Тоді

$$M = b(x) \cdot \left[ \frac{\sigma_m \cdot s(x)^2}{4} - \frac{\sigma_m^3 \cdot \rho_{cp}^2}{3 \cdot E^2} \right]. \quad (7)$$

На початку процесу згинання точка дотику смуги до матриці знаходиться у місці виходу смуги з-під прижиму (див. рис. 2). Радіус заокруглення вигнутої осі смуги у цій точці більший за радіус матриці. Отже, нам відома координата точки дотику смуги з матрицею

$$x_A = 0 \quad (8)$$

та напрям дотичної до вигнутої осі у цій точці

$$\frac{d\omega(x_A)}{dt} = 0. \quad (9)$$

Але є невідомий параметр  $R_A$ , який визначає радіус заокруглення вигнутої осі смуги у точці із координатою  $x_A$ . Тоді з формули (7) вираз для визначення моменту  $M_A$ , який необхідний для згинання смуги у точці із координатою  $x_A$  на радіус  $R_A$  запишеться у вигляді

$$M_A = b(0) \cdot \left[ \frac{\sigma_m \cdot s(0)^2}{4} - \frac{\sigma_m^3 \cdot R_A^2}{3 \cdot E^2} \right]. \quad (10)$$

Загальний момент створюється двома складовими повного зусилля  $P$ . Осьова складова створює момент

$$M_1 = P_y \cdot x_B. \quad (11)$$

Поперечна складова зусилля  $P$  створює момент

$$M_2 = -P_x \cdot p(x_B). \quad (12)$$

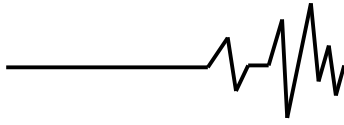
Враховуючи, що

$$P_x = \frac{P_y}{\operatorname{tg}\varphi} = -P_y \cdot \frac{dp(x_B)}{dx}, \quad (13)$$

осьове зусилля, яке забезпечує момент, достатній для виникнення пластичних деформацій та згинання смуги на радіус  $R_A$ , обчислюється за формулою

$$P_y = \frac{M_A}{x_B + \frac{dp(x_B)}{dx} p(x_B)}. \quad (14)$$

Для того, щоб визначити координати точки  $B$  та параметр  $R_A$ , необхідно знати рівняння вигнутої осі смуги  $\omega = \omega(x)$ . З формули (7)



$$\rho_{cp} = \frac{\sqrt{3} \cdot E}{2 \cdot b(x) \cdot \sigma_m^2} \cdot \sqrt{b(x) \cdot \sigma_m \cdot (s(x)^2 \cdot \sigma_m \cdot b(x) - 4 \cdot M(x))}. \quad (15)$$

Відомо, що

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 \omega}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (16)$$

Тоді диференціальне рівняння зігнутої осі смуги при пружно-пластичних деформаціях запишемо у вигляді

$$\frac{\frac{d^2 \omega}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = - \frac{2 \cdot b(x) \cdot \sigma_m^2}{\sqrt{3} \cdot E \cdot \sqrt{b(x) \cdot \sigma_m \cdot [s(x)^2 \cdot \sigma_m \cdot b(x) - 4 \cdot M_{nl}(x)]}}, \quad (17)$$

де  $M_{nl}(x)$  – згинальний момент, який діє у перерізі із координатою  $x$ , що належить ділянці пружно-пластичних деформацій, і обчислюється за формулою

$$M_{nl}(x) = P_y \cdot \left( x_B - x - \frac{dp(x_B)}{dx} (\omega(x) - p(x_B)) \right). \quad (18)$$

Підставивши (10) та (14) у (18), матимемо остаточний вираз для визначення згинального моменту  $M_{nl}(x)$

$$M_{nl}(x) = \frac{b(0) \cdot \left[ \frac{\sigma_m \cdot s(0)^2}{4} - \frac{\sigma_m^3 \cdot R_A^2}{3 \cdot E^2} \right]}{x_B + \frac{dp(x_B)}{dx} \cdot p(x_B)} \left( x_B - x - \frac{dp(x_B)}{dx} (\omega(x) - p(x_B)) \right). \quad (19)$$

Отже, для визначення рівняння зігнутої осі смуги, матимемо нелінійне диференціальне рівняння другого порядку. Початкові умови для розв'язування задачі Коші подамо у вигляді

$$\begin{cases} \omega(0) = 0; \\ \frac{d\omega(0)}{dx} = 0. \end{cases} \quad (20)$$

координати точки  $D$ , де проходить межа між частиною смуги, що має пружно-пластичні деформації, та частиною смуги, де деформації лише пружні. Тіло переходить з пружно-пластичного у пружний стан, коли у формулі (6)

$$a = \frac{s}{2}. \text{ Тоді}$$

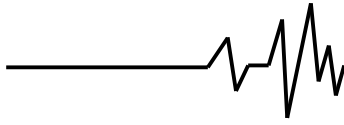
$$\rho_{cp} = \frac{s \cdot E}{2 \cdot \sigma_m}. \quad (21)$$

При введенні початкових умов ми вважаємо, що відстань між пуансоном і матрицею  $t$  набагато більша за товщину  $s$ .

Після точки  $D$  до точки  $B$  смуга буде мати лише пружні деформації. Знайдемо

Але, згідно з (15),  $\rho_{cp}$  у точці  $D$

дорівнюватиме



$$\rho_{cp} = \frac{\sqrt{3} \cdot E}{2 \cdot b(x_D) \cdot \sigma_m^2} \sqrt{b(x_D) \cdot \sigma_m \cdot (s(x_D))^2 \cdot \sigma_m \cdot b(x_D) - 4 \cdot M_{nl}(x_D)}. \quad (22)$$

Отже, маємо одне рівняння з одним невідомим  $x_D$

$$\frac{s(x_D)}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot b(x_D) \cdot \sigma_m} \sqrt{b(x_D) \cdot \sigma_m \cdot (s(x_D))^2 \cdot \sigma_m \cdot b(x_D) - 4 \cdot M_{nl}(x_D)}, \quad (23)$$

розв'язавши яке, знаходимо координату точки  $D$ , в якій відбувається зміна напружено-деформованого стану смуги із пружно-пластичного у пружний.

Розподіл напружень у товщині смуги на ділянці  $DB$  зображено на рис. 4. Тоді диференціальне рівняння осі смуги матиме вигляд [4]

$$\frac{\frac{d^2 z}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{12 \cdot M_{np}(x)}{E \cdot s(x)^3 \cdot b(x)}, \quad (24)$$

де  $M_{np}(x)$  – згинальний момент, який діє у перерізі із координатою  $x$ , що належить ділянці пружних деформацій, і обчислюється за формулою

$$M_{np}(x) = \frac{b(0) \cdot \left[ \frac{\sigma_m \cdot s(0)^2}{4} - \frac{\sigma_m^3 \cdot R_A^2}{3 \cdot E^2} \right]}{x_B + \frac{dp(x_B)}{dx} \cdot p(x_B)} \left( x_B - x - \frac{dp(x_B)}{dx} (z(x) - p(x_B)) \right). \quad (25)$$

Оскільки положення точки  $D$  визначається як рівнянням (17), так і рівнянням (24), то початкові умови запишемо у вигляді

$$\begin{cases} z(x_D) = \omega(x_D); \\ \frac{dz(x_D)}{dx} = \frac{d\omega(x_D)}{dx}. \end{cases} \quad (26)$$

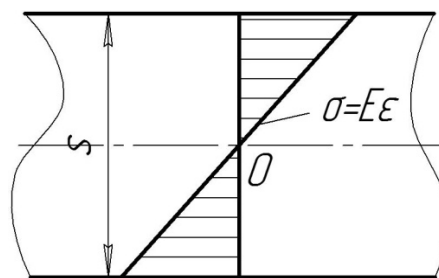
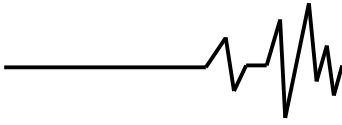


Рис. 4. Розподіл тангенціальних напружень на ділянці пружних деформацій



Додатковими умовами для визначення невідомих параметрів  $R_A$  та  $x_B$  у рівняннях слугуватимуть вирази

$$\begin{cases} z(x_B) = p(x_B); \\ z'(x_B) = p'(x_B). \end{cases} \quad (27)$$

Отже, маємо у загальному вигляді задачу на власні значення – систему двох диференціальних рівнянь другого порядку, в яких права частина залежить від параметрів  $R_A$  та  $x_B$ , значення яких невідомі і повинні бути визначені з самої задачі

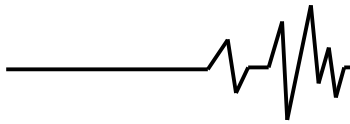
$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\frac{d^2 \omega}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = - \frac{2b(x) \cdot \sigma_m^2}{\sqrt{3E} \sqrt{b(x) \cdot \sigma_m \cdot [s(x)^2 \cdot \sigma_m \cdot b(x) - 4M_{nl}(x)]}}; \\ & \omega(0) = 0; \frac{d\omega}{dx}(0) = 0; \\ & \frac{\frac{d^2 z}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = - \frac{12 \cdot M_{np}(x)}{E \cdot s(x)^3 \cdot b(x)}; \\ & z(x_D) = \omega(x_D); \frac{dz(x_D)}{dx} = \frac{d\omega(x_D)}{dx}; \\ & z(x_B) = p(x_B); \frac{dz}{dx}(x_B) = \frac{dp}{dx}(x_B). \end{aligned} \right. \quad (28)$$

Один з методів, за допомогою якого можна розв'язати задачу (28), є метод стрільби. Даний метод рекомендується застосовувати до задачі на власні розв'язки, яка містить один параметр. Ми ж маємо справу з двома параметрами. Тому для того, щоб можна було застосовувати метод стрільби, необхідно провести оцінку інтервалів зміни параметрів. Стосовно меж варіювання параметру  $R_A$ , то  $R_A \in [0; +\infty)$ . Межі варіювання параметру  $x_B \in (m_C + t; x_{B'})$ , де  $x_{B'}$  знайдемо, апроксимувавши рівняння осі смуги прямою лінією, тобто подавши  $\omega(x) = a \cdot x + b$ . Тоді задача (28) запишеться у вигляді

$$\begin{cases} \omega(x) = a \cdot x + b; \\ \omega(x_{A'}) = m(x_{A'}); \omega'(x_{A'}) = m'(x_{A'}); \\ \omega(x_{B'}) = p(x_{B'}); \omega'(x_{B'}) = p'(x_{B'}). \end{cases} \quad (29)$$

Маємо систему 4-х нелінійних рівнянь із 4-ма невідомими:  $x_{A'}$ ,  $x_{B'}$ ,  $a$ ,  $b$ , яку розв'язуємо відомими методами, наприклад, методом Ньютона.

Алгоритм застосування методу стрільби для розв'язування задачі (28) такий. Спочатку ми знаходимо інтервал зміни параметра  $x_B$ , розв'язавши (29). Потім отримані інтервали зміни  $R_A$  та  $x_B$  ділимо на  $N$  проміжків. Знаходимо крок зміни параметрів  $h_R$  та  $h_B$ . У циклі змінюємо параметр  $R_A$  з кроком  $h_R$ . У вкладеному циклі змінюємо параметр  $x_B$  від  $m_C + t$  до  $x_{B'}$  із кроком  $h_B$ . На кожній ітерації знаходимо рівняння осі смуги на ділянці  $AD$ , розв'язавши задачу Коші відомими методами, наприклад, методом Рунге-Кутта,



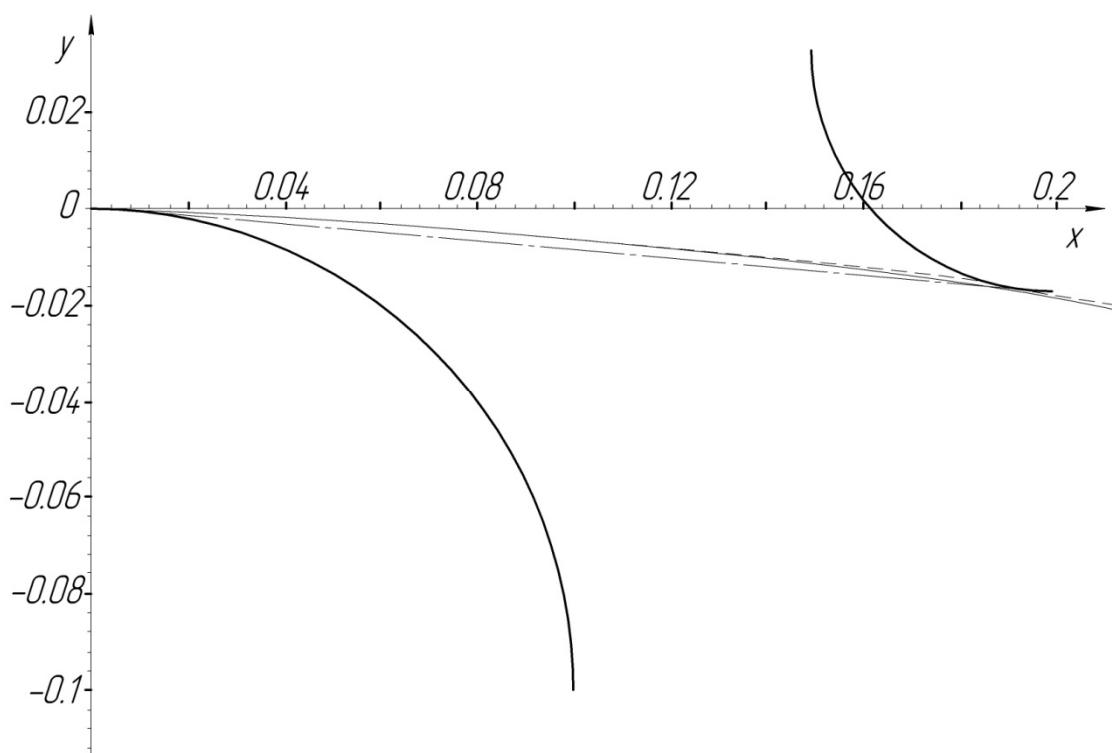
$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\frac{d^2 \omega}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} &= - \frac{2b(x) \cdot \sigma_m^2}{\sqrt{3E} \sqrt{b(x) \cdot \sigma_m \cdot [s(x)^2 \cdot \sigma_m \cdot b(x) - 4M_{nl}(x)]}}; \\ \omega(0) = 0; \frac{d\omega}{dx}(0) &= 0. \end{aligned} \right. \quad (30)$$

Далі знаходимо координати точки  $D$ , розв'язавши рівняння (23) відносно  $x_D$ . Потім знаходимо рівняння осі смуги на ділянці  $DB$ , розв'язавши наступну задачу Коші:

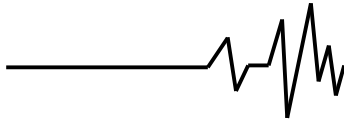
$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\frac{d^2 z}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} &= - \frac{12 \cdot M_{np}(x)}{E \cdot s(x)^3 \cdot b(x)}; \\ z(x_D) = \omega(x_D); \frac{dz(x_D)}{dx} &= \frac{d\omega(x_D)}{dx}. \end{aligned} \right. \quad (31)$$

Отримаємо  $N \times N$  розв'язків задачі Коші (31). З цих розв'язків обираємо той, який найкраще відповідає додатковим умовам (27). Якщо в результаті моделювання отримаємо  $R_A \leq R_M$ , то даному ходу пуансона  $h$  відповідає основний або заключний етапи згинання (див. рис. 1).

Запропонований алгоритм реалізований у математичному додатку Maple для випадку, коли смуга має постійні товщину та ширину, тобто  $b(x) = const$  та  $s(x) = const$ , радіуси заокруглень матриці та пуансона постійні і дорівнюють  $R_M$  та  $R_n$  відповідно. Результати розрахунку показані на рис. 5.



**Рис. 5. Розрахунок положення нейтральної поверхні під час згинання: суцільна лінія – положення при пружно-пластичних деформаціях; штрихова лінія – положення при пружних деформаціях; штрих-пунктирна лінія – апроксимація нейтральної поверхні прямою**

**Висновки**

1. Розроблено математичну модель початкової стадії процесу згинання смуги змінної ширини й товщини матрицею й пуансоном, які мають радіуси закруглень, співрозмірні з відстанню між ними. В результаті отримали задачу на власні значення – систему двох нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку, в яких права частина залежить від параметрів, значення яких невідомі і повинні бути визначені з самої задачі.

2. Запропоновано алгоритм розв'язування отриманої задачі на власні значення, що дозволяє визначити рівняння нейтральної поверхні смуги. В основу алгоритму покладений модифікований, з огляду на фізику процесу, що розглядається, метод стрільби.

3. Для задачі згинання смуги із сталою товщиною та шириною матрицею і пуансоном із сталими радіусами заокруглень алгоритм реалізований у математичному додатку Maple.

**Література**

1. Матвійчук В. А. Розробка маловідходних процесів формування тонкостінних циліндричних деталей / В. А. Матвійчук, В. М. Михалевич, В. О. Краєвський // Удосконалення процесів і обладнання обробки тиском в металургії і машинобудуванні (Донбаська державна машинобудівна академія). – Краматорськ: ДДМА. – 2004. – С. 281-286.

2. Попов Е. А. Основы теории листовой штамповки / Е. А. Попов. – М.: Машиностроение, 1977. – 278 с.

3. Зубцов М. Е. Листовая штамповка / М. Е. Зубцов. – Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1980. – 432 с.

4. Писаренко Г. С. Сопротивление материалов / Г. С. Писаренко. – К.: Вища школа, 1986. – 775 с.