Гель П. В.

Вінницький національний аграрний університет

Бурдейна О. В.

Бурдейний В. М.

Вінницький національний технічний університет

УДК 534.12+517.927.2

ПОЄДНАННЯ МЕТОДУ ФУНКЦІЙ ГРІНА З ТЕХНІКОЮ КОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ВІБРАЦІЙНОГО СПЕКТРУ ДВОМІРНИХ СИСТЕМ

Общеизвестна эффективность применения метода функций Грина к решению задачи на собственные значения, имеющей отношение к колебательным системам с различной, в том числе двумерной, геометрией. В последнем случае при сложной форме граничного контура достаточно продуктивным может оказаться конформное отображение двумерной области и приведение её к одной из канонических. В связи с этим возникает необходимость сочетания двух подходов, попытка чего предложена в данной работе.

It is well-known fact that Green function's method represents one of the most powerful means to treat the eugen-values problem related to the vibrational system with various geometries including bidimensional one. Concerning the last case conformal mapping approach can be promising enough because it allows to reduce some complicated boundary contour to one of the canonical forms. However, the conformal mapping makes its impact over corresponding wave equation. That is why we try to conjugate the Green function's method with the conformal transformations technique in this work.

Вступ. Постановка задачі.

Загальновідомо, що мембрани, діафрагми, напружені плівки, оболонки – досить типові конструкційні елементи механізмів, сенсорів, приладів і інших компонентів технічних систем. Останнім часом до цього класу двомірних чи квазідвомірних об'єктів долучилися такі активні учасники технологічного процесу як молекулярні сита, біологічні мембрани, елементи електронних приладів, виготовлених за плівковими ,в тому числі і нанометричними, технологіями. Важливо, що, окрім специфічних функціональних характеристик, їх практичні застосування не в останню чергу спряжені зі спектром власних коливань.

Вібраційний спектр випливає з розв'язку краєвої задачі, яка в добре відомий спосіб [1], може бути поставлена як варіаційна проблема для функціоналу дії [2]. Власні значення одержаного рівняння Гельмгольца досить чутливі до граничних умов, тобто до форми контуру Γ, який обмежує двомірну область D_w асоційовану з коливальною системою і заданою в площині w. Слід підкреслити, що область D_w, як правило, в силу функціонального призначення системи чи технології виготовлення, або природних обставин, як у випадку біологічних мембран, відрізняється від канонічних форм. А тому, при видимій постановочній простоті, задача на власні значення суттєво ускладнюється тим, що розділення змінних на граничному контурі області відмінної від канонічної стає проблематичних, а то і неможливим. Оскільки хвильове рівняння не містить жодного вкладу, який би був пов'язаним із геометрією системи, неможливим є також застосування методів теорії збурень.

В контексті вищесказаного досить перспективним може виявитися застосування конформних відображень, що було запропоноване авторами роботи[3]при дослідженні класичних і квантових більярдів, а авторами роботи [4] – до однієї моделі вібраційної системи. Основна ідея методу зводиться до того, що при дуже слабих обмеженнях на форму контуру, існує аналітична функція. яка конформно відображає канонічний контур в даний [5]. Конформне перетворення забезпечує розділення змінних на граничному контурі, але модифікує інтеграл дії і все, що в тій чи іншій мірі з ним пов'язане.

Одним з найінформативніших методів дослідження хвильових рівнянь різного фізичного походження є метод резольвентних функцій Гріна. Дійсно, функції Гріна задані в енергетичному представлені своїми полюсами визначають спектр власних значень, тобто власні частоти. Уявна частина цих власних значень, якщо вона не дорівнює нулю, визначає час релаксації системи. Слід уявної частини функції Гріна дозволяє обчислити густину стані. Для функції Гріна розроблені ефективні методи теорії збурень і часткового сумування відповідних рядів. Важливим є і те, що функція Гріна лінійної задачі служить базою для дослідження нелінійних проблем. В силу всього сказаного в даній роботі з перших принципів одержується хвильове рівняння модифіковане в результаті конформного відображення, досліджується відповідна йому функція Гріна, для якої будується ряд теорії збурень Дана робота є спробую адаптувати застосування функцій Гріна до методики конформних перетворень.

Модифіковане хвильове рівняння.

Ми розглядаємо ізотропну систему, для якої функціонал дії, записаний в континуальному наближенні зводиться до наступного вигляду[1,2]

$$S=\int_D \rho\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varsigma}{\partial t}\right)^2-\frac{c^2}{2}\left(\vec{\nabla}\varsigma\right)^2\right]d^2w dt \qquad (2.1)$$

тут ς – зміщення точки з координатами (u,v) ,інтегрування виконується по часу і області D_w, c – швидкість поширення хвиль. Маючи на увазі проблему частотного спектру, доцільно подати зміщення у вигляді відповідних Фур'є-компонент, визначених співвідношенням:

$$\varsigma(w,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varsigma(w,\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad (2.2)$$

Оскільки зміщення повинні бути дійсними величинами, то для їх Фур'є компонент має місце тотожність

$$\varsigma(w,-\omega)=\varsigma^*(w,\omega),$$

яку легко довести, звернувшись до оберненого перетворення Фур'є.

Комбінуючи (2.1) і (2.2) ,одержуємо:

$$S=\frac{\rho}{2}\int_{D_w}\left[\omega^2\left|\varsigma(w,\omega)\right|^2-c^2\left|\vec{\nabla}\varsigma(w,\omega)\right|^2\right]d^2w d\omega \qquad (2.3)$$

Нехай конформне відображення канонічної області D_z заданої в комплексній площині Z у дану область D_w здійснюється аналітичною функцією $w(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. Позначимо як $\Theta(z)\equiv\Theta(x,y)$ якобіан переходу від змінних (u,v) до змінних (x,y) .Таким чином, маємо:

$$d^2w=\Theta(z)d^2z \qquad (2.4)$$

Стосовно якобіану переходу, то оскільки в силу конформності відображення частинні похідні задовольняють умовам Коші-Рімана [5], для $\Theta(z)$ одержуємо:

$$\Theta(z)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \qquad (2.5)$$

Градієнтна складова Лагранжіану в (2.3)може бути записана в наступній формі:

$$\left|\vec{\nabla}\varsigma(w,\omega)\right|^2=\left|\frac{\partial\varsigma(w,\omega)}{\partial u}\right|^2+\left|\frac{\partial\varsigma(w,\omega)}{\partial v}\right|^2 \qquad (2.6)$$

Після переходу в (2.6) до змінних (x,y) та ще раз прийнявши до уваги умови Коші-Рімана, переконуємося, що доданки, який містить добутки похідних $\frac{\partial\varsigma^*}{\partial x}\frac{\partial\varsigma}{\partial y}$ перетворюються в нуль, що дає остаточний результат:

$$\left|\vec{\nabla}\varsigma(w,\omega)\right|^2=\Theta^{-1}(z)\left\{\left|\frac{\partial\varsigma(z,\omega)}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial\varsigma(z,\omega)}{\partial y}\right|^2\right\}\equiv\Theta^{-1}(z)\left|\vec{\nabla}_z\varsigma(z,\omega)\right|^2 \qquad (2.7)$$

Співвідношення (2.4) і (2.7) дозволяють записати інтеграл дії з модифікованим Лагранжіаном, а саме

$$S=\frac{\rho}{2}\int_{D_z}\left[\omega^2\Theta(z)\left|\varsigma(w,\omega)\right|^2-c^2\left|\vec{\nabla}_z\varsigma(z,\omega)\right|^2\right]d^2z d\omega \qquad (2.8)$$

Легко бачити, що градієнтна частина Лагранжіану залишається інваріантною щодо конформного перетворення, в той час як кінетичний терм змінюється, причому цю зміну можна тлумачити як наслідок деформацій розтягу чи стиску елементу площі при перетворенні координат і відповідним їм змінам густини.

Рівняння руху, асоційоване з дією (2.8) одержується на основі добре відомого варіаційного принципу[1]:надавши зміщенню довільної варіації $\delta\varsigma$ і прирівнявши до нуля першу варіацію дії, після застосування до градієнтного терму теореми Гріна[6],приходимо до хвильового рівняння:

$$\nabla_z^2\varsigma + \Theta(w,z)k^2\varsigma = 0 \tag{2.9}$$

в якому $k^2 = \omega^2/c^2$ є хвильовим числом. Формально (2.9) можна розглядати як рівняння Гельмгольца зі змінним за рахунок конформного перетворення хвильовим числом

Зауважимо, що стандартні краєві умови Діріхле чи Неймана забезпечують рівність нулю поза інтегрального терму у першій варіації інтеграла дії.

Функція Гріна.

Функцію Гріна $G(z,z')$ краєвої задачі визначимо в стандартний спосіб, а саме як розв'язок рівняння:

$$\left[\nabla_z^2 + k^2\Theta(w,z)\right]G(z,z') = \delta(z-z') \tag{3.1}$$

з граничною умовою Діріхле, тобто

$$G(z,z')\big|_{z\in\Gamma} = G(z,z')\big|_{z'\in\Gamma} = 0 \tag{3.2}$$

Можна переконатися, що, як це і має бути, рівняння (3.1) інваріантне щодо конформного відображення області D_z. Дійсно, виконавши перехід

$$z = z(\tau)$$

від змінної z до змінної τ ,слід записати перетворення оператора Белтрамі-Лапласа і дельта-функції. В силу конформності відображення модифікований оператора Белтрамі-Лапласа зводиться до співвідношення:

$$\nabla_z^2 = \Theta^{-1}(z,\tau)\nabla_\tau^2 \tag{3.3}$$

Щодо дельта-функції Дірака, то на основі відомих властивостей [2] для неї одержуємо

$$\delta(z-z') = \Theta^{-1}(z,\tau)\delta(\tau-\tau') \tag{3.4}$$

Підстановкою (3.3),(3.4) в (3.1),та прийнявши до уваги відому тотожність[1],а саме $\Theta(w,z)\Theta(z,\tau) = \Theta(w,\tau)$, підтверджуємо раніше зроблений висновок. щодо інваріантності рівняння для функції Гріна $G(z,z')$.

Розв'язок рівняння (3.1) з умовами (3.2) вдається отримати в дуже обмеженій кількості випадків. Тому є очевидною необхідність звернутися до наближених методів. В зв'язку з цим стає очевидною проблема побудови грініана нульового наближення $G^0(z,z')$. З цією метою природно звернутися до розв'язків $\varsigma_n(z)$ рівняння Гельмгольца

$$\nabla_z^2\varsigma_n(z) + k_n^2\varsigma_n(z) = 0 \tag{3.5}$$

для канонічної області з умовами Діріхле на відповідному граничному контуру, Природнім є вибір, який відповідає рівнянню Гельмгольца для канонічної області. Зауважимо, що $\varsigma_n(z)$ утворюють повну систему ортогональних нормальних мод. Це дозволяє подати функцію Гріна $G(z,z')$ у вигляді розкладу по нормальних модах розв'язках рівняння (3.5), тобто записати

$$G(z,z') = \sum_{n,m}\varsigma_n^*(z)G_{nm}\varsigma_m(z') \tag{3.6}$$

Підстановка (3.6) в (3.1) з врахуванням рівняння (3.5) та ортонормованості його розв'язків дає:

$$k^2\sum_p \Theta_{np}G_{pm} - k_n^2 G_{nm} = \delta_{nm} \tag{3.7}$$

де оператор $\widehat{\Theta}$ визначений своїми матричними елементами співвідношенням:

$$\Theta_{sp} = \int \varsigma_s(z)\Theta(w,z)\varsigma_p^*(z)d^2z \tag{3.8}$$

Для вибору гріниану нульового наближення виділимо в першому доданку (3.7) діагональний елементу, що приводить (3.7) до наступного вигляду:

$$\left(k^2\Theta_{nn} - k_n^2\right)G_{nm} + k^2\sum_p \Theta'_{np}G_{pm} = \delta_{nm} \tag{3.9}$$

в якому штрих позначає відсутність діагонального елементу.

Введемо перенормовану функцію Гріна нульового наближення $G^0(z,z')$ її матричними елементами

$$G_{nm}^0 = \delta_{nm}\left(k^2\Theta_{nn} - k_n^2\right)^{-1} \tag{3.10}$$

З означенням (3.10) рівняння (3.9) приводиться до відомої форми рівняння Дайсона [7]

$$G = G^0 - k^2 G^0\widehat{\Theta}'G \tag{3.11}$$

Застосування ітераційного методу дозволяє записати формальний розв'язок рівняння (3.11) у вигляді ряду

$$G = G^0 - k^2 G^0 \widehat{\Theta}' G^0 + k^4 G^0 \widehat{\Theta}' G^0 \widehat{\Theta}' G^0 - \dots \quad (3.12)$$

який має цілком очевидну пертурбативну структуру, що допускає впровадження теорії збурень.

Власна енергетична частина.

Один з найбільш вживаних контрольованих методів розв'язання рівняння (3.11) полягає у використанні оператора Дайсона [7,8],який традиційно позначається як $\widehat{\Sigma}$, визначається співвідношенням:

$$G = G^0 + k^2 G^0 \widehat{\Sigma} G^0 \quad (4.1)$$

і називається власною енергетичною частиною. Тепер рівняння для функції Гріна заміняється рівнянням для оператора власної енергії, яке випливає зі співвідношень (3.11) і (4.1). Дійсно, комбінуючи ці рівняння, матимемо

$$\widehat{\Sigma} = -\widehat{\Theta}' - k^2 \widehat{\Theta}' G^0 \Sigma \quad (4.2)$$

Рівняння (4.2) нічим не легше, ніж (3.11). Проте, як видно зі структури рівняння (4.2), стає можливим отримати оператор власно-енергетичної частини у вигляді ряду по степенях $-k^2\widehat{\Theta}'$, контролюючи кожен порядок теорії збурень.

Ітераційний підхід аналогічний тому, який подано співвідношенням (3.12), приводить до того, що нульова функція Гріна $G^0(z,z')$ «одягається» до повної функції Гріна $G(z,z')$, що дає

$$\widehat{\Sigma} = -\widehat{\Theta}' - k^2 \widehat{\Theta}' \widehat{G} \widehat{\Theta}' \quad (4.3)$$

Поки що маємо точні результати. Не викликає сумнівів необхідність певних наближень. Як відомо [7,8], в околі власних частот функція Гріна має полюсний характер. Тому для неї використовуємо апроксимацію

$$G_{sp} \approx \delta_{sp} \left[\left(\tilde{G}^0 \right)^{-1}_{ss} - k^2 \Sigma_{ss} \right]^{-1} \quad (4.4)$$

Приймемо до уваги те, що в операторі $\widehat{\Theta}'$ за його означенням відсутні діагональні елементи. Тоді з врахуванням представлення (4.3) приходимо до самоузгодженого рівняння для діагональних елементів власної енергетичної частини, а саме:

$$\Sigma_{ss} = -k^2 \sum_{n \neq s} \frac{\left|\Theta_{sn}\right|^2}{k^2 \Theta_{nn} - k_n^2 - k^2 \Sigma_{nn}} \quad (4.5)$$

Рівняння (4.5) допускає наближені розв'язки у граничних випадках малих і високих частот.

Розв'язавши (4.5) можна встановити спектр власних частот. Для цього досить поєднати рівняння (3.10) і (4.4). Це дає

$$\omega_n = c k_n \left(\sqrt{\Theta_{nn} - \Sigma_{nn}} \right)^{-1} \quad (4.6)$$

Висновки

Показано, що застосування варіаційного принципу до інтеграла дії з густиною Лагранжіана перетвореною внаслідок конформного відображення приводить до такої ж форми хвильового рівняння, як і при прямому перетворенні оператора Белтрамі-Лапласа. Встановлено, що рівняння для резольвентної функції Гріна залишається інваріантним щодо конформного відображення. Подано самоузгоджене рівняння для власної енергетичної частини, в термінах якої визначено власні частоти коливальної системи. Стосовно вибору конформного перетворення, то аналіз із використанням відомої формули Вейля для спектральної густини станів, показує, що оптимальним може бути перетворення, яке приводить до канонічної області близької до даної.

Література

1. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики, ИЛ, т 1,1958, 942с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц М.Е., Механика сплошных сред. ГИТТЛ, 1954,стр. 796.
3. Prosen T., Robnik M. Survey of the eigenfunctions of a billiard system between integrability and chaos, Journal of Physics A: Mathematical and General. 1993. Т. 26. № 20. С. 5365-5373.
4. Бурдейна О.В., Гель П.В., Бурдейний В.М., Модифікація вібраційного спектру мембрани з нерегулярним хаотичним контуром, Вібрації в техніці і технологіях,2011, 61, стр. 9-14.
5. Лаврентьєв М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексной переменной, «Наука», 1987, 688 с.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, Наука. 1977, 680 с.
7. Садовский М.В., Диаграмматика, Свердловск, 2005, стр. 282.
8. Baker M., Sutlief S., Green's Functions in Physics, Pub. Washington's University, 2003 p. 332.