



Ольшанский В. П.

Харьковский  
национальный  
технический  
университет  
сельского хозяйства  
им. Петра Василенко

Ольшанский С. В.

Национальный  
технический  
университет  
«Харьковский  
политехнический  
институт»

УДК 539.3:534.1

## РАСЧЕТ БАЛКИ НА УДАР МЕТОДОМ СЕН-ВЕНАНА

Визначено прогини затисненої по торцях балки при непружному, центральному, поперечному ударі падаючим тілом. Показано, що при належному розрахунку коефіцієнта зведення маси балки до системи з одним ступенем свободи, обчислені за теоріям Кокса і Сен-Венана коефіцієнти динамічності по прогину мають близькі значення.

The deflections of a clamped ends of the beams in inelastic, a central, transverse hit falling body were determined. It is shown that with proper calculation of the coefficient of the reduced mass of the beam to a system with one degree of freedom, calculated by Koks and Saint-Venant theories dynamic coefficients of troughs have similar values.

**Постановка проблемы.** В соударяющихся телах кратковременно возникают повышенные напряжения, что может вызвать их разрушение, особенно при использовании хрупких материалов. Обычно расчет этих напряжений проводят по коэффициенту динамичности, который находят для перемещений. Поэтому определение коэффициента динамичности для прогибов балки, подвергнутой удару, представляет научно-прикладной интерес.

**Обзор последних исследований и публикаций.** В современной учебной и справочной литературе по сопротивлению материалов [1,2,3,4] традиционно излагают энергетический способ расчет балки на удар без учета распределения массы и силы инерции по ее длине. Учсть это распределение позволяют теории упругого удара С.П. Тимошенко [5,6] и неупругого удара Сен-Венана [7,8]. Вторая позволяет рассматривать процесс удара без определения контактных деформаций в области взаимодействия соударяющихся тел, т.е. не требует задания формы ударяющего тела. При расчете неупругого удара также не нужно численно решать сложное интегральное уравнение, связанное с пошаговым определением контактных усилий. Поэтому ей отдано предпочтение в данной публикации.

**Целью работы** является сравнение коэффициентов динамичности по прогибам балки, подвергнутой удару, при вычислении их по теориям Кокса и Сен-Венана.

**Основная часть работы.** Используя уравнение динамического прогиба балки

$$\frac{d^4 G}{dx^4} + \beta^2 p^2 G = \delta(x - x_1), \quad (1)$$

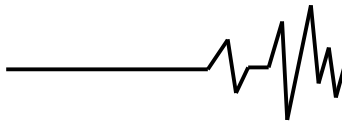
записанное в пространстве изображений по Карсону, определим изображение функции влияния  $G = G(x, x_1, p^2)$ .

$$\text{В [1]} \quad \beta^2 = \frac{\rho E}{EJ}; \quad \rho F - \text{погонная масса}$$

балки;  $EJ$  – ее изгибная жесткость;  $x$  – координата, обсчитываемая вправо от левого края балки;  $x_1$  – сечение удара;  $p$  – параметр интегрального преобразования Карсона;  $\delta(x - x_1)$  – функция Дирака.

Уравнение (1) решаем для защемленных торцов балки  $x = 0$  и  $x = l$ , где

$$G(0, x_1, p^2) = G(l, x_1, p^2) = 0; \\ \frac{d}{dx} G(x, x_1, p^2) \Big|_{x=0} = \frac{d}{dx} G(x, x_1, p^2) \Big|_{x=l} = 0. \quad (2)$$



Ограничиваясь рассмотрением наиболее опасного (центрального) удара, далее положим  $x_1 = 0,5l$  и определим  $G(x, l/2, p^2)$ .

Решение уравнения (1) ищем в виде

$$G(x, l/2, p^2) = A(\operatorname{sh}rx - \sin rx) + B(\operatorname{ch}rx - \cos rx), \quad (3)$$

где  $r = \sqrt{\beta\omega}$ ;  $p = i\omega$ ;  $i = \sqrt{-1}$ ;  $A, B$  – произвольные постоянные.

$$A(\operatorname{ch}\zeta - \cos\zeta) + B(\operatorname{sh}\zeta + \sin\zeta) = 0; \quad (4)$$

$$A(\operatorname{ch}\zeta + \cos\zeta) + B(\operatorname{sh}\zeta - \sin\zeta) = -\frac{1}{2r^3 EJ}.$$

В ней  $\zeta = 0,5rl$ .

Из системы (4) находим постоянные  $A$  и  $B$ :

$$A = -\frac{l^3}{32EJ\zeta^3} \frac{\operatorname{sh}\zeta + \sin\zeta}{\operatorname{ch}\zeta \sin\zeta + \operatorname{sh}\zeta \cos\zeta};$$

$$B = \frac{l^3}{32EJ\zeta^3} \frac{\operatorname{sh}\zeta - \cos\zeta}{\operatorname{ch}\zeta \sin\zeta + \operatorname{sh}\zeta \cos\zeta}. \quad (5)$$

Учитывая (3) и (5), получаем изображение функции влияния в сечении удара:

$$G\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, p^2\right) = \frac{l^3}{16EJ\zeta^3} \frac{1 - \operatorname{ch}\zeta \cos\zeta}{\operatorname{ch}\zeta \sin\zeta + \operatorname{sh}\zeta \cos\zeta}. \quad (6)$$

В пределе, когда  $p \rightarrow 0$ , имеем:

$$G\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, 0\right) = \frac{l^3}{16EJ} \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1 - \operatorname{ch}\zeta \cos\zeta}{\zeta^3 (\operatorname{ch}\zeta \sin\zeta + \operatorname{sh}\zeta \cos\zeta)} = \frac{l^3}{192EJ}. \quad (7)$$

Согласно теории Сен-Венана изображение прогиба балки, подвергнутой удару, определяется выражением [6,8]:

$$Y\left(x, \frac{l}{2}, p^2\right) = M \left[ g - p^2 Y\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, p^2\right) + \nu p \right] \times G\left(x, \frac{l}{2}, p^2\right), \quad (8)$$

где  $M, \nu$  – масса и скорость ударяющего тела;  $g$  – ускорение свободного падения.

Положив в (8)  $x = l/2$ , находим:

$$Y\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, p^2\right) = \frac{M(g + \nu p)G\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, p^2\right)}{1 + Mp^2G\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, p^2\right)}. \quad (9)$$

Переход от изображения (9) в пространство оригиналов проводим с помощью второй теоремы разложения. Согласно этой теореме:

$$y\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, t\right) = MgG\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, 0\right) + M \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(g + \nu p_k)G\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, p_k^2\right)e^{p_k t}}{\frac{d}{dp} \left[ p + Mp^3G\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, p^2\right) \right]_{p=p_k}}. \quad (10)$$

Здесь  $p_k$  – корни уравнения:

$$1 + Mp^2G\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, p^2\right) = 0. \quad (11)$$

Учитывая (7) и (11), упрощаем выражение (10). Получаем разложение:

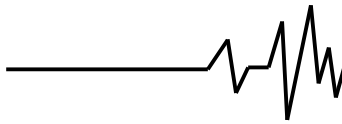
$$y\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, t\right) = \frac{Mgl^3}{192EJ} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(g + \nu p_k)e^{p_k t}}{p_k^2 \left[ Mp^3 \frac{d}{dp} G\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, p^2\right) - 2 \right]_{p=p_k}}. \quad (12)$$

При вычислении производной по  $p$  учтем, что  $\frac{d}{dp} = -i \frac{\zeta}{2\omega} \frac{d}{d\zeta}$ . Тогда, дифференцируя (6), находим:

$$Mp^3 \frac{d}{dp} G\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, p^2\right) = -\frac{\chi}{2} \left\{ \zeta^2 \left[ 1 - 2 \frac{\operatorname{sh}\zeta \cos\zeta + (\chi\zeta)^{-1}}{\operatorname{ch}\zeta \sin\zeta + \operatorname{sh}\zeta \cos\zeta} \right] + \frac{2}{\chi^2} - \frac{3}{\chi} \right\}. \quad (13)$$

Здесь  $\chi = MM_0^{-1}$ ;  $M_0 = \rho Fl$  – масса балки.

Корни уравнения (11) чисто мнимые и оно, согласно (6), преобразуется в



$$\frac{1 - ch\zeta \cos \zeta}{ch\zeta \sin \zeta + sh\zeta \cos \zeta} = \frac{1}{\zeta \chi}. \quad (14)$$

Учитывая это обстоятельство, а также выражение (13), формулу (12) сводим к виду:

$$y\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, t\right) = y_{CT} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g \cos(\omega_k t) - \nu \omega_k \sin(\omega_k t)}{\omega_k^2 \left[1 + \frac{\chi}{4} S(\zeta_k)\right]}. \quad (15)$$

При этом

$$S(\zeta_k) = \zeta_k^2 \left[1 - 2 \cdot \frac{sh\zeta_k \cos \zeta_k + (\chi \zeta_k)^{-1}}{ch\zeta_k \sin \zeta_k + sh\zeta_k \cos \zeta_k}\right] + \frac{2}{\chi^2} - \frac{3}{\chi};$$

статический прогиб середины балки от действия веса ударяющегося тела;  $\omega_k = 4\zeta_k^2 (\beta l^2)^{-1}$  – частоты свободных колебаний балки с сосредоточенной в ее центре массой  $M$ ;  $\zeta_k$  – положительные корни уравнения (14).

Чтобы упростить вычисление этих корней, положим:

$$\zeta_k = a_k + \varepsilon_k, \quad a_k = (2k-1) \frac{\pi}{2}, \quad k=1,2,3,\dots$$

Тогда, для вычисления  $\varepsilon_k$  из (14) получаем итерационную формулу

$$\varepsilon_k^{(n+1)} = \text{arctg} \frac{(\chi \zeta_k^{(n)})^{-1} - (\sin a_k \cos \varepsilon_k^{(n)} ch \zeta_k^{(n)})^{-1}}{1 + (\chi \zeta_k^{(n)})^{-1} th \zeta_k^{(n)}}, \quad (16)$$

в которой  $\zeta_k^{(n)} = a_k + \varepsilon_k^{(n)}$ ,  $n=0,1,2,3,\dots$  – номер итерации;  $k$  – номер корня.

Начальным приближением можно брать  $\varepsilon_k^{(0)} = 0$ .

Формула (16) позволяет вычислить на компьютере достаточное число корней  $\zeta_k$ , чтобы по (15) с высокой точностью определять динамический прогиб балки в сечении удара.

Как отмечалось выше, для вычисления максимальных динамических прогибов

$$y_g = \max y\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, t\right)$$

в литературе по сопротивлению материалов традиционно рекомендуют формулу Кокса [5]

$$y_g = y_{CT} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\nu^2}{g y_{CT} (1 + K_0 \chi^{-1})}}\right). \quad (17)$$

Здесь  $K_0$  – коэффициент приведения массы балки к системе с одной степенью свободы. Для балки с защемленными краями этот коэффициент принимает значение  $K_0 = 192 \cdot (4,730^{-4}) \approx 0,384$ .

Элементарный расчет по формуле (17) не связан с вычислением корней трансцендентного уравнения (14). При этом коэффициент динамичности по прогибам балки равен

$$K_g = y_g y_{CT}^{-1} = 1 + \sqrt{1 + \frac{\nu^2}{g y_{CT} (1 + K_0 \chi^{-1})}}. \quad (18)$$

Используя теории Кокса и Сен-Венана, сравним значения  $K_g$ , к которым они приводят.

В таблице 1 записаны значения корней  $\zeta_k$ , которые найдены по формуле (16) для разных  $\chi$ .

Следуя [8], проведен расчет удара тела массой  $M = 1,78$  кг, когда оно падает с высоты  $H = 0,16; 0,32; 0,48$  м на стальную балку квадратного поперечного сечения  $0,0254 \times 0,0254$  м, длиной  $l = 0,8$  м. Скорость удара связана с высотой падения зависимостью  $\nu = \sqrt{2gH}$ . Полученные графики изменения прогибов балки во времени показаны на рис. 1. Ряд (15) суммировали на компьютере до  $k = 50$ .

**Таблица 1**  
Значения  $\zeta_k$  при разных  $\chi$

k	Значение $\zeta_k$				
	$\chi = 0,01$	$\chi = 0,1$	$\chi = 0,5$	$\chi = 1$	$\chi = 2$
1	2,350326	2,234922	1,923536	1,718881	1,499539
2	5,471498	5,294380	4,999953	4,892770	4,820633
3	8,598164	8,352696	8,049921	7,964460	7,912659
4	11,72565	11,43215	11,14657	11,07821	11,03891
5	14,85354	14,52434	14,25956	14,20285	14,17123
50	155,8814	155,5692	155,5215	155,5152	155,5120
100	312,8261	312,6195	312,5948	312,5916	312,5901

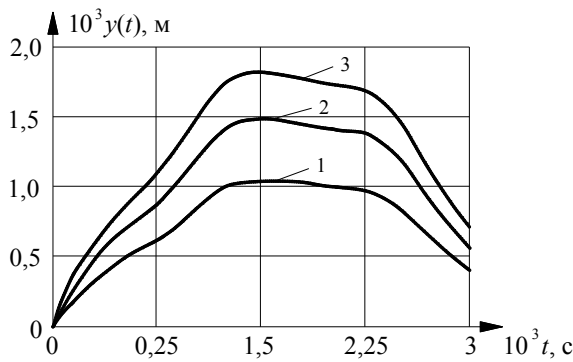
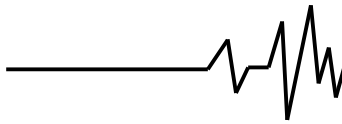


Рис. 1. Графики  $y\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, t\right)$  при разных  $H$ :  
1, 2, 3 –  $H = 0,16; 0,32; 0,48$  м

Вычисленные по формуле (17) значения  $y_g$  для указанных выше  $H$  равны соответственно  $(1,052; 1,484; 1,817) \cdot 10^{-3}$  м, т.е. близки к  $\max y(t)$  на рис. 1. Для принятых исходных данных  $\chi = 0,44$  и результаты расчетов по двум теориям хорошо согласуются.

Расчитанное в [8], по теории упругого удара стального шара массой 1,78 кг по стальной балке прежних размеров, при  $H = 0,16$  м, максимальное значение прогиба равно 0,0012 м, т.е. несколько больше, чем на рис. 1. Но время достижения  $\max y(t)$  на рис. 1 и на рис. 19.4 в [8] хорошо согласуются, т.е. теория Сен-Венана вполне удовлетворительно описывает процесс деформирования балки во времени.

О согласовании теорий Кокса и Сен-Венана при других параметрах соударяющихся тел позволяют судить числа в таблице 2 и таблице 3. В таблице 2 приведены значения коэффициента динамичности  $K_g = y_g y_{CT}^{-1}$ , вычисленные с помощью формулы (15) (числители) и по формуле (18) (знаменатели) при  $\chi = 0,44$  и разных  $v$ . Аналогичные результаты в таблице 3 соответствуют  $v = 2$  м/с и разным  $\chi$ .

Таблица 2  
Коэффициенты динамичности при разных  $v$

$v$ , м/с	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$K_g$	47,5	94,4	141,2	188,1	234,9	281,8
	47,2	93,3	139,4	185,6	231,7	277,8

Таблица 3  
Коэффициенты динамичности при разных  $\chi$

$\chi$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$K_g$	265,7	259,1	178,5	144,9	115,3	108,7
	255,3	241,8	179,2	143,4	109,5	92,1

Расчеты показывают, что по коэффициенту динамичности для прогибов, который используют и для определения динамических напряжений, теории Сен-Венана и Кокса приводят к близким результатам в широком диапазоне параметров соударяющихся тел.

Полученные расчетные формулы не сложно обобщить на случай, когда удар происходит не по балке непосредственно, а по сосредоточенной в сечении удара массе  $M_*$ . Вместо (9) имеем

$$Y\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, p^2\right) = \frac{M(g + v p)G\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, p^2\right)}{1 + (M + M_*)p^2 G\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, p^2\right)}$$

Из него методами операционного исчисления, аналогично изложенному, получаем:

$$y\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, t\right) = y_* + y_{CT} - \frac{\beta}{\chi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g \cos(\omega_k t) - v \omega_k \sin(\omega_k t)}{\omega_k^2 \left[1 + \frac{\chi}{4} S(\zeta_k)\right]} \quad (19)$$

Здесь  $y_* = M_* g l^3 (192 E J)^{-1}$  – статический прогиб балки от действия веса сосредоточенной материальной точки;  $\chi = \alpha + \beta$ ;  $M_* = \alpha M_0$ ;  $M = \beta M_0$ .

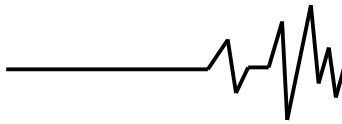
Остальные выражения сохраняются. При  $\alpha = 0$  решение (19) переходит в (15).

При наличии сосредоточенной массы в сечении удара меняется и формула Кокса (17). Она принимает вид:

$$y_g = y_* + y_{CT} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g} \frac{\beta}{y_{CT}(K_0 + \alpha + \beta)}}\right] \quad (20)$$

Таким образом, выражения (19) и (20) обобщают формулы (15) и (17).

Исследуя влияние сосредоточенной массы на процесс удара, сохранили прежние



исходные данные, заменив в них  $\chi$  на  $\beta = 0,44$  и положив  $H = 0,48$  м. Вычисленные по формуле (19) прогибы балки для трех значений  $\alpha$  представлены графически на рис. 2. Формула (20) при  $\alpha = 0,5; 1; 2$  дает соответственно:  $y_g = (1,180; 1,014; 0,834) \cdot 10^{-3}$  м, что незначительно отличается от  $\max y(t)$  на рис. 2.

Сопоставление графиков на рис. 1 и рис. 2, убеждает, что наличие сосредоточенной массы в сечении удара уменьшает динамические прогибы балки при неупругом ударе.

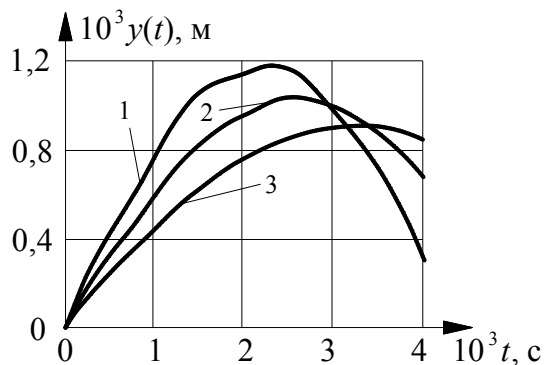


Рис. 2. Графики  $y\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, t\right)$  при разных  $\alpha$  :  
1, 2, 3 –  $\alpha = 0,5; 1; 2$  м

**Выводы.** По максимальным динамическим прогибам, теории Кокса и Сен-Венана хорошо согласуются в широком диапазоне параметров соударяющихся тел. Поэтому в инженерных расчетах вычисление  $y_g$  и  $K_g$  вполне допустимо проводить по формуле Кокса, задав в ней надлежащее значение коэффициента приведения массы балки к сечению удара.

#### Литература

1. Писаренко Г.С. Опір матеріалів / Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський. – К.: Вища школа, 2004. – 655 с.
2. Писаренко Г.С. Справочник по сопротивлению материалов / Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев. – К.: Наукова думка, 1988. – 736 с.
3. Корнілов О.А. Опір матеріалів / О.А. Корнілов. – К.: Погос, 2003. – 552 с.
4. Шкельов Л.Т. Опір матеріалів / Л.Т. Шкельов, А.М. Станкевич, Д.В. По-шивач. – К.: ЗАТ «Віпол», 2011. – 456 с.
5. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко. – М.: Физматгиз, 1959. – 439 с.
6. Филиппов А.П. Колебания механических систем / А.П. Филиппов. – К.: Наукова думка, 1965. – 716 с.
7. Кильчевский Н.А. Теория соударений твердых тел / Н.А. Кильчевский. – К.: Наукова думка, 1969. – 248 с.
8. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем / А.П. Филиппов. – К.: Машиностроение, 1970. – 734 с.