Остапенко В.А.

Днепропетровский национальный университет

УДК 534.0

ГЛАВНЫЙ РЕЗОНАНС ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВРАЩЕНИЯХ ВАЛКОВ ВИБРАЦИОННЫХ КЛАССИФИКАТОРОВ

Розглянуто проблему одержання періодичних режимів обертання валків вібраційних класифікаторів при головному резонансі. Рівняння обертання валків є система, яка близька до систем Ляпунова. Одержаний асимптотичний розклад цих періодичних розв'язків у випадку, який розглядається.

We are considering a problem of obtaining of steady periodic solutions of the equation of rotation of rollers of vibrating qualifiers. The equations of roller's rotation represent the system close to systems of Lyapunov. In present paper it is constructed an asymptotic expansion of such periodic solution at the main resonance.

Введение. Валковые классификаторы в последние годы находят все большее применение в горной, металлургической и строительной промышленности, так как они обеспечивают высокую эффективность классификации материалов [3-4]. В этой конструкции жесткая рама классификатора приводится в колебательное движение с помощью дебалансных вибраторов.

Вдоль рамы на равных расстояниях расположены жестко связанные с ней оси валков. Валки свободно посажены на оси. Под действием вибраторов рама и вместе с ней и оси валков совершают движение по эллиптической или, в частности, по круговой траектории в вертикальной плоскости [1-3]. При этом под действием сил инерции в движение приводятся также валки, перекатываясь по осям. В [1-3] показано, что перекатывание валков по осям происходит с углом запаздывания α по отношению к углу поворота рамы классификатора ψ (см. рис. 1). С точки зрения качественной работы классификатора важно получить условия периодического, синхронного и синфазного вращения валков. Кроме того, необходимо обеспечить устойчивость этих режимов. Проблема построения устойчивого периодического решения уравнения вращения валков при главном резонансе рассматривается в настоящей статье. Решения в нерезонансном случае и при простом резонансе получены ранее [8, 11].

Постановка проблемы. В работах [1-3] получено уравнение для угла запаздывания вращения валков относительно угла поворота дебалансов, которое имеет вид

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{R_2 m}{J_{kz}}\left[R\omega^2 \sin\alpha - - g\cos(\alpha-\psi)\right], \quad (1)$$

где α – угол запаздывания вращения ролика по отношению к углу ψ поворота оси, $\psi = \omega t$, t – время, ω – угловая скорость вращения вибраторов, R – радиус вращения центра оси, m – масса ролика, J_{kz} – момент инерции ролика относительно точки контакта его с осью

$$J_{kz} = \frac{m}{2}\left(R_2^2 + R_3^2\right) + m\ R_2^2. \quad (2)$$

Здесь R_2 и R_3 – внутренний и наружный радиусы ролика соответственно, R_1 – радиус оси.

Уравнение (1) существенно нелинейно и не может быть проинтегрировано в квадратурах.

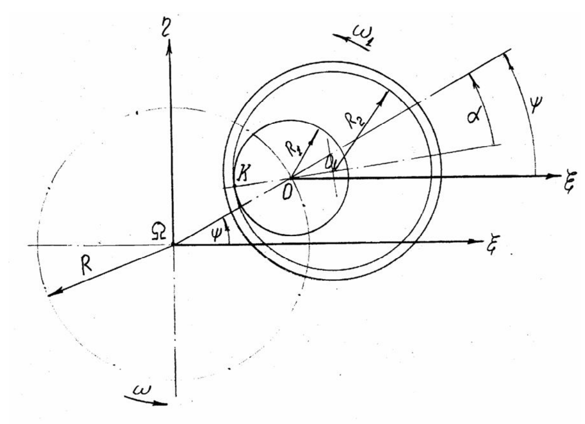

Рис. 1. Схема вращения валка

Преобразование уравнения. Обозначив

$$A = \frac{2RR_2\omega^2}{3R_2^2 + R_3^2}; \quad B = \frac{2gR_2}{3R_2^2 + R_3^2}; \qquad (3)$$

получим, что уравнение (1) примет вид

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -A\sin\alpha + Bcos(\alpha - \omega t). \qquad (4)$$

Так как $\frac{B}{A} = \frac{g}{R\omega^2}$, при достаточно больших ω *B* становится малым параметром. После обозначения $B = \varepsilon > 0$ уравнение (4) можно рассматривать как систему, близкую к системам Ляпунова. Чтобы представить уравнение (4) в канонической форме системы Ляпунова, разложим $\sin\alpha$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\alpha = 0$. Тогда уравнение (4) может быть записано в виде

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -A\alpha + f(\alpha) + \varepsilon cos(\alpha - \omega t), \qquad (5)$$

где $f(\alpha) = -A\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!}$. (6)

Для уравнения (6) мнимая часть корней характеристического уравнения [5]

$$\lambda = \sqrt{A}. \qquad (7)$$

Если в уравнении (6) выполнить преобразование искомой функции

$$y = \alpha; \quad \frac{dy}{dt} = \lambda x, \qquad (8)$$

то уравнение (5) будет преобразовано в систему

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y + \frac{1}{\lambda} f(y) + \frac{\varepsilon}{\lambda}(\cos y\cos\omega t + \sin y \sin\omega t); \quad \frac{dy}{dt} = \lambda x. \qquad (9)$$

В [7] показано, что главный резонанс в системе возникает при $\lambda = p\omega$, где *p* = 1. Система (9) является системой, близкой к системе Ляпунова. Порождающая система для системы (9)

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y + \frac{1}{\lambda} f(y); \quad \frac{dy}{dt} = \lambda x. \qquad (10)$$

является системой Ляпунова. В соответствии с методом Ляпунова [10] периодическое решение системы (10) отыскивается при начальных условиях

$$x(0) = c; \quad y(0) = 0. \qquad (11)$$

Решение системы уравнений (10) с начальными условиями (11) отыскивается в виде асимптотического разложения

$$x^{(0)}(t,\varepsilon) = \varepsilon x_1^{(0)}(t) + \varepsilon^2 x_2^{(0)}(t) + ...; \quad y^{(0)}(t,\varepsilon) = \varepsilon y_1^{(0)}(t) + \varepsilon^2 y_2^{(0)}(t) + ... \qquad (12)$$

При определенных условиях решение (12) становится периодическим с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\lambda}(1 + h_2c^2 + h_3c^3 + ...). \qquad (13)$$

Основной практический интерес представляет получение $\frac{2\pi}{\omega}$ периодического решения системы (9), так как коэффициенты в этой системе имеют этот же период. Для того чтобы решение системы (9) было $\frac{2\pi}{\omega}$ периодическим по *t*, необходимо, чтобы порождающее решение (12) также было $\frac{2\pi}{\omega}$ периодическим по *t*, а это значит, что период решения (13) должен представляться в виде

$$T = \frac{2\pi}{p\omega} \qquad (14)$$

с произвольным целым положительным *p*.

В [7] показано, что при *p* = 1 для системы (10) в случае использования асимптотического разложения решения (12) не выполняются необходимые и достаточные условия существования периодических решений. Это означает, что при *p* = 1 в системе возникает главный резонанс, поэтому возникает необходимость построения иного асимптотического разложения решения.

Асимптотическое решение при главном резонансе. В соответствии с теоремой И.Г. Малкина [5] в случае главного резонанса существует единственное $\frac{2\pi}{\omega}$ периодическое решение системы (9), представимо в виде разложения по степеням $\frac{1}{2k+1}$ малого параметра ε, где $2k$ – значение минимального индекса величин h_s в разложении периода (13). В [7] показано, что $h_2 \neq 0$, поэтому $k = 1$. А так как рассматриваемое периодическое решение стремится к тривиальному при $\varepsilon \to 0$, то, в соответствии с теоремой И.Г. Малкина, при главном резонансе необходимо отыскивать $\frac{2\pi}{\omega}$ периодическое решение системы (9) в виде

$$x^{(2)}(t,\varepsilon) = x_1^{(2)}(t)\mu + x_2^{(2)}(t)\mu^2 + x_3^{(2)}(t)\mu^3 + ...; \quad y^{(2)}(t,\varepsilon) = y_1^{(2)}(t)\mu + y_2^{(2)}(t)\mu^2 + y_3^{(2)}(t)\mu^3 + ..., \qquad (15)$$

где $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{3}}$.

Подставив форму решения (15) в систему (9) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях μ, получим следующие пары дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1^{(2)}}{dt} = -\omega y_1^{(2)}; \quad \frac{dy_1^{(2)}}{dt} = \omega\ x_1^{(2)};$$