№ 1 (57) 2010
Вібрації в техніці та технологіях

Струтинський В. Б.

Кириченко А. М.

Національний технічний університет України „Київський політехнічний інститут”

УДК 62-231:621.9.04

ІНВАРІАНТИ ПРОСТОРОВОЇ ЖОРСТКОСТІ ОБЛАДНАННЯ З ПАРАЛЕЛЬНОЮ КІНЕМАТИКОЮ

Проанализировано преобразование матрицы жесткости механизмов параллельной структуры при изменении системы координат, определены центр жесткости и центр податливости, установлены инварианты пространственной жесткости.

The coordinate transformations of PKM stiffness matrix are considered. Stiffness center, compliance center and invariants of spatial stiffness are determined.

Вступ. Поряд з формою та розмірами робочого простору, наявністю і конфігурацією особливих положень, рухливістю і точністю положення робочого органа [1], жорсткість є одною з найбільш важливих характеристик обладнання з паралельною кінематикою, яка визначає його точність, вантажну спроможність та динамічні показники.

Таким чином, показники жорсткості [2] повинні уважно аналізуватись та прийматися до уваги при розробці обладнання з паралельною кінематикою, а визначення жорсткості є важливим етапом проектування такого обладнання.

Постановка задачі. Розглянемо рівновагу пружної системи узагальненого механізму паралельної структури з зовнішнім зусиллям (рис. 1), прикладеним у точці А, яка може розміщуватись на робочому органі і бути центром системи координат $X_AY_AZ_A$.

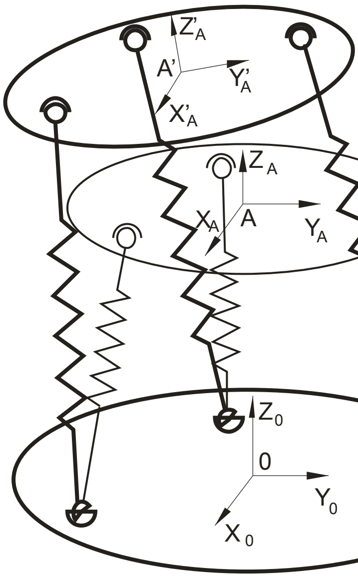

Рис. 1. Пружна система узагальненого механізму паралельної структури

Прикладене просторове навантаження $\mathbf{W}$ викликає пружне переміщення робочого органа. Зокрема, система координат, прив’язана до точки А, перетвориться на $X'_AY'_AZ'_A$. У найбільш загальному випадку відбудеться зсув та поворот системи координат.

У декартовій системі координат можна визначити вектор 6×1 зовнішнього навантаження

$$\mathbf{W} = \left[\mathbf{f}^{\,T} \quad \boldsymbol{\tau}^T\right]^T, \tag{1}$$

де $\mathbf{f} = \left[P_x, P_y, P_z\right]^T$ – вектор сил; $\boldsymbol{\tau} = \left[M_x, M_y, M_z\right]^T$ – вектор моментів; P_x, P_y, P_z – складові сили, що діють у точці А у напрямках осей X, Y та Z відповідно; M_x, M_y, M_z – складові моменти, що діють у точці А відносно осей X, Y та Z відповідно.

Визначимо також вектор пружних переміщень у вигляді

$$\Delta\mathbf{S} = \left[\mathbf{v}^T \quad \mathbf{w}^T\right]^T, \tag{2}$$

де $\mathbf{v} = \left[\Delta x, \Delta y, \Delta z\right]^T$ – вектор лінійних переміщень; $\mathbf{w} = \left[\Delta\psi, \Delta\theta, \Delta\varphi\right]^T$ – вектор кутових переміщень робочого органа; $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – різниця між координатами та $\Delta\psi, \Delta\theta, \Delta\varphi$ – різниця між кутами Крилова систем координат $X'_AY'_AZ'_A$ та $X_AY_AZ_A$ у обраній нерухомій системі координат $X_0Y_0Z_0$.

Тоді зв’язок між переміщенням робочого органа під навантаженням та величиною останнього встановлюється рівнянням

$$\mathbf{W} = K\,\Delta\mathbf{S}, \tag{3}$$

де K – *матриця просторової жорсткості* розмірністю 6×6, яка характеризує загальну жорсткість обладнання з паралельною кінематикою. Фізичний зміст елементів матриці жорсткості k_{ji} – жорсткість системи в напрямку i-ї узагальненої координати при дії j-ї компоненти узагальненого навантаження. Матрицю просторової жорсткості 6×6 можна представити у вигляді чотирьох блоків (підматриць) 3×3

$$K = \begin{bmatrix} K_п & K_с \\ K_с^T & K_к \end{bmatrix}, \tag{4}$$

де $K_п$, $K_с$ та $K_к$ – матриці поступальної, сполучної та крутильної жорсткості відповідно, визначені набором власних жорсткостей та відповідних ортонормальних векторів.

Матриця просторової жорсткості повністю описує пружні властивості механізму паралельної структури та його поведінку при статичному навантаженні. Аналіз перетворень матриці жорсткості при зміні системи координат дозволить привести її до простої форми, визначити координатно-незалежні характеристики жорсткості та положення центру пружності [3], у якому вектор переміщення паралельний вектору прикладеної сили, тобто механізм паралельної структури поводить себе як проста пружина.

Матриця податливості. Якщо матриця просторової жорсткості невироджена, визначити переміщення робочого органа під навантаженням можна з матричного рівняння

$$\mathbf{\Delta S} = C\,\mathbf{W}, \tag{5}$$

де $C = K^{-1}$ – *матриця податливості* 6×6, зворотна до матриці просторової жорсткості. Фізичний зміст елементів c_{ik} матриці податливості – зміщення в напрямку i-ї осі від дії одиничної узагальненої сили w_k.

У блочній формі матриця податливості матиме вигляд, подібний до матриці жорсткості

$$C = \begin{bmatrix} C_п & C_с^T \\ C_с & C_к \end{bmatrix}, \tag{6}$$

де $C_п$, $C_с$ та $C_к$ – відповідно матриці поступальної, сполучної та крутильної податливості, кожна з яких характеризується набором власних податливостей та відповідних ортонормальних векторів, що визначають осі податливості.

Користуючись формулою Фробеніуса для обернення блочної матриці [4], матрицю податливості можна виразити через підматриці матриці жорсткості

$$C = \begin{bmatrix} D_к^{-1} & -K_п^{-1}K_с D_п^{-1} \\ -K_к^{-1}K_с^T D_к^{-1} & D_п^{-1} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

де $D_к = K_п - K_с K_к^{-1} K_с^T$ – доповнення Шура для підматриці $K_к$ матриці жорсткості K, $D_п = K_к - K_с^T K_п^{-1} K_с$ – доповнення Шура для підматриці $K_п$ матриці жорсткості K.

Перетворення координат. При переході від системи координат $X_0Y_0Z_0$ до системи $X'_0Y'_0Z'_0$, початок координат якої O' одержується паралельним переносом початку координат O вектором $\mathbf{p} = [p_1, p_2, p_3]^T$, вектор навантаження $\mathbf{W}$ змінюється наступним чином

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}' \\ \mathbf{\tau}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{\tau} - \mathbf{p} \times \mathbf{f} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Тоді зв'язок між векторами навантаження $\mathbf{W}'$ та $\mathbf{W}$ у системах координат $X_0Y_0Z_0$ та $X'_0Y'_0Z'_0$ можна записати наступним чином

$$\mathbf{W}' = S\,\mathbf{W}, \tag{9}$$

де S – матриця 6×6 просторового паралельного переносу

$$\mathrm{S} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ -\langle \mathbf{p} \rangle & E \end{bmatrix}, \tag{10}$$

E – одинична матриця 3×3, $\langle \mathbf{p} \rangle$ – кососиметрична матриця 3×3, породжена вектором паралельного переносу початку координат O до O', заданим в системі координат $X_0Y_0Z_0$

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \begin{bmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Якщо початки систем координат співпадають, а R – матриця 3×3 повороту від системи $X'_0Y'_0Z'_0$ до $X_0Y_0Z_0$, то

$$\mathbf{W}' = H\,\mathbf{W}, \tag{12}$$

де H – матриця 6×6 просторового повороту

$$H = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}, \tag{13}$$

Якщо для переходу до системи координат $X'_0Y'_0Z'_0$ необхідно послідовно здійснити переміщення та поворот, то

$$\mathbf{W}' = T\,\mathbf{W}, \tag{14}$$

а матриця просторового перетворення має вигляд

$$T = \begin{bmatrix} E & 0 \\ -\langle \mathbf{p} \rangle & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ -\langle \mathbf{p} \rangle R & R \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Зворотне перетворення задається матрицею T^{-1}, яка згідно з правилами обернення блочних матриць дорівнює

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & 0 \\ R^T \langle \mathbf{p} \rangle & R^T \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Якщо записати (3) у іншій системі координат $X'_0Y'_0Z'_0$, одержимо

$$\mathbf{W}' = K'\,\mathbf{\Delta S}', \tag{17}$$

де $\mathbf{W}'$ та $\Delta\mathbf{S}'$ – вектори узагальненого навантаження та пружних переміщень, записані у новій системі координат.

В системі координат $X_0Y_0Z_0$ навантаження $\mathbf{W}$ на переміщенні $\Delta\mathbf{S}$ здійснить роботу

$$A = \frac{1}{2}\Delta\mathbf{S}^T\mathbf{W}\,, \tag{18}$$

тоді як в системі координат $X'_0Y'_0Z'_0$ ця робота буде дорівнювати

$$A = \frac{1}{2}\Delta\mathbf{S}'^T\,\mathbf{W}'\,. \tag{19}$$

Оскільки робота не залежить від системи координат, то

$$\Delta\mathbf{S}'^T\,\mathbf{W}' = \Delta\mathbf{S}^T\mathbf{W}\,. \tag{20}$$

Враховуючи (14)

$$\Delta\mathbf{S}'^T\,T\,\mathbf{W} = \Delta\mathbf{S}^T\mathbf{W}\,. \tag{21}$$

Звідси

$$\Delta\mathbf{S} = T^T\Delta\mathbf{S}'\,. \tag{22}$$

Підставляючи (3) та (22) у (14), одержуємо

$$\mathbf{W}' = T\,K\,T^T\Delta\mathbf{S}'\,. \tag{23}$$

Враховуючи (17), маємо залежність матриці жорсткості від перетворення координат

$$K' = T\;K\;T^T\,. \tag{24}$$

Таким чином, у загальному випадку $K' \neq K$, тобто матриця просторової жорсткості залежить від вибору системи координат.

Користуючись властивостями блочних матриць [4], можна визначити вигляд матриці жорсткості після перетворення координат

$$K' = \begin{bmatrix} RK_{\text{п}}R^T & R\left(K_{\text{с}} - K_{\text{п}}\langle\mathbf{p}\rangle^T\right)R^T \\ R\left(K_{\text{с}}^T - \langle\mathbf{p}\rangle K_{\text{п}}\right)R^T & R\left(K_{\text{к}} - \langle\mathbf{p}\rangle K_{\text{с}} - K_{\text{с}}^T\langle\mathbf{p}\rangle^T + \langle\mathbf{p}\rangle K_{\text{п}}\langle\mathbf{p}\rangle^T\right)R^T \end{bmatrix} \tag{25}$$

З (25) видно, що чистий поворот системи координат трансформує усі підматриці однаковим чином, а ступінь впливу на них паралельного переносу значно різниться.

Матриця поступальної жорсткості при переході від одної системи координат до іншої не залежить від вектора відносного зміщення $\mathbf{p}$ їх центрів, а визначається лише відносним поворотом R. Оскільки власні значення матриці при повороті зберігаються, то поступальні жорсткості не залежать від вибору системи координат.

Матриця сполучної жорсткості при чистому повороті трансформується як окрема матриця, а лінійне переміщення пов'язує її з матрицею поступальної жорсткості. При цьому значення сполучних жорсткостей не зберігаються.

Матриця крутильної жорсткості трансформується найбільш складним чином, у її перетворенні задіяні як матриця поступальної жорсткості, так і матриця сполучної жорсткості. Крутильні жорсткості в загальному випадку перетворення координат не зберігаються.

Враховуючи, що матриця податливості є оберненою до матриці жорсткості, з (24) випливає, що при зміні координат вона перетворюється як

$$C' = T^{-T}C\,T^{-1}\,. \tag{26}$$

Центр жорсткості і нормальна форма матриці жорсткості. Перетворення координат можна застосовувати з метою приведення K до якомога простішої форми. З (25) слідує, що поступальні та обертальні компоненти матриці жорсткості можуть бути повністю роз'єднані, якщо $K_{\text{с}} + K_{\text{п}}\langle\mathbf{p}\rangle^T = 0$ для певної кососиметричної матриці $\langle\mathbf{p}\rangle$. Оскільки $K_{\text{п}}$ симетрична позитивно визначена, $K_{\text{п}}^{-1}K_{\text{с}}$ теж кососиметрична, а отже кососиметричною є $K_{\text{с}}K_{\text{п}}$. Оскільки ранг кососиметричної матриці завжди парний, то для матриці $K_{\text{с}}K_{\text{п}}$ він не може перевищувати 2, а отже, неможливо повністю роз'єднати поступальні та обертальні компоненти матриці жорсткості, якщо матриця $K_{\text{с}}$ невироджена (виродженою може також бути матриця $K_{\text{п}}$, але цей випадок не розглядаємо, оскільки в такому разі матриця K також буде виродженою).

Припустимо, що поступальні та обертальні компоненти матриці жорсткості можуть бути повністю роз'єднані координатним перетворенням T. Тоді початок відповідної системи координат є *центром жорсткості*. У центрі жорсткості матриця жорсткості приймає блочно-діагональну форму

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} \hat{K}_{\text{п}} & 0 \\ 0 & \hat{K}_{\text{к}} \end{bmatrix}. \tag{27}$$

З врахуванням (25) можна записати її у вигляді

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} K_{\text{п}} & 0 \\ 0 & K_{\text{к}} - \langle\mathbf{p}\rangle K_{\text{с}} - K_{\text{с}}^T\langle\mathbf{p}\rangle^T + \langle\mathbf{p}\rangle K_{\text{п}}\langle\mathbf{p}\rangle^T \end{bmatrix} \tag{28}$$

а враховуючи, що $K_{\text{с}} - K_{\text{п}}\langle\mathbf{p}\rangle^T = 0$ і $K_{\text{с}}^T - \langle\mathbf{p}\rangle K_{\text{п}} = 0$, крутильну частину $\hat{K}_{\text{к}}$ можна представити як

$$\hat{K}_{\text{к}} = K_{\text{к}} + \langle\mathbf{p}\rangle K_{\text{п}}\langle\mathbf{p}\rangle^T\,. \tag{29}$$

Якщо матриця може бути діагоналізована, центр жорсткості можна знайти з умови $K_{\text{с}}^{T} - \langle \mathbf{p} \rangle K_{\text{п}} = 0$. Його положення визначається вектором $\mathbf{p}_K$ таким, що

$$\langle \mathbf{p}_K \rangle = K_{\text{с}}^{T} K_{\text{п}}^{-1}. \tag{30}$$

Підставляючи (30) у (29), одержуємо матрицю крутильної жорсткості

$$\hat{K}_{\text{к}} = K_{\text{к}} - \left(K_{\text{с}}^{T} K_{\text{п}}^{-1}\right) K_{\text{п}} \left(K_{\text{с}}^{T} K_{\text{п}}^{-1}\right)^{T}. \tag{31}$$

З врахуванням симетрії матриці $K_{\text{п}}$ маємо

$$\hat{K}_{\text{к}} = K_{\text{к}} - K_{\text{с}}^{T} K_{\text{п}}^{-1} K_{\text{с}}. \tag{32}$$

Матриця $\hat{K}_{\text{к}}$ є доповненням Шура $D_{\text{п}}$ для підматриці поступальної жорсткості. Тоді необхідною і достатньою умовою для існування матриці повороту R, яка дозволяє одночасно діагоналізувати матриці $K_{\text{п}}$ та $K_{\text{к}} - K_{\text{с}}^{T} K_{\text{п}}^{-1} K_{\text{с}}$, є їх переставність (комутативність), тобто повинна виконуватись умова $K_{\text{п}}\left(K_{\text{к}} - K_{\text{с}}^{T} K_{\text{п}}^{-1} K_{\text{с}}\right) = \left(K_{\text{к}} - K_{\text{с}}^{T} K_{\text{п}}^{-1} K_{\text{с}}\right) K_{\text{п}}$. Отже, матриця жорсткості може бути діагоналізована лише тоді, коли матриця $K_{\text{с}}$ вироджена, а матриці $K_{\text{п}}$ та $K_{\text{к}} - K_{\text{с}}^{T} K_{\text{п}}^{-1} K_{\text{с}}$ переставні. Фізичний зміст цієї умови полягає в колінеарності осей крутильної та поступальної жорсткості.

У загальному випадку, коли осі поступальної та крутильної жорсткості не колінеарні, вказані умови не виконуються і діагоналізувати K перетворенням координат неможливо. Але переходом до системи координат з початком у центрі жорсткості можна привести її до *нормальної форми*, коли лінійні та обертальні компоненти роз'єднані максимально можливим чином

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} \hat{K}_{\text{п}} & \hat{K}_{\text{с}} \\ \hat{K}_{\text{с}} & \hat{K}_{\text{к}} \end{bmatrix}, \tag{33}$$

де $\hat{K}_{\text{с}}$ – діагональна матриця.

Тоді для знаходження центру жорсткості необхідно знайти кососиметричну матрицю таку, щоб позадіагональні блоки (25) – матриці сполучної жорсткості – були симетричними, тобто

$$K_{\text{с}} - K_{\text{п}} \langle \mathbf{p}_K \rangle^{T} = K_{\text{с}}^{T} - \langle \mathbf{p}_K \rangle K_{\text{п}}. \tag{34}$$

Розв'язання дає вектор $\mathbf{p}_K$ положення центру жорсткості такий, що

$$\langle [Tr(K_{\text{п}})E - K_{\text{п}}] \mathbf{p}_K \rangle = K_{\text{с}}^{T} - K_{\text{с}}. \tag{35}$$

Тоді симетричну матрицю $K_{\text{с}} + \langle \mathbf{p}_K \rangle K_{\text{п}}$ можна перетворити поворотом за допомогою матриці R, стовпчики якої є власними векторами матриці $K_{\text{с}}^{T} - \langle \mathbf{p}_K \rangle K_{\text{п}}$, одержавши діагональну матрицю $\hat{K}_{\text{с}} = R\left(K_{\text{с}}^{T} - \langle \mathbf{p}_K \rangle K_{\text{п}}\right) R^{T}$.

Центр податливості і нормальна форма матриці податливості. Аналогічні міркування можна застосувати до знаходження нормальної форми матриці податливості, *центру податливості* та осей податливості пружної системи. Зокрема, вектор $\mathbf{p}_C$ положення центру податливості визначається з умови

$$\langle [Tr(C_{\text{п}})E - C_{\text{п}}] \mathbf{p}_C \rangle = C_{\text{с}} - C_{\text{с}}^{T}. \tag{36}$$

Розглянемо умови збігу центру жорсткості і центру податливості. Припустимо, що матриця жорсткості може бути діагоналізована і вже приведена до діагональної форми, тобто $K_{\text{с}} = 0$. Тоді з (7) слідує, що матриця податливості має вигляд

$$C = \begin{bmatrix} K_{\text{п}}^{-1} & 0 \\ 0 & K_{\text{к}}^{-1} \end{bmatrix}, \tag{37}$$

а оскільки зворотна матриця діагональної матриці є також діагональною, поступальні та обертальні податливості повністю роз'єднані.

Таким чином, якщо матриця жорсткості може бути діагоналізована, можна діагоналізувати і матрицю податливості, центр жорсткості є центром податливості, а осі податливості збігаються з осями жорсткості, оскільки діагональні матриці жорсткості і податливості мають однакові власні вектори. Якщо матриця жорсткості не може бути діагоналізована, центр жорсткості і центр податливості в загальному випадку не збігаються.

Інваріанти просторової жорсткості. Для визначення справжньої жорсткості обладнання з паралельною кінематикою бажано знати характеристики жорсткості, які не залежать від вибору системи координат, тобто інваріантні. Інваріантним є визначник матриці жорсткості, але він не несе значного фізичного змісту, а власні значення, які мають фізичний зміст, в загальному випадку залежать від вибору системи координат.

Як показано вище, інваріантними є власні значення матриці поступальної жорсткості $K_{\text{п}}$, але це не відноситься до власних значень матриці крутильної жорсткості $K_{\text{к}}$. Це обмеження дозволяє обійти модифікована матриця крутильної жорсткості $\hat{K}_{\text{к}}$, власні значення якої незалежні від системи координат. Дійсно, матриця $\hat{K}_{\text{к}} = K_{\text{к}} - K_{\text{с}}^{T} K_{\text{п}}^{-1} K_{\text{с}}$ визначає крутильні жорсткості у центрі жорсткості, за визначенням вона не залежить від трансформації паралельного переносу, а довільна ортогональна трансформація поворотом $R\,\hat{K}_{\text{к}} R^{T}$ не змінює її власні значення. З (7) можна помітити, що модифікована матриця крутильної жорсткості $\hat{K}_{\text{к}}$ є доповненням Шура $D_{\text{п}}$ для підматриці поступальної жорсткості, і дорівнює зворотній матриці крутильної податливості $\hat{K}_{\text{к}} = \mathrm{C}_{\text{к}}^{-1}$.

Таким чином, власні значення матриці поступальної жорсткості $K_{\text{п}}$ є *головними поступальними жорсткостями*, а власні значення зворотної матриці крутильної податливості $\mathrm{C}_{\text{к}}^{-1}$ є *головними крутильними жорсткостями* пружної системи, і вони інваріантні при довільному перетворенні координат.

Висновки

1. Матриця просторової жорсткості механізму паралельної структури залежить від вибору системи координат. Поворот системи координат трансформує усі підматриці однаковим чином, зберігаючи зберігає значення головних поступальних, крутильних та сполучних жорсткостей. При паралельному переносі головні поступальні жорсткості залишаються незмінними, а значення крутильних та сполучних жорсткостей не зберігаються.
2. Якщо осі поступальної та крутильної жорсткості колінеарні, існує центр жорсткості, у якому вектор переміщення паралельний вектору прикладеної сили. Тоді поступальна та обертальна частина матриці жорсткості повністю роз'єднані, матриця сполучної жорсткості нульова, а матриця просторової жорсткості може бути приведена до діагональної форми. В загальному випадку осі поступальної та крутильної жорсткості не колінеарні, тоді положення центру жорсткості визначається з умови діагоналізації матриці сполучної жорсткості, коли поступальна та обертальна частини матриці просторової жорсткості максимально роз'єднані.
3. Аналогічно до центру жорсткості можна знайти центр податливості пружної системи, де поступальна та крутильна податливості максимально роз'єднані. Якщо існує координатне перетворення, яке діагоналізує матрицю жорсткості, воно діагоналізує і матрицю податливості, тоді центр жорсткості є центром податливості, а осі податливості співпадають з осями жорсткості.
4. Структура просторової жорсткості механізму характеризується інваріантами, незмінними при будь-якому просторовому евклідовому перетворенні координат – головними поступальними та крутильними жорсткостями, які представляють собою власні значення матриці поступальної жорсткості та зворотної матриці крутильної податливості.

Література

1. Merlet J.-P. Parallel Robots. – Springer-Verlag New York Inc., 2006. – 394 p.
2. Кириченко А.М. Показники жорсткості верстатного обладнання з паралельною кінематикою // Збірник наукових праць КНТУ. Техніка в с/г виробництві, галузеве машинобудування, автоматизація. – Вип. 22. – Кіровоград: КНТУ, 2009. – С.272-282.
3. Диментберг Ф.М. Винтовое исчисление и его приложение в механике. – М.: Наука, 1965. – 200 с.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1966. – 576 с.