Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний аграрний університет

Л.О. Волонтир, Н.А. Потапова, І.М. Ушкаленко, І.А. Чіков

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ В ПІДПРИЄМНИЦЬКІЙ ДІЯЛЬНОСТІ

Навчальний посібник

ВНАУ - 2020

УДК 519.863(075.8)
О-62

Рекомендовано Вченою радою Вінницького національного аграрного університету як навчальний посібник для студентів першого освітнього рівня (бакалаврського) спеціальностей 051 «Економіка», 071 «Облік і оподаткування», 072 «Фінанси, банківська справа та страхування», 073 «Менеджмент» у вищих навчальних закладах III-IV рівнів акредитації.

(Протокол № від 11 від 28.04.2020)

<u>**Рецензенти:**</u>

Н.В. Корж - д-р екон. наук, професор Вінницького торговельно-економічного інститут КНТЕУ,

М.І. Небава -д-р екон. наук, професор Вінницького національного технічного університета,

О.Ф. Шевчук к.-т фізико-математичних наук, доцент Вінницького національного аграрного університета

О-62 Оптимізаційні методи та моделі в підприємницькій діяльності: Навчальний посібник. / Волонтир Л.О, Потапова Н.А., Ушкаленко І.М., І.А.Чіков., Вінницький національний аграрний університет. – Вінниця: ВНАУ, 2020 – 404 с.

ISBN 978-617-7789-18-4

У навчальному посібнику міститься стислий виклад методів економіко-математичне моделювання у відповідності до програми курсу «Оптимізаційні методи і моделі», який включає основи математичного програмування і економіко-математичного моделювання економічних процесів та ситуацій.

Кожний розділ посібника містить теоретичні відомості, різноманітні приклади застосування методу та моделей для аналізу типових економічних ситуацій, перелік питань для контролю. окремим розділом складено тести для перевірки знань та вмінь по предмету

Посібник розрахований на студентів та аспірантів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів освіти.

Рекомендовано фахівцям з організації економічних процесів у підприємництві, а також викладачам, студентам і аспірантам економічних спеціальностей.

УДК 519.863(075.8)
ISBN 978-617-7789-18-4

ЗМІСТ

ВСТУП

Основною задачею керування в економічних системах є виявлення альтернативних рішень, їх формалізований опис, співставлення альтернатив дій і цілей, а також аналіз можливостей виявлення альтернатив за допомогою модельних експериментів. Ці альтернативи дій оцінюються з точки зору міри досягнення поставленої мети через критерії оптимальності з метою вибору серед них найкращої, оптимальної.

Специфічна особливість економічної системи полягає у тому, що вона належить до класу управлінських систем, а в них першим завданням реалізації оптимального управління є правильний вибір критерію оптимальності, який міг би врахувати усі найважливіші, і, можливо, найсуперечливіші вимоги до даного економічного процесу.

І тут необхідно зауважити, що усі проблеми та ситуації, які мають місце на різних рівнях економічної системи, повинні враховувати обмеженість ресурсів для досягнення поставленої мети. Щоб відшукати шляхи їх вирішення, необхідно провести експериментальні дослідження, розрахунки. Очевидним є те, що експериментування з економічними системами недоцільне, тому єдиним науково обґрунтованим засобом досліджень є математичне моделювання - найефективніший із кількісних методів аналізу ефективності управлінських рішень.

Точна, тобто досконала наука зможе надати органам управління способи і методи, при допомозі яких результатами аналізу будь-якої економічної ситуації будуть не загальні роздуми, декларації чи міркування, а числове вираження обраної мети і числові значення впливів на дану ситуацію для досягнення цієї мети.

Інструментарій математичного моделювання, як складова частина процедури прийняття рішення, має особливо вагомі можливості. Але фатально бракує фахівців, які володіють методами вироблення оптимальних управлінських рішень за допомогою цього інструментарію.

Пропонований читачу посібник не дає відповіді на всі питання стосовно проблематики, що розглядається. Більше того, після опрацювання матеріалу, що в ньому знаходиться, виникнуть питання, відповіді на які в певній мірі можна знайти лише в інших джерелах. Таке провокування каскадності матеріалу, що приваблює читача в нескінчений процес пізнання, наукового пізнання є метою забезпечення професіоналізму у виробленні управлінських рішень.

Традиційно наукою управління називають створення моделей, після аналізу яких виробляються управлінські рішення. Але створення моделей ситуацій, процесів чи об’єктів відбувається з метою отримання найбільш науково обґрунтованих знань про ці ситуації чи процеси через проведення модельних експериментів для вибору ефективних управлінських рішень.

Дана книга не є збірником готових моделей різноманітних ситуацій задач і процесів. Вона може стати в нагоді читачеві при застосування декількох типів моделей, що подані у вигляді прикладів, та через розкриття теоретичних засад методології моделювання при самостійному використанні інструментарію моделювання, здійснюючи вибір ефективних рішень у будь-якій сфері діяльності. Ця книга присвячена розкриттю суті основних принципів моделювання, котрі можна застосувати до найрізноманітніших управлінських ситуацій. Вона показує, яким чином реальні життєві ситуації можна досліджувати і аналізувати за допомогою модельних експериментів, а також розкриває економічну інтерпретацію математичних методів аналізу моделей.

Професіональний аналітик в процесі прийняття рішень повинен виділити ті ситуації, котрі в тій чи іншій мірі необхідно описати математично, тобто для яких можна побудувати відповідні моделі і взяти через проведення модельних експериментів необхідну інформацію для вироблення управлінського рішення. Але ця книга не забезпечить цьому аналітику професіонального вдосконалення, якщо він не буде розробляти власні моделі. Для цього йому потрібно пройти всі етапи засвоєння досвіду побудови моделей. Відповідальність за якість цього навчання повністю лягає на аналітика. І для того, щоб стати фаховим розробником моделей і одночасно хорошим управлінцем, менеджеру потрібно засвоїти методи моделювання і методи прийняття рішень.

Наука управління, що використовує метод моделей, має чим зацікавити майбутніх аналітиків. Маємо сподівання, що матеріал цієї книги, у поєднанні з майстерністю навчання і наполегливістю обох сторін навчального процесу, допоможе майбутнім аналітикам набути навиків використання методу моделювання у модельній професійній діяльності. Для цього, щоби дана книга була корисною для студентів, було здійснено широкий підбір матеріалу поряд з простим розглядом процедур пошук розв’язку за допомогою математичних методів ще й додатково поданий матеріал опису реальних управлінських ситуацій. Підходи до моделювання адаптовані до різноманітних областей економічної діяльності, зокрема, в управлінні ресурсами, маркетингу, адмініструванні та багатьох інших областях людської діяльності. Це дає змогу розвивати навики моделювання й інтуїцію в розв’язуванні практичних задач, поєднати конкретну методологію моделювання і застосування моделей зі засвоєнням необхідних для цього засобів. Роз’яснюючи сутність моделей і процесу моделювання є надзвичайно важливим роз’яснювання того, яку додаткову інформацію можна отримати в результаті проведення модельних експериментів для реалізації управлінської діяльності.

У навчальному посібнику описані основи математичного моделювання економічних процесів, наведена методика моделювання конкретних економічних ситуацій, що виникають в результаті функціонування локального економічного об’єкта, а також описано методи їх економіко-математичного аналізу.

Посібник розрахований на студентів, які вивчають оптимізаційні методи і моделі в економіці та набувають досвіду й навиків ефективного керування економічними процесами.

РОЗДІЛ 1

ПРЕДМЕТ, МЕТОД ТА ЗАДАЧІ ДИСЦИПЛІНИ

1.1. Предмет та об'єкт оптимізаційного моделювання

В економічних, виробничих, технологічних процесах різних галузей народного господарства виникають задачі, які подібні між собою за постановкою, і які мають ряд спільних ознак та розв'язуються подібними методами. Типова постановка задачі оптимізаційного моделювання полягає в наступному: деякий процес може розвиватися за різними варіантами, кожен з яких має свої переваги та недоліки, причому, як правило, таких варіантів може бути безліч. Необхідно із усіх можливих варіантів (програм) вибрати найкращий (оптимальний).

Для обґрунтування оптимальних виробничих програм використовують спеціальні оптимізаційні моделі розв'язання таких задач, тобто оптимізаційне моделювання. Саме зі словом «модель» і пов'язана назва предмету - «оптимізаційне моделювання».

Пошук оптимального плану є, як правило, складним завданням і належить до екстремальних задач, в яких необхідно визначити максимум чи мінімум (екстремум) функції за визначеними обмеженнями.

Оптимізаційне моделювання - один із напрямків прикладної математики, предметом якого є задачі на знаходження екстремуму деякої функції за певних заданих умов.

Об'єктами оптимізаційного моделювання є різноманітні галузі людської діяльності, де в певних ситуаціях необхідно здійснити вибір найкращого з можливих варіантів дій. Основою такого вибору є знаходження розв'язку екстремальної задачі методами оптимізаційного моделювання.

При розв'язанні екстремальної економічної задачі виконуються наступні пункти: будується економіко-математична модель, знаходиться оптимальний план, проводиться економічний аналіз отриманих результатів і визначається можливість їх практичного застосування.

Оптимізаційна модель економічного об'єкта (системи) - це його спрощений образ, який поданий у вигляді сукупності математичних співвідношень (рівнянь, нерівностей, логічних співвідношень, графіків тощо).

1.2. Типові оптимізаційні задачі

В подальшому, при вивченні матеріалу курсу, ми будемо розглядати довільні економічні системи з визначеною метою свого функціонування, які можуть бути охарактеризовані деякими параметрами та для яких стан системи залежить від певних керованих та некерованих вхідних змінних.

Параметри є кількісними характеристиками системи. Наприклад, якщо йдеться про таку економічну систему, як сільськогосподарське підприємство, то його параметрами є наявні ресурси (земельні угіддя, робоча сила, сільськогосподарська техніка, тваринницькі та складські приміщення), рівень урожайності сільськогосподарських культур, продуктивності тварин, норми витрат ресурсів, ціни та собівартість проміжної і кінцевої продукції, норми податків, проценти за кредит, ціни на куповані ресурси тощо.

Частина параметрів для певної системи може бути сталими величинами, наприклад, норми висіву насіння сільськогосподарських культур, норми споживання тваринами кормів тощо, а частина - змінними, тобто залежатиме від певних умов, як, скажімо, урожайність сільськогосподарських культур, собівартість продукції, реалізаційні ціни на рослинницьку та тваринницьку продукцію.

Змінні величини бувають незалежними чи залежними, дискретними чи неперервними, детермінованими або випадковими. Наприклад, залежною змінною є собівартість продукції, незалежною від процесу функціонування підприємства величиною є початковий розмір статутного фонду, дискретною - кількість корів, неперервною - площа посіву озимої пшениці, детермінованою - норма висіву насіння кукурудзи на гектар, випадковою - кількість телят, які народяться у плановому періоді.

Вхідні змінні економічної системи бувають двох видів: керовані, значення яких можна змінювати в деякому інтервалі; і некеровані змінні, значення яких не залежать від волі людей і визначаються зовнішнім середовищем. Наприклад, обсяг придбаного пального - керована, а температура повітря - некерована змінна. Залежно від реальної ситуації керовані змінні можуть переходити у групу некерованих і навпаки. Наприклад, у разі насиченого ринку обсяги придбання дизельного палива є керованою змінною величиною, а за умов дефіциту цього ресурсу - некерованою.

Кожна економічна система має певну мету свого функціонування. Це може бути, наприклад, отримання максимуму чистого прибутку. Ступінь досягнення мети, здебільшого, має кількісну міру, тобто може бути описаний математично.

Нехай F - вибрана мета (ціль). За цих умов вдається, як правило, встановити залежність між величиною F, якою вимірюється ступінь досягнення мети, вхідними змінними та параметрами системи:

$$F = f(x_1, x_2, ..., x_n;\ y_1, y_2, ..., y_m;\ c_1, c_2, ..., c_l) \qquad (1.1)$$

Функцію F називають цільовою функцією, або функцією мети. Для економічної системи це є функція ефективності її функціонування та розвитку, оскільки значення F відображує ступінь досягнення певної мети.

У загальному вигляді задача оптимізаційного моделювання формулюється так: знайти такі значення керованих змінних, щоб цільова функція набувала екстремального (максимального чи мінімального значення).

Отже, потрібно відшукати значення

$$\max_{x_j}(\min) F^* = f(x_1, x_2, ..., x_n;\ y_1, y_2, ..., y_m; c_1, c_2, ..., c_l) \qquad (1.2)$$

Можливості вибору завжди обмежені зовнішніми щодо системи умовами, параметрами виробничо-економічної системи тощо.

Наприклад, площа посіву озимої пшениці обмежена наявністю ріллі та інших ресурсів, сівозмінами, можливістю реалізації зерна, необхідністю виконання договірних зобов'язань тощо. Ці процеси можна описати системою математичних рівностей та нерівностей виду:

$$\begin{aligned} & q_i(x_1, x_2, ..., x_n;\ y_1, y_2, ..., y_m; c_1, c_2, ..., c_l)\{\le, =\ge\}0; \\ & (i = 1, 2, ..., S). \end{aligned} \qquad (1.3)$$

Тут набір символів означає, що для деяких значень поточного індексу i виконуються нерівності типу $\le$, для інших - рівності (=), а для решти - нерівності типу $\ge$.

Система (1.3) називається системою обмежень, або системою умов задачі. Вона описує внутрішні технологічні та економічні процеси функціонування й розвитку виробничо-економічної системи, а також процеси зовнішнього середовища, які впливають на результат діяльності системи. Для економічних систем змінні xj мають бути невід'ємними:

$$x_j > 0 \ (j = 1, 2, ..., n) \qquad (1.4)$$

Залежності (1.2) - (1.4) утворюють економіко-математичну модель економічної системи.

Розробляючи таку модель, слід дотримуватись певних правил:

1. Модель має адекватно описувати реальні технологічні та економічні процеси.

2. У моделі потрібно враховувати все істотне, суттєве в досліджуваному явищі чи процесі, нехтуючи всім другорядним, неістотним у ньому. Оптимізаційне моделювання - це мистецтво, вузька стежка між переспрощенням та переускладненням. Справді, прості моделі не забезпечують відповідної точності, і «оптимальні» розв'язки за такими моделями, як правило, не відповідають реальним ситуаціям, дезорієнтують користувача, а переускладнені моделі важко реалізувати на ЕОМ як з огляду на неможливість їх інформаційного забезпечення, так і через відсутність відповідних методів оптимізації.

3. Модель має бути зрозумілою для користувача і зручною для реалізації на ЕОМ.

4. Необхідно, щоб множина змінних була не порожньою. З цією метою в економіко-математичних моделях за змоги слід уникати обмежень типу «=», а також суперечливих обмежень.

Наприклад, ставиться обмеження щодо виконання контрактів, але ресурсів недостатньо, аби їх виконати. Якщо система (1.3), (1.4) має єдиний розв'язок, то не існує набору різних планів, а отже, й задачі вибору оптимального з них.

Будь-який набір змінних, що задовільняє умови (1.3) і (1.4), називають допустимим планом, або планом. Очевидно, що кожний допустимий план є відповідною стратегією економічної системи, програмою дій. Кожному допустимому плану відповідає певне значення цільової функції, яке обчислюється за формулою (1.1).

Сукупність усіх розв’язків системи обмежень (1.3) і (1.4), тобто множина всіх допустимих планів утворює область існування планів.

План, за якого цільова функція набуває екстремального значення, називається оптимальним. Оптимальний план є розв’язком задачі оптимізаційного моделювання (1.2) - (1.4).

Складність економічних систем (явищ, процесів) як об’єктів досліджень вимагає їх ретельного вивчення з метою з’ясування найважливіших функціональних залежностей, внутрішніх взаємозв’язків між їхніми елементами. В результаті здійснюються можливі спрощення та допущення, що, очевидно, погіршує адекватність побудованих математичних моделей і є чудовим приводом для критики. Однак лише прийняття певних допущень уможливлює формалізацію будь-якої економічної ситуації.

Не існує загальних рекомендацій щодо процесу моделювання, тому в кожному конкретному разі вимоги до побудови математичної моделі залежать від цілей та умов досліджуваної системи.

У процесі застосування оптимізаційного моделювання в економіці чітка постановка задачі та її формалізація є найскладнішим етапом дослідження, яка вимагає ґрунтовних знань передусім економічної суті процесів, які моделюються. Однак, вдало створена оптимізаційна модель може надалі застосовуватись для розв’язування інших задач, які не мають відношення до ситуації, що початково моделювалася. Починаючи з робіт Л.В. Канторовича, в оптимізаційному моделюванні сформовано певний набір класичних постановок задач, економіко-математичні моделі яких широко використовуються в практичних дослідженнях економічних проблем.

Наведемо кілька вже формалізованих типових постановок економічних задач, що розв'язуються методами оптимізаційного моделювання (більшість сформульованих задач будуть вивчатися в наступних розділах).

Всі розглянуті задачі залежно від наявності та точності початкової інформації, мети дослідження, ступеня врахування невизначеності, специфіки застосування до конкретного процесу можуть бути сформульовані як у вигляді статичних, детермінованих, неперервних лінійних задач, так і в складнішій постановці, де один, кілька чи всі параметри визначаються з певним рівнем імовірності та використовуються нелінійні залежності.

Задача визначення оптимального плану виробництва: для деякої виробничої системи (цеху, підприємства, галузі) необхідно визначити план випуску кожного виду продукції за умови найкращого способу використання наявних ресурсів. У процесі виробництва задіяний визначений набір ресурсів: сировина, трудові ресурси, технічне обладнання тощо. Відомі загальні запаси ресурсів, норми витрат кожного ресурсу та прибуток з одиниці реалізованої продукції. Задаються також обмеження на обсяги виробництва продукції (асортиментність).

Критерії оптимальності: максимум прибутку, максимум товарної продукції, мінімум витрат ресурсів.

Задача про «дієту» (або про суміш): деякий раціон складається з кількох видів продуктів. Відомі вартість одиниці кожного компонента, кількість необхідних організму поживних речовин та потреба в кожній речовині, вміст в одиниці кожного продукту кожної поживної речовини. Необхідно знайти оптимальний раціон - кількість кожного виду продукту, що враховує вимоги забезпечення організму необхідною кількістю поживних речовин.

Критерій оптимальності - мінімальна вартість раціону.

Транспортна задача: розглядається певна кількість пунктів виробництва та споживання деякої однорідної продукції (кількості пунктів виробництва та споживання не однакові). Відомі обсяги виготовленої продукції в кожному пункті виробництва та потреби кожного пункту споживання. Також задана матриця, елементи якої є вартістю транспортування одиниці продукції з кожного пункту виробництва до кожного пункту споживання. Необхідно визначити оптимальні обсяги перевезень продукції, за яких були б найкраще враховані потреби вивезення продукції від виробників та забезпечення попиту споживачів.

Критерії оптимальності: мінімальна сумарна вартість перевезень, мінімальні сумарні витрати часу.

Задача оптимального розподілу виробничих потужностей: розглядаються кілька підприємств, що виготовляють певну кількість видів продукції. Відомі фонд робочого часу кожного підприємства; потреби в продукції кожного виду; матриця потужностей виробництва всіх видів продукції, що виготовляються на кожному підприємстві, а також собівартості виробництва одиниці продукції кожного підприємства. Необхідно розподілити виробництво продукції між підприємствами у такий спосіб, щоб задовольнити потреби у виготовленні продукції та максимально використати виробничі потужності підприємств.

Критерій оптимальності: мінімальні сумарні витрати на виготовлення продукції.

Задача про призначення: нехай набір деяких видів робіт може виконувати певне число кандидатів, причому кожного кандидата можна призначати лише на одну роботу і кожна робота може бути виконана тільки одним кандидатом. Відома матриця, елементами якої є ефективності (у вибраних одиницях) кожного претендента на кожній роботі. Розв’язком задачі є оптимальний розподіл кандидатів на посади.

Критерій оптимальності: максимальний сумарний ефект від виконання робіт.

Задача комівояжера: розглядається кілька міст. Комівояжеру необхідно, починаючи з міста, в якому він перебуває, обійти, не буваючи ніде двічі, всі міста і повернутися в початкове. Відома матриця, елементи якої - вартості пересування (чи відстані) між всіма попарно пунктами подорожі. Знайти оптимальний маршрут.

Критерій оптимальності: мінімальна сумарна вартість (відстань) пересування по маршруту.

Задача оптимального розподілу капіталовкладень. Планується діяльність групи (системи) підприємств протягом деякого періоду, який розділено на певну кількість підперіодів. Задана сума коштів, які можна вкладати в будь-яке підприємство чи розподіляти між ними протягом всього періоду планування. Відомі величини збільшення виробництва продукції (за умови здійснення додаткових капіталовкладень) у кожному з підприємств групи для всіх підперіодів. Необхідно визначити, як роз-поділяти кошти на початку кожного підперіоду між підприємствами так, щоб сумарний дохід за весь період був максимальним.

1.3. Класифікація оптимізаційних задач

У оптимізаційному моделюванні виділяють два напрямки - детерміновані задачі і стохастичні. Детерміновані задачі не містять випадкових змінних чи параметрів. Уся початкова інформація повністю визначена. У стохастичних задачах використовується вхідна інформація, яка містить елементи невизначеності, або деякі параметри набувають значень відповідно до визначених функцій розподілу випадкових величин. Наприклад, якщо в економіко-математичній моделі врожайності сільськогосподарських культур задані своїми математичними сподіваннями (середніми значеннями), то така задача є детермінованою. Якщо ж врожайності задані функціями розподілу, наприклад нормального з математичним сподіванням а і дисперсією D, то така задача є стохастичною.

Якщо у відповідних економічних процесах випадкові явища не відіграють істотної ролі, то задачу можна розв'язувати як детерміновану. У іншому разі адекватна економіко-математична модель має бути стохастичною, тобто містити випадкові функції та величини. Структура та розв'язування таких задач вивчаються в окремому розділі, який називається стохастичним програмуванням.

Кожен з названих напрямків включає такі типи задач оптимізаційного моделювання, які в свою чергу поділяються на інші класи.

Як детерміновані, так і стохастичні задачі можуть бути статичними (однокроковими) або динамічними (багатокроковими). Оскільки економічні процеси розвиваються на протязі часу, то відповідні економіко-математичні моделі мають відображати їх динаміку. Поняття динамічності пов'язане зі змінами об'єкта (явища, процесу) з перебігом часу.

Задачі оптимізаційного моделювання поділяють також на дискретні і неперервні. Дискретними називають задачі, в яких одна, кілька або всі змінні набувають лише дискретних значень. З поміж них окремий тип становлять задачі, в яких одна або кілька змінних набувають цілочислових значень, їх називають задачами цілочислового програмування. Якщо всі змінні можуть набувати будь-яких значень на деяких інтервалах числової осі, то задача є неперервною.

Оскільки в економіко-математичних моделях залежності між показниками описані за допомогою функцій, то відповідно до їх виду всі вище згадані типи задач поділяють на лінійні та нелінійні. Якщо цільова функція (1.2) та обмеження (1.3) є лінійними, тобто містять змінні тільки у першому або нульовому степенях, то така задача є лінійною. В усіх інших випадках задача буде нелінійною.

Найпростішими з розглянутих типів є статичні, детерміновані, неперервні та лінійні задачі. Важливою перевагою таких задач є те, що для їх розв'язування розроблено універсальний метод, який називається симплексним методом. Теоретично кожну задачу лінійного програмування можна розв’язати. Для деяких типів лінійних задач, що мають особливу структуру, розробляють спеціальні методи розв’язання, які є ефективнішими. Наприклад, транспортну задачу можна розв’язати симплексним методом, але ефективнішими є спеціальні методи, наприклад, метод потенціалів.

Економічні та технологічні процеси, як правило, є нелінійними, стохастичними, розвиваються за умов невизначеності. Лінійні економіко-математичні моделі часто є неадекватними, тобто такими, що неточно описують процес, який досліджується, тому доводиться будувати стохастичні, динамічні, нелінійні моделі. Розв’язувати такі задачі набагато складніше, ніж лінійні, оскільки немає універсального методу їх розв’язання. Для окремих типів нелінійних задач розроблено спеціальні числові методи розв’язання. Проте слід зазначити, що на практиці застосовують, здебільшого, лінійні економіко-математичні моделі. Часто нелінійні залежності апроксимують (наближають) до лінійних. Такий підхід в багатьох випадках є доволі ефективним.

У нелінійному програмуванні (залежно від функцій, які використовуються в економіко-математичній моделі) виокремлюють опукле та квадратичне програмування. Задача належить до опуклого програмування у тому разі, коли цільова функція вгнута, якщо вона мінімізується, та опукла, якщо вона максимізується, а всі обмеження - однотипні нерівності типу (≤) або рівняння, в яких ліві частини є опуклими функціями, а праві частини - сталими величинами. У разі обмежень типу (≥) їх ліві частини мають бути вгнутими функціями. Тоді область допустимих планів є опуклою та існує глобальний, єдиний екстремум. Квадратичне програмування - якщо цільова функція квадратична, а обмеження лінійні.

Щойно було розглянуто лише основні типи задач математичного програмування. Можна також за різними ознаками виокремити й інші підтипи.

Це особливо стосується задач лінійного, нелінійного і стохастичного програмування. Наприклад, як окремий тип розглядають дробово-лінійне програмування, коли обмеження є лінійними, а цільова функція - дробово-лінійна. Особливий тип становлять задачі теорії ігор, які широко застосовуються в ринковій економіці.

1.4. Історична довідка

В суто математичному плані деякі оптимізаційні задачі були відомі ще в стародавній Греції. Однак, сучасне оптимізаційне моделювання передусім розглядає властивості та розв'язки математичних моделей економічних процесів. Тому початком його розвитку як самостійного наукового напрямку слід вважати перші спроби застосування методів оптимізаційного моделювання в прикладних дослідженнях, насамперед в економіці. Справжнім початком оптимізаційного моделювання в сучасному розумінні вважають праці радянського вченого Л. В. Канторовича. Наприкінці 30-х років у Ленінградському університеті ним уперше були сформульовані та досліджувались основні задачі, критерії оптимальності, економічна інтерпретація, методи розв'язання та геометрична інтерпретація результатів розв'язання задач лінійного програмування (1939 року Л. В. Канторович оприлюднив монографію «Математичні методи організації і планування виробництва»). Сам термін «лінійне програмування» був введений дещо пізніше, 1951 року, у працях американських вчених Дж. Данцига та Г. Кумпанса. Однак у своїй монографії Дж. Данциг зазначає, що Л.В. Канторовича слід визнати першим, хто виявив, що широке коло важливих виробничих задач може бути подане у чіткому математичному формулюванні, яке уможливлює підхід до таких задач з кількісного боку та розв'язання їх чисельними методами.

1947 року Дж. Данцигом також був розроблений основний метод розв’язування задач лінійного програмування - симплексний метод, що вважається початком формування лінійного програмування як самостійного напрямку в математичному програмуванні. Наступним кроком стали праці Дж. Неймана (1947 р.) щодо розвитку концепції двоїстості, що уможливило розширення практичної сфери застосування методів лінійного програмування.

Періодом найінтенсивнішого розвитку оптимізаційного моделювання є п’ятдесяті роки. У цей час з’являються розробки нових алгоритмів, теоретичні дослідження з різних напрямків: 1951 року - праця Г. Куна І А. Таккера, в якій наведено необхідні та достатні умови оптимальності нелінійних задач; 1954 року - Чарнес і Лемке розглянули наближений метод розв’язання задач з сепарабельним опуклим функціоналом та лінійними обмеженнями; 1955 року - ряд робіт, присвячених квадратичному програмуванню. У п’ятдесятих роках сформувався новий напрямок - динамічне програмування, значний вклад у розвиток якого вніс американський математик Р. Белман.

Нажаль, у період найбурхливішого розвитку оптимізаційного моделювання за кордоном у Радянському Союзі не спостерігалося значних досягнень через штучні ідеологічні обмеження. Відродження досліджень з математичного моделювання економіки почалося в 60-80-тих роках і стосувалося опису «системи оптимального функціонування соціалістичної економіки». Серед радянських вчених того періоду слід виокремити праці В.С. Немчинова, В.В. Новожилова, Н. ГТ. Федоренка, С.С. Шаталіна, В.М. Глушкова, В.С. Михалевича, Ю.М. Єрмольєва та ін.

На сучасному етапі оптимізаційне моделювання включає широке коло задач з відповідними методами розв’язання, що охоплюють різноманітні проблеми розвитку та функціонування реальних економічних систем. Розробляються банки економіко - математичних моделей, які в поєднанні з потужною, швидкодіючою обчислювальною технікою та сучасними програмними продуктами утворюватимуть системи ефективної підтримки прийняття рішень у різних галузях економіки.

1.5. Приклади побудови математичних моделей економічних процесів та явищ

Задача визначення оптимального плану виробництва: для деякої виробничої системи (цеху, підприємства, галузі) необхідно визначити план випуску *n* видів продукції $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ за умови найкращого способу використання її наявних ресурсів. У процесі виробництва задіяні *m* ресурсів: сировина, трудові ресурси, технічне оснащення тощо. Відомі загальні запаси ресурсів $b_i (i = \overline{1, m})$, норми витрат і-го ресурсу на виробництво одиниці *j*-ої продукції $a_{ij} (i = \overline{1, m};\ j = \overline{1,.n})$ та прибуток з одиниці *j*-ої реалізованої продукції $c_j (j = \overline{1, n})$.

Критерій оптимальності: максимум прибутку.

Позначимо через $x_1, x_2, ..., x_n$ обсяги виробництва відповідно першого, другого і т. д. видів продукції.

Оскільки на одиницю продукції 1-го виду витрачається a_{11} ресурсу першого виду, то на виробництво першого виду продукції обсягом x_1 необхідно витратити $a_{11}x_1$ цього ресурсу. На другий вид продукції обсягом x_2 витрати першого ресурсу дорівнюватимуть $a_{12}x_2$ і т. д. На виробництво всіх видів продукції буде використано першого ресурсу в наступному обсязі: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n$. Ця величина повинна не перевищувати наявного обсягу першого ресурсу - b_1. Отже, обмеження щодо використання першого ресурсу матиме вигляд: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1$. Аналогічно записують обмеження стосовно використання всіх інших виробничих ресурсів. Прибуток від реалізації виготовленої продукції всіх видів становитиме:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n.$$

Загалом лінійна економіко-математична модель даної задачі матиме вигляд:

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + ... + a_{3n}x_n \le b_3; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0.$$

Математична модель виробничої задачі може бути застосована для різних економічних задач, де виникає проблема вибору найкращого варіанта розподілу обмеженої кількості ресурсів, хоча з першого погляду може здаватися, що постановка задачі не стосується виробничих процесів. Наведемо конкретний приклад виробничої задачі.

Приклад 1. На ринок поставляється картопля з трьох фермерських господарств за цінами відповідно 80, 75 та 65 коп. за 1 кг. На завантаження 1 т картоплі в кожному із господарств відповідно витрачається по 1; 6 та 5 хвилин. Замовлено 12т картоплі, і для своєчасної доставки необхідно, щоб на її завантаження витрачалося не більше сорока хвилин. Потрібно визначити, з яких фермерських господарств і в якій кількості необхідно доставляти картоплю, щоб загальна вартість закупівлі була мінімальною, якщо фермери можуть виділити для продажу відповідно 10, 8 та 6 т картоплі.

Розв'язання. Побудова економіко-математичної моделі.

Позначимо: x_1 - кількість картоплі, що буде закуплена у першому господарстві (т); x_2, x_3 - кількість картоплі, закупленої відповідно у другого та третього фермерів (т).

Поставка потрібної кількості картоплі описується рівністю:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12,$$

наступне обмеження, яке описує витрати часу на завантаження продукції:

$$1x_1 + 6x_2 + 5x_3 < 40,$$

обмеження щодо можливостей поставок продукції з кожного господарства:

$$x_1 \le 10;$$
$$x_2 \le 8;$$
$$x_3 \le 6.$$

Вартість продукції, що закуповується, визначається як сума добутків ціни на відповідні її обсяги. Ціни 1 т картоплі відповідно дорівнюють 800, 750 та 650 грн. в даних трьох фермерських господарствах. Отже, цільову функцію можна записати так:

$$F = 800x_1 + 750x_2 + 650x_3.$$

Економіко-математична модель задачі має вигляд:

$$\min F = 800x_1 + 750x_2 + 650x_3$$

за умов:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 12; \\ x_1 + 6x_2 + 5x_3 \le 40; \\ x_1 \le 10; \\ x_2 \le 8; \\ x_3 \le 6. \\ x_i < 0, \ (i = 1,2,3). \end{cases}$$

Задача про «дієту». Деякий раціон складається з п видів продуктів. Відомі вартість одиниці кожного продукту - $c_j\left(j = \overline{1,n}\right)$, кількість необхідних організму поживних речовин *m* та потреба в кожній *i*-ій речовині - $b_i\left(i = \overline{1,m}\right)$. В одиниці *j*-го продукту міститься $a_{ij}\left(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}\right)$ поживної речовини *i*. Необхідно знайти оптимальний раціон $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, що враховує вимоги забезпечення організму необхідною кількістю поживних речовин.

Критерій оптимальності - мінімальна вартість раціону.

Позначимо через $x_1, x_2, ..., x_n$ - кількість відповідного *j*-го виду продукту $(j = \overline{1,n})$. Система обмежень описуватиме забезпечення в раціоні кожної поживної речовини не нижче зазначеного рівня $b_i (i = \overline{1,m})$.

Економіко-математична модель матиме вигляд:

$$\min F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \geq b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + ... + a_{3n}x_n \geq b_3; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \geq b_m. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0.$$

Аналогічно як у виробничій задачі, економіко-математична модель задачі про «дієту» (або про суміш) також може описувати інші економічні процеси. По суті цей тип задач дає змогу знаходити оптимальне поєднання деякого набору компонент в одне ціле, причому таке поєднання має задовольняти певні умови.

Приклад 2. Стандартом передбачається, що октанове число бензину А-76 має бути не нижчим 76, а вміст сірки - не більшим, ніж 0,3 %. Для виготовлення такого бензину на заводі використовуються чотири компоненти. Дані про обсяги запасів компонентів, які змішуються, їх вартості, октанові числа та вміст сірки наведені в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Показник	Компонента бензину			
	№1	№2	№3	№4
Октанове число	68	72	80	90
Вміст сірки, %	0,35	0,35	0,30	0,20
Наявний обсяг, т	700	600	500	300
Вартість, грош. од./т	40	45	60	90

Необхідно визначити, скільки тонн кожного компонента потрібно використати для того, щоб отримати I 000 т бензину А-76 з мінімальною собівартістю.

Побудова економіко-математичної моделі.

Позначимо через x_j кількість *j*-го компонента в суміші (т), $j = 1, 2, 3, 4$. Перше обмеження забезпечує потрібне значення октанового числа в суміші:

$$68x_1 + 72x_2 + 80x_3 + 90x_4 \geq 76 \times 1000.$$

Вміст сірки в суміші має не перевищувати 0,3 %:

$$0{,}35x_1 + 0{,}35x_2 + 0{,}3x_3 + 0{,}2x_4 \leq 0{,}3 \times 1000,$$

а загальна маса утвореної суміші має дорівнювати 1000т:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000.$$

Використання кожного компонента має не перевищувати його наявного обсягу:

$$x_1 \leq 700;$$
$$x_2 \leq 600;$$
$$x_3 \leq 500;$$
$$x_4 \leq 300.$$

Собівартість суміші визначається за формулою:

$$F = 40x_1 + 45x_2 + 60x_3 + 90x_4.$$

Загалом, економіко-математична модель задачі має вигляд:

$$\min F = 40x_1 + 45x_2 + 60x_3 + 90x_4$$

за умов:

$$\begin{cases} 68x_1 + 72x_2 + 80x_3 + 90x_4 \geq 76000; \\ 0{,}35x_1 + 0{,}35x_2 + 0{,}3x_3 + 0{,}2x_4 \geq 300; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000; \\ x_1 \leq 700; \\ x_2 \leq 600; \\ x_3 \leq 500; \\ x_4 \leq 300; \end{cases} \quad ;$$

$$x_j \geq 0, (j = 1, 2, 3, 4).$$

1.6. Загальна економіко-математична модель задачі лінійного програмування

Загальна лінійна економіко-математична модель економічних процесів та явищ - так звана загальна задача лінійного програмування подається у вигляді:

$$\max(\min) Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{1.1}$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \{\leq, \geq, =\} b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \{\leq, \geq, =\} b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \{\leq, \geq, =\} b_m; \end{cases} \tag{1.2}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n > 0. \tag{1.3}$$

Отже, потрібно знайти значення змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які задовольняють умови (1.2) і (1.3), і цільова функція (1.1) набуває екстремального (максимального чи мінімального) значення.

Визначення 1. Вектор $X=(x_1,x_2,...,x_n)$, координати якого задовольняють систему обмежень (1.2) та умови невід'ємності змінних (1.3), називається допустимим розв'язком (планом) задачі лінійного програмування.

Визначення 2. Допустимий план $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ називається опорним планом задачі лінійного програмування, якщо він задовольняє не менше, ніж m лінійно незалежних обмежень системи (1.2) у вигляді рівностей, а також обмеження (1.3) щодо невід'ємності змінних.

Визначення 3. Опорний план $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ називається невиродженим, якщо він містить точно т додатних змінних, інакше він вироджений,

Визначення 4. Опорний план $X^*=(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$, за якого цільова функція (1.1) досягає максимального (чи мінімального) значення, називається оптимальним розв'язком (планом) задачі лінійного програмування.

1.7. Приклади та завдання для самостійної роботи

Для кожної з наведених задач побудувати числову модель задачі, записати модель в загально - математичній формі.

Задача 1.

Для вирощування сільськогосподарських культур сільськогосподарське підприємство має такі ресурси: ресурси праці -А1 люд.-год., матеріально - грошові ресурси - А2 грошових одиниць, земельні ресурси - А3 га., обсяг механізованих робіт - А4 умовних гектар. Вартість валової продукції складає(грошові одиниці за 1центнер):пшениця-18,овес-15,ячмінь-17,картопля-10,кормові буряки-7,однорічні трави-2. Витрати ресурсів на 1га кожної сільськогосподарської культури наведено в таблиці 1 2

Таблиця 1.2

Вид сільського сподарської культури	Витрати на 1 га посіву культури			Врожай-ність, ц/га
	Праці, люд.-год.	Матеріально-грошові витрати, грошові одиниці	Механізовани х робіт, умовні га.	
Пшениця	20	90	6	38
Ячмінь	15	60	4	18
Овес	17	50	5	15
Картопля	300	400	12	300
Кормові буряки	550	520	14	450
Однорічні трави	12	30	1	15

Скласти такий план вирощування сільськогосподарських культур, при якому вартість валової продукції буде максимальною. Значення A_i вибрати згідно з отриманим варіантом.

Задача 2.

Для складання кормового раціону є такі види кормів та їх ціна (грошові одиниці за 1 кілограм): концентрати - 1.0, сіно - 0.28, силос - 0.22, кормові коренеплоди - 0.34,солома -0.14.Раціон необхідно збалансувати по кормових одиницях, перетравному протеїнові .

Вміст кормових одиниць, перетравного протеїну та їх мінімальну потребу наведено в таблиці 1.3.

Скласти найбільш дешевий раціон, що повністю задовольняє потребу тварин в поживних речовинах. Значення B_i вибирати згідно з визначеним варіантом.

Таблиця 1.3.

Види	Вміст в 1 кг корму	
кормів	кормових одиниць, кг	перетравного протеїну, г
Концентрати	1,0	126
Сіно	0,42	51
Силос	0,17	12
Кормові коренеплоди	0,15	9
Солома	0,26	16
Мінімальна потреба в поживних речовинах	B1	B2

Задача 3.

Два трактори виконують три види сільськогосподарських робіт. Інші умови задачі наведено в таблиці 1.4.

Таблиця 1.4.

Види робіт	Продуктивність трактора за добу, умовні га		Витрати за добу, грош.од.		План, умовні га
	МТЗ-80	Т-150	МТЗ-80	Т-150	
Боронування	80	60	8,0	6,6	C1
Культивація	28	74	5,4	35,5	C2
Сівба	24	58	25,2	75,4	C3

Скласти такий план розподілу тракторів між видами робіт, щоб витрати були мінімальними, а термін роботи склав не більше 10 діб.

Задача 4.

Для виготовлення брусків довжиною D1,D2,D3 метрів в співвідношенні D4:D5:D6 на розпил надходять 195 колод довжиною 6 метрів. Визначити такий план розрізу колод, щоб забезпечити максимальну кількість комплектів.

1.8. Контрольні питання

1. Що таке математична модель?
2. Поняття оптимізаційної задачі.
3. Яка змінні є керованою, а яка некерованою?
4. Що таке цільова функція?
5. Що таке система обмежень?
6. Чому значення змінних не можуть бути від'ємними?
7. Які є правила розробки оптимізаційних моделей?
8. Який план називається допустимим, а який оптимальним?
9. Хто є родоначальником математичного програмування?
10. Який внесок до математичного програмування мають роботи Дж.Данцига?
11. Чим відомі праці Г. Куна І А. Танкера?
12. В чому полягає принцип Р. Белмана?

13. Наведіть класифікацію задач математичного програмування.
14. Наведіть приклади задач математичного програмування.
15. В чому полягає задача визначення оптимального плану виробництва?
16. В чому полягає задача про «дієту»?
17. Що є загальною задачею математичного програмування?
18. Що таке допустимий розв'язок (план) задачі лінійного програмування?
19. Який план називається опорним планом задачі лінійного програмування?
20. Який опорний план називається не виродженим?
21. Що є оптимальним розв'язком (планом) задачі лінійного програмування?

РОЗДІЛ 2

УНІВЕРСАЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЛІНІЙНИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ

2.1. Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування

Розглянемо на площині x_1Ox_2 сумісну систему лінійних нерівностей:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m. \end{cases} \tag{2.1}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Кожна нерівність цієї системи геометрично визначає півплощину з граничною прямою $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ (i = 1, 2, ...,т). Умови невід'ємності змінних визначають півплощини з граничними прямими $x_1 = 0$ та $x_2 = 0$. Система сумісна, тому півплощини як опуклі множини, перетинаючись, утворюють спільну частину, що є опуклою множиною і являє собою сукупність точок, координати кожної з яких є розв'язком даної системи (рис. 2.1).

Сукупність цих точок (розв'язків) називають багатокутником розв'язків, або областю допустимих планів (розв'язків) задачі лінійного програмування.

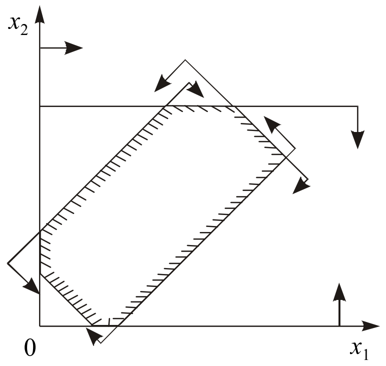


Рис. 2.1.Графічне зображення системи обмежень та умови невід'ємності змінних

Це може бути точка (єдиний розв'язок), відрізок, промінь, багатокутник, необмежена багатокутна область.

Якщо в системі обмежень (2.1) буде три змінних, то кожна нерівність геометрично визначатиме півпростір тривимірного простору, граничними площинами котрого будуть $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i$ ($i = 1, 2, ...,т$), а умови невід'ємності — півпростори з граничними площинами $x_j = 0$ ($j = 1, 2, 3$), де i — номер обмеження, а j — номер змінної. Якщо система обмежень сумісна, то ці півпростори як опуклі множини, перетинаючись, утворять у тривимірному просторі спільну частину, що називається багатогранником розв'язків. Він може бути точкою, відрізком, променем, багатокутником, багатогранником, багатогранною необмеженою областю.

Геометричну інтерпретацію задачі лінійного програмування розглянемо на прикладі. Підприємство переробки продукції виготовляє два види гірчиці. Гірчиця обох видів надходить в роздрібний продаж. Для виготовлення 1 кг гірчиці використовують: насіння гірчиці, яєчний порошок. Місячний запас сировини у відповідності до складів підприємства становить: насіння гірчиці - 4 т, яєчний порошок - 6 т. Витрати сировини на 1 т відповідних видів гірчиці приведені в табл. 2.1.

Обсяги продажу гірчиці "Російська" перевищують продажі гірчиці "Французька" на 1т в місяць. Оптові ціни однієї тони гірчиці складають: Гірчиця "Російська" – 3 тис. грн., а для Гірчиця "Французька" - 4тис. грн.

Таблиця 2.1

Сировина	Витрати сировини (у тонах) на тону		Місячний запас , т
	Гірчиця "Російська"	Гірчиця "Французька"	
Насіння гірчиці	1	2	4
Яєчний порошок	2	1	6

Яку кількість гірчиці кожного виду потрібно виробляти підприємству, щоб дохід від реалізації продукції був максимальним?

Побудуємо економіко-математичну модель задачі. Процес побудови математичної моделі для розв'язування поставленої задачі можна почати з словесного описання суті проблеми. Розглянуту ситуацію можна охарактеризувати в такий спосіб.

Підприємству потрібно визначити обсяги виробництва (у тонах) кожного виду продукції, які максимізують дохід (у тисячах ум. од.) від реалізації продукції, з урахуванням обмежень на обсяги продажу і обмежень на витрати сировини.

Труднощі побудови математичної моделі полягають в ідентифікації змінних і наступному представленні мети і обмежень у виді математичних функцій цих змінних. У розглядуваному випадку ми маємо наступне.

Змінні. Тому що потрібно визначити обсяги виробництва кожного виду плитки, то змінними в моделі є:

x_1 - добовий обсяг виробництва Гірчиця "Російська" (у тонах),

x_2 - добовий обсяг виробництва Гірчиця "Французька" (у тонах).

Цільова функція. Тому що вартість 1 т Гірчиця "Російська" дорівнює 3 тис. ум. од., місячний дохід від її реалізації складе $3x_1$ тис. ум. од. Аналогічно дохід від реалізації x_2 тон Гірчиця "Французька" складе $4x_2$ тис. ум. од. в місяць.

Позначивши загальний дохід (у тис. ум. од.) через *z*. Можна дати наступне математичне формулювання цільової функції: визначити (допустимі) значення x_1 і x_2, які максимізують величину загального доходу

$$z = 3x_1 + 4x_2 .$$

Обмеження. При розв'язуванні розглядуваної задачі повинні бути враховані обмеження на витрату сировини і попит на продукт, який виготовляють. Обмеження на витрати сировини можна записати в такому вигляді: витрати менше або дорівнюють запасам.

Таким чином маємо наступні обмеження:

$x_1 + 2x_2 \le 4$ (для Гірчиця "Російська"),

$2x_1 + x_2 \le 6$ (для Гірчиця "Французька"),

$x_1 \ge 1 + x_2$ (співвідношення величин продажу на гірчицю).

Очевидне обмеження полягає в тім, що обсяги виробництва продукції не можуть приймати негативних значень, тобто бути менше нуля.

$x_1 \ge 0$ (обсяг виробництва для Гірчиця "Російська"),

$x_2 \ge 0$ (обсяг виробництва Гірчиця "Французька").

Отже, математичну модель можна записати в такий спосіб. Визначити добові обсяги виробництва $(x_2$ і $x_1)$ гірчиці "Російська" та "Французька" (у тонах), при яких досягається максимум доходу.

Цільова функція: $\max z = 3x_1 + 4x_2$,

Система обмежень: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 6 \\ -x_1 + x_2 \ge 1 \end{cases}$

Умова невід'ємності змінних: $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

Що визначає лінійний характер побудованої моделі?

З формальних позицій дана модель є лінійною тому, що усі функції, які в неї входять: обмеження і цільова функція, є лінійними.

2.2. Алгоритм графічного методу розв’язування оптимізаційних задач програмування

Графічним методом можна розв’язувати задачі, в яких тільки дві змінних, або кількість лінійно-незалежних змінних є дві. Отже, ранг матриці системи обмежень дорівнює 2.

1. Побудова багатокутника розв’язків.

Визначення 1. Багатокутником розв’язк5ів називається така обмежена чи необмежена фігура, координати кожної точки якої є невід’ємними та задовольняють всім обмеження системи обмежень.

Багатокутник розв’язків будується за системою обмежень та умовою невід’ємності змінних.

Шукана область розв’язків показана на рис. 2.2. Умови невід’ємності змінних $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ обмежують область їхніх допустимих значень першим квадрантом. Інші границі простору розв’язків зображені на площині x_1ox_2 прямими лініями, які побудовані за рівняннями, які отримані при заміні знака ≤ на знак = в усіх обмеженнях. Області, у яких виконуються відповідні обмеження у виді нерівностей, указуються стрілками, які направлені у сторону допустимих значень змінних. В такий спосіб отримано багатокутник розв’язків — багатокутник ABCDEF, який на рис. 2.1 заштрихований.

У кожній точці, що належить внутрішній області або границям багатокутника розв’язків ABCDEF, всі обмеження виконуються, тому розв’язки, що відповідають цим точкам, є допустимими.

2. Графічне відображення цільової функції.

Цільову функцію графічно можна представити у вигляді вектора - градієнта та лінії рівня.

Визначення 2. Вектор – градієнт це вектор, який виходить з початку координат та направлений до точки з координатами, що є частинними похідними цільової функції по змінним. Вектор – градієнт показує напрямок зростання значень цільової функції. Якщо цільова функція задачі є лінійною, то вершина вектора-градієнта визначається коефіцієнтами цільової функції.

Для нашого прикладу вектор – градієнт напрямлений до точки (3,2)

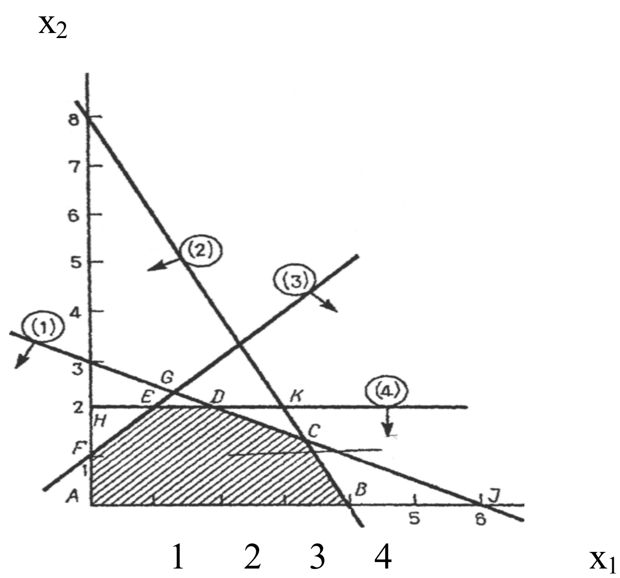


Рис. 2.2.Побудова багатокутника розв'язків:

Обмеження $x_1 + 2x_2 \le 6$ (1), $2x_1 + x_2 \le 8$ (2), $-x_1 + x_2 \le 1$ (3),

$x_2 \le 2$ (4), $x_1 \ge 0$ (5), $x_2 \ge 0$ (6).

Визначення 3. Лінія рівня – це лінія, координати будь-якої точки якої при підстановці у цільову функцію визначають рівні значення. Лінія рівня завжди перпендикулярна до вектора-градієнта.

Багатокутник розв'язків містить нескінченне число таких точок, але, незважаючи на це, можна знайти оптимальний розв'язок, якщо з'ясувати, у якому напрямку зростає цільова функція моделі $z = 3x_1 + 2x_2$. На рис. 3.2 показано, як здійснюється така операція. На графік наносять ряд паралельних ліній, що відповідають рівнянню цільової функції при декількох довільно обраних і послідовно зростаючих значеннях z, що дозволяє визначити нахил цільової функції і напрям, у якому відбувається її збільшення (тобто зростання загального доходу). На рис. 3.2 використані наступні значення цільової функції: $z = 6$ і $z = 9$.

3. Визначення точки (або точок), де знаходиться оптимальний

розв’язок задачі.

Щоб знайти оптимальний розв’язок, потрібно переміщувати пряму, що характеризує дохід (цільову функцію), у напрямку зростання цільової функції, тобто у напрямку вектора-градієнта, доти, поки вона не зміститься на межу допустимих і недопустимих розв’язків На рис. 2.3 видно, що оптимальному розв’язку відповідає точка С. Тому що точка С є точкою перетинання прямих (1) і (2) (див. мал. 3.1). Значення x_1 і x_2 в цій точці визначаються розв’язком наступної системи двох рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \le 8. \end{cases}$$

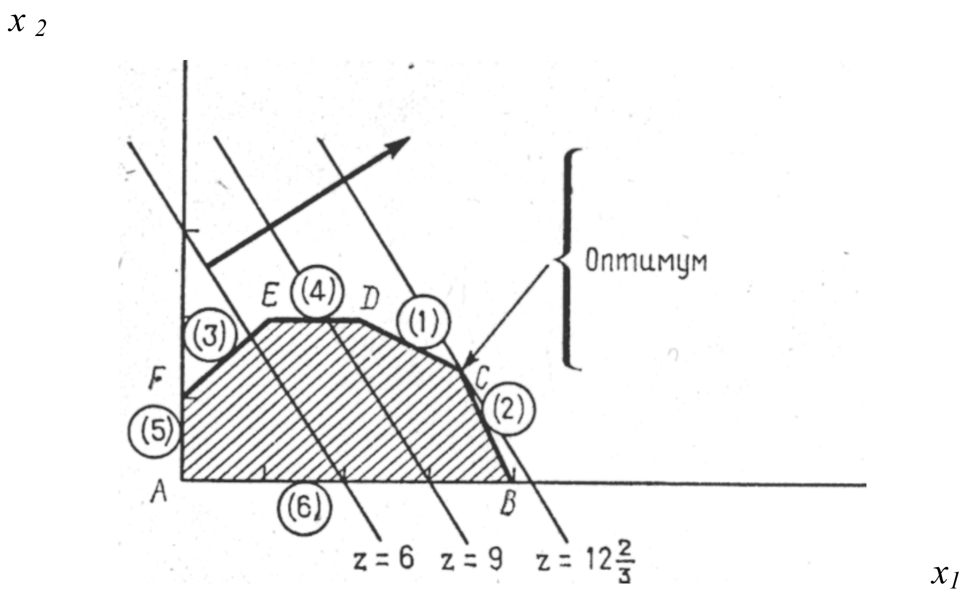


Рис. 2.3. Графічне зображення цільової функції

Розв’язок зазначеної системи рівнянь дає наступний результат: $x_1 = 10/3$, $x_2 = 4/3$. Отриманий розв’язок означає, що добовий обсяг виробництва гірчиці Російська повинен дорівнювати 10/3 т, а гірчиці Французька — 4/3 т. Дохід, який одержуватимуть у цьому випадку, складе

$$z = 3 \times \frac{10}{3} + 2 \times \frac{4}{3} = 12\frac{2}{3}$$

Таким чином, для того, щоб отримати максимальний дохід 12, 67 тис. умовних одиниць, гірчиці Російська слід виготовляти 3,33 тонни, а гірчиці Французька – 1,33 тонни.

Результати, що отримані при розв'язуванні задач графічним методом, виявили цікаву закономірність - оптимальний розв'язок завжди відповідає одній з допустимих кутових (або екстремальних) точок простору розв'язків (на рис. 2.3. це точки A, B, C, D, E і F). Яка з цих точок виявиться оптимальною, залежить від нахилу прямої, що представляє цільову функцію (тобто від коефіцієнтів цільової функції). Відмітимо, що навіть для випадків, при яких оптимальний розв'язок досягається не в одній точці, всі альтернативні оптимальні розв'язки знаходяться після того, як визначені всі кутові точки - вершини багатокутника розв'язків.

У разі застосування графічного методу для розв'язування задач лінійного програмування можливі такі випадки:

1. Цільова функція набирає максимального значення в єдиній вершині A багатокутника розв'язків (рис. 2.4).

2. Максимального значення цільова функція досягає в будь-якій точці відрізка AB (рис. 2.5). Тоді задача лінійного програмування має альтернативні оптимальні плани.

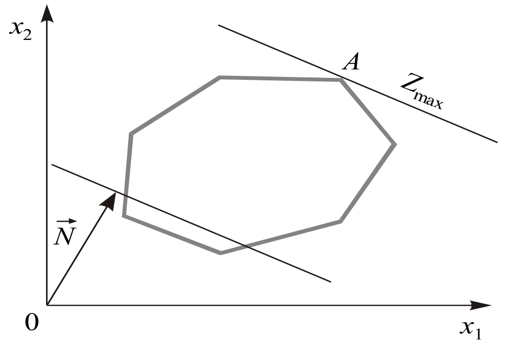


Рис. 2.4. Оптимальне значення знаходиться в точці A

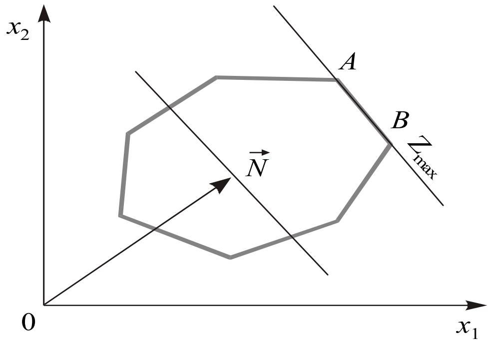


Рис. 2.5. Оптимальні значення знаходяться в точках відрізку AB

3. Задача лінійного програмування не має оптимальних планів: якщо цільова функція необмежена згори (рис. 2.6) або система обмежень задачі несумісна (рис. 2.7).

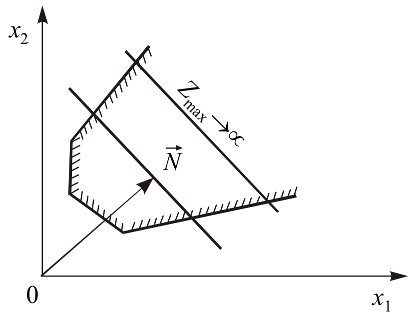


Рис. 2.6. Цілова функція необмежена зверху

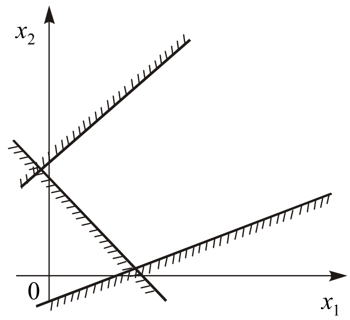
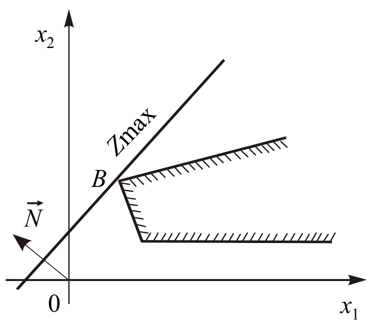
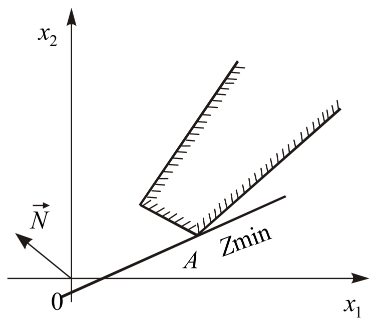


Рис. 2.7. Система обмежень задачі є пустою множиною

4. Задача лінійного програмування має оптимальний план за необмеженої області допустимих розв'язків (рис. 2.8). На рис. 2.8-а) у точці В маємо максимум, на рис. 2.8-б) у точці А — мінімум.



а)



б)

Рис. 2.8.Задача має оптимальний план за необмеженим багатокутником розв'язків

2.3. Основи аналізу на чутливість

Аналіз моделей на чутливість — це процес, який реалізується після того, як оптимальний розв'язок задачі отриманий. В рамках такого аналізу виявляється чутливість оптимального розв'язку до визначених змін вихідної моделі. В розв'язаній задачі, наприклад, може становити інтерес питання про те, як вплине на оптимальний розв'язок збільшення, зменшення попиту або зміни запасів вихідних продуктів. Можливо, також буде потрібно визначити вплив на оптимальний розв'язок змін ринкових цін.

При такому аналізі завжди розглядається деяка сукупність лінійних оптимізаційних моделей, тобто власне кажучи, деяка модель дослідження операцій. Це додає моделі визначену динамічність, що дозволяє дослідникові проаналізувати вплив можливих змін вихідних умов на отриманий раніше оптимальний розв'язок. Динамічні характеристики моделей фактично відображають аналогічні характеристики, які властиві реальним процесам. Відсутність методів, що дозволяють виявити вплив можливих змін параметрів моделі на оптимальне розв'язування, може привести до того, що отриманий (статичний) розв'язок застаріє ще до своєї реалізації.

У даному розділі для проведення аналізу моделі на чутливість використовуються графічні методи.

Перша задача аналізу на чутливість. На скільки можна скоротити або збільшити запаси ресурсів?

Після знаходження оптимального розв'язку представляється цілком логічним з'ясувати, як відіб'ється на оптимальному розв'язку рішення змінити запаси ресурсів. Особливо важливо проаналізувати наступні два аспекти.

1. На скільки можна збільшити запас деякого ресурсу для поліпшення отриманого оптимального значення цільової функції z ?

2. На скільки можна знизити запас деякого ресурсу при збереженні отриманого оптимального значення цільової функції?

Тому, що величина запасу кожного з ресурсів фіксується в правих частинах обмежень, цей вид аналізу звичайно ідентифікується як аналіз моделі на чутливість до правої частини обмежень.

Перш ніж відповісти на поставлені запитання, класифікуємо обмеження лінійної моделі як активні і неактивні. Пряма, що представляє активне обмеження, повинна проходити через оптимальну точку. У іншому випадку відповідне обмеження буде неактивним. На мал. 2.2 активними обмеженнями є тільки обмеження (1) і (2), тобто ті, котрі лімітують запаси вихідних продуктів (ресурсів) А і В.

Якщо деяке обмеження є активне, то логічно віднести відповідний ресурс до розряду дефіцитних ресурсів, тому що він використовується повністю. Ресурс, з яким асоційоване неактивне обмеження, варто віднести до розряду недефіцитних ресурсів (тобто наявних у деякому надлишку). Таким чином, при аналізі моделі на чутливість до правих частин обмежень визначаються:

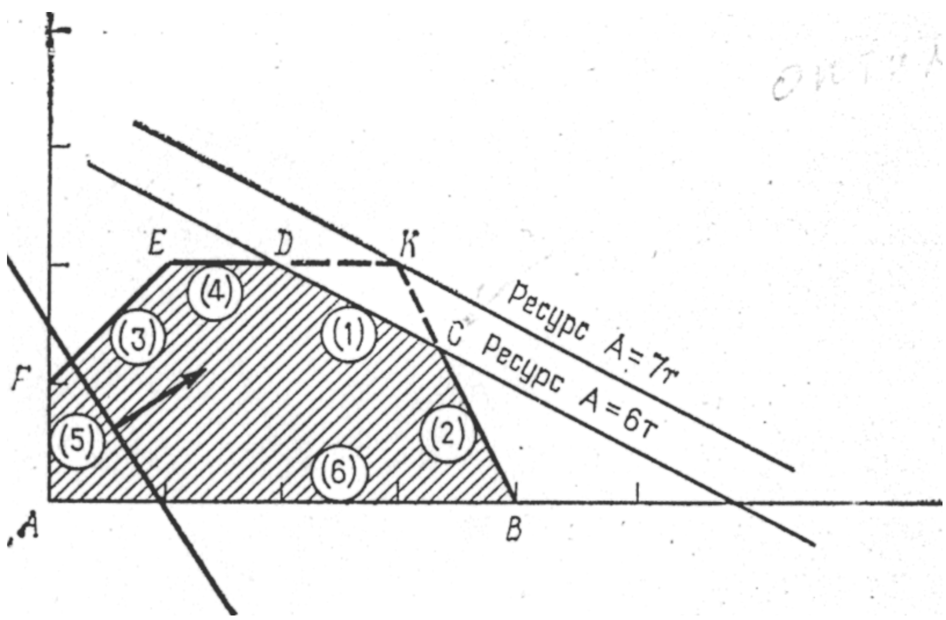
1) гранично допустиме збільшення запасу дефіцитного ресурсу, що дозволяє поліпшити знайдений оптимальний розв'язок,

2) гранично допустиме зниження запасу недефіцитного ресурсу, що не змінює знайденого раніше оптимального значення цільової функції. Інформація, яка отримана в останньому випадку, особливо корисна в тих ситуаціях, коли надлишки недефіцитного ресурсу можуть бути використані для інших цілей.

Може виникнути питання: чи не варто проаналізувати, як уплине на оптимум збільшення обсягу ресурсів, що мають надлишок, і скорочення обсягу дефіцитних ресурсів? Відповідь на першу частину питання очевидний, тому що в цьому випадку ми спробували б зробити і без того надлишковий ресурс ще більш надлишковим, що ніяк не вплине на отриманий раніше розв'язок. Друга частина запитання заслуговує на особливу увагу, тому що при можливих недопоставках дефіцитного ресурсу важливо знати, як це позначиться на результатах розв'язування задачі. Однак очевидно, що скорочення обсягу дефіцитного ресурсу ніколи не поліпшує значення цільової функції.

Звернемося знову до конкретного прикладу. У розв’язуваній задачі використовувані продукти А и В (обмеження (1) і (2)) є дефіцитними ресурсами. Розглянемо спочатку ресурс А. На рис. 2.9 видно, що при збільшенні запасу цього ресурсу пряма (1) (або відрізок CD) переміщається вверх паралельно сама собі, поступово «стягаючи» у точку трикутник CDK.

x_2



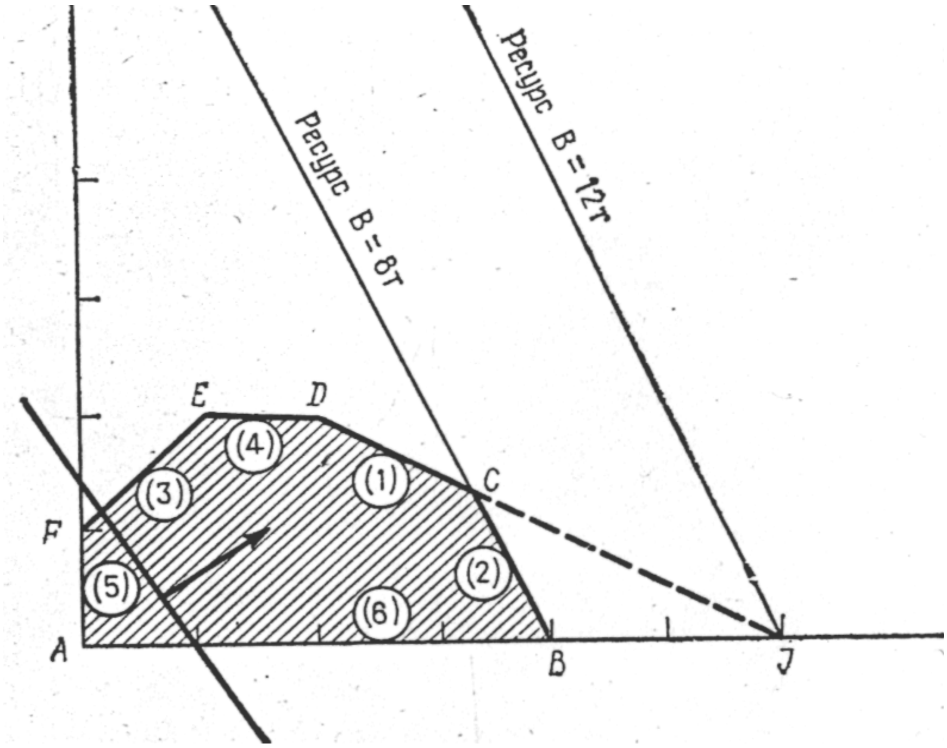
Мал. 2.9. $\boldsymbol{C}(3\frac{1}{3},1\frac{1}{3}); z = 12\frac{1}{3}; \quad \boldsymbol{K}(3,2); z = 13.$ x_1

(Сторони CK і DK цього трикутника являють собою продовження прямих, що відповідають обмеженням (2) і (4).) У точці K обмеження (2) і (4) стають активними, оптимальному розв’язку при цьому відповідає точка K, а простір (допустимих) розв’язків стає багатокутник ABKEF. У точці K обмеження (1) (для ресурсу А) стає надлишковим, тому що будь-який подальший ріст запасу відповідного ресурсу не впливає ні на простір розв’язків, ні на оптимальне розв’язування. Таким чином, обсяг ресурсу А не слід збільшувати більше тієї межі, коли відповідне йому обмеження (1) стає надлишковим, тобто пряма (1) проходить через нову оптимальну точку K. Цей граничний рівень визначається в такий спосіб. По-перше, визначаються координати точки K, у якій перетинаються прямі (2) і (4), тобто знаходиться розв'язок системи рівнянь

$$2x_1 + x_2 = 8 \qquad \text{(пряма (2))},$$

$$x_2 = 2 \qquad \text{(пряма (4))}.$$

x_2



Мал. 2.10. $\boldsymbol{C}\left(3\frac{1}{3};1\frac{1}{3}\right)$; $z = 12\frac{1}{3}$; $\boldsymbol{J}(6;0)$; $z = 18$. x_1

У результаті виходить $x_1 = 3$ і $x_2 = 2$. Потім шляхом підстановки координат точки K в ліву частину обмеження (1) визначається максимально допустимий запас ресурсу A:

$$x_1 + 2x_2 = 3 + 2 \times 2 = 7\text{т}.$$

Рисунок 2.10. ілюструє ситуацію, коли розглядається питання про доцільність збільшення запасу дефіцитного ресурсу (2) (вихідні продукти B).

Новою оптимальною точкою стає точка *J*, де перетинаються прямі (6) і (1), тобто $x_2 = 0$ і $x_1 + 2x_2 = 6$. Звідси випливає, що $x_1 = 6$, $x_2 = 0$, причому запас продукту Французька можна збільшити до значення, яке дорівнює $2x_1 + x_2 = 2 \times 6 + 1 \times 0 = 12т$.

Розглянемо тепер питання про зменшення правої частини неактивних обмежень. Обмеження (4), $x_2 \leq 2$, фіксує граничний рівень попиту на гірчицю Французька. З мал. 3.2 випливає, що, не змінюючи оптимального розв'язку, пряму (4) (ED) можна опускати вниз до перетину з оптимальною точкою С. Тому що точка С має координати $x_1 = 10/3$ і $x_2 = 4/3$, зменшення попиту на гірчицю Французька до величини $x_2 = 4/3$ ніяк не вплине на оптимальність раніше отриманого розв'язку.

Розглянемо обмеження (3), $-x_1 + x_2 \leq 1$, що представляє співвідношення між попитом на гірчицю Французька і попиті на гірчицю Російська. І в цьому випадку праву частину обмеження можна зменшувати доти, поки пряма (3) (EF) не досягне точки С. При цьому права частина обмеження (3) стане рівною $-x_1 + x_2 = (-10/3) + (4/3) = -2$, що дозволяє записати це обмеження у виді: $-x_1 + x_2 \leq -2$, або в еквівалентній формі: $x_1 - x_2 \geq 2$. Цей результат показує, що раніше отриманий оптимальний розв'язок не зміниться, якщо попит на гірчицю Російська перевищить попит на гірчицю Французька не більше ніж на 2 т.

Друга задача аналізу на чутливість. Збільшення обсягу якого з ресурсів найбільше вигідно? У першій задачі аналізу на чутливість ми досліджували вплив на оптимум збільшення обсягу дефіцитних ресурсів (тобто зміни активних обмежень). При обмеженнях на витрати, які зв'язані з додатковим залученням ресурсів (що характерно для більшості економічних задач), природно поставити запитання: якому з ресурсів варто віддати перевагу при вкладенні додаткових капіталовкладень? За допомогою методів лінійного програмування удається відповісти і на таке питання. Для цього вводиться характеристика цінності кожної додаткової одиниці дефіцитного ресурсу, що виражається через відповідне збільшення оптимального значення цільової функції. Таку характеристику для розглянутого приклада можна одержати безпосередньо з таблиці, у якій приведені результати розв'язування першої задачі аналізу на чутливість.

Третя задача аналізу на чутливість. У яких межах допустима зміна коефіцієнтів цільової функції?

Зміна коефіцієнтів цільової функції впливає на нахил прямої, що представляє цю функцію в прийнятій системі координат. Раніше було показало, що ідентифікація конкретної кутової точки в якості оптимуму залежить, насамперед від нахилу цієї прямої. Це значить, що варіація коефіцієнтів цільової функції може привести до зміни сукупності активних обмежень і, отже, статусу того або іншого ресурсу (тобто зробити недефіцитний ресурс дефіцитним, і навпаки). Таким чином, у рамках аналізу моделі на чутливість до змін коефіцієнтів цільової функції можуть досліджуватися наступні питання.

1. Який діапазон зміни (збільшення або зменшення) того або іншого коефіцієнта цільової функції, при якому не відбувається зміни оптимального розв'язування?

2. Наскільки варто змінити той або інший коефіцієнт цільової функції, щоб зробити деякий не дефіцитний ресурс дефіцитним і, навпаки, дефіцитний ресурс зробити недефіцитним?

2.4. Симплексний метод

2.4.1. Графічна інтерпретація симплексного методу

Із вищевикладеного випливає, що якщо задача лінійного програмування має оптимальний розв'язок, то він відповідає хоча б одній кутовій точці багатогранника розв’язків і збігається, принаймні, з одним із допустимих (опорних) розв’язків системи обмежень. Для того, щоб розв’язати будь-яку задачу лінійного програмування, треба перебрати кінцеве число допустимих розв’язків системи обмежень і вибрати серед них той розв’язок, при якому функція мети приймає оптимальне значення. Геометрично це відповідає перебору всіх кутових точок багатогранника розв’язків. Такий перебір зрештою приведе до оптимального розв’язку (якщо він існує), однак його практичне здійснення зв'язане з великими труднощами, тому що для реальних задач число допустимих базисних розв’язків може бути надзвичайно великим.

Число допустимих базисних розв’язків, що перебираються, можна скоротити, якщо робити перебір не безладно, а з урахуванням змін функції мети, тобто домагаючись того, щоб кожен наступний розв’язок був "кращий" (чи, принаймні, "не гірший"), чим попередній, за значеннями лінійної функції мети (збільшення її при відшукуванні максимуму $F \to \max$, зменшення - при відшукуванні мінімуму $F \to \min$). Такий перебір дозволяє скоротити число кроків при відшукуванні оптимуму.

Ідея послідовного поліпшення розв’язків лягла в основу універсального методу розв’язання задач лінійного програмування - симплексного методу.

Геометричний зміст симплексного методу полягає в послідовному переході від однієї вершини багатогранника обмежень (яку називають початковою) до сусідньої, у якій лінійна функція приймає краще (принаймні, не гірше) значення.

Симплексний метод дозволяє розв’язати будь-яку задачу лінійного програмування (є універсальний). В даний час він використовується для комп'ютерних розрахунків, однак нескладні приклади з застосуванням симплексного методу можна вирішувати і вручну.

Для реалізації симплексного методу - послідовного поліпшення розв’язку - необхідно освоїти три основних елементи:

- спосіб визначення якого-небудь первісного допустимого (опорного) розв’язку задачі;
- правило переходу до кращого (точніше, не гіршого) розв’язку;
- критерій перевірки оптимальності знайденого розв’язку.

Для використання симплексного методу задача лінійного програмування повинна бути приведена до канонічного виду, тобто система обмежень повинна бути представлена у виді рівнянь. Алгоритм конкретної обчислювальної реалізації цих елементів розглянемо на прикладі.

2.4.2. Форма запису задачі лінійного програмування. Визначення первинного допустимого базисного розв’язку

Визначення. Загальною формою запису задачі лінійного програмування називається така форма запису, система обмежень якої складається з рівнянь та нерівностей, цільова функція може бути спрямована як на максимум так і на мінімум. Загальна лінійна математична модель економічних процесів і подається у вигляді:

Цільова функція $$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min) \qquad (2.2)$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \{\le, \ge, =\} b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \{\le, \ge, =\} b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \{\le, \ge, =\} b_m \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0. \qquad (2.3)$$

Задачу ЛП (ЗЛП) зручно записувати за допомогою знака суми «Σ». Справді, задачу (2.2)—(2.3) можна подати так:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m);$$
$$x_j \geq 0 \left(j = 1, 2, \ldots, n \right).$$

Ще компактнішим є запис ЗЛП у матричному вигляді:

$$Z = CX \to \max$$

за умов

$$AX = A_0,$$
$$X \geq 0,$$

де

$$A = \left\{ a_{ij} \right\} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn} \end{pmatrix}$$

є матриця коефіцієнтів при змінних

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матриця - стовпець змінних; $A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ – матриця - стовпець вільних членів;

$C = \left(c_1, c_2, \ldots, c_n \right)$ — матриця - рядок коефіцієнтів при змінних у цільовій функції.

Часто ЗЛП зручно записувати у векторній формі:

$$Z = \vec{C} \cdot \vec{X} \to \max$$

за умов

$$\vec{A}_1 x_1 + \vec{A}_2 x_2 + \ldots + \vec{A}_n x_n = \vec{A}_0,$$
$$\vec{X} \geq 0,$$

де

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \qquad \vec{A}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

є вектори коефіцієнтів при змінних.

Визначення першого опорного плану починають із запису задачі лінійного програмування в канонічній формі.

Визначення. Канонічною формою запису задачі лінійного програмування називається така форма запису, система обмежень якої складається лише з рівнянь та праві частини цих рівнянь є невід'ємними.

Якщо в умові задачі присутні обмеження-нерівності, то перетворення їх на рівняння виконується за допомогою введення *додаткових змінних,* які вводяться до лівої частини обмежень:

1. Якщо обмеження має тип «≤», то додаткова змінна вводиться з коефіцієнтом «+1», економічно вона позначає залишок або резерв відповідного ресурсу.

2. Якщо обмеження має тип «≥», то додаткова змінна вводиться з коефіцієнтом «-1»,економічно вона позначає надлишок відповідного ресурсу або вміст речовини понад мінімальну потребу (отримання продукції понад план).

У цільовій функції задачі додаткові змінні мають коефіцієнт нуль.

Після зведення задачі до канонічного вигляду її записують у векторній формі. За означенням опорного плану задачі лінійного програмування його утворюють m одиничних лінійно незалежних векторів, які становлять базис m-вимірного простору (де m - кількість обмежень у задачі лінійного програмування).

На цьому етапі розв'язування задачі можливі такі випадки:

- після запису задачі у векторній формі в системі обмежень є необхідна кількість одиничних векторів. Тоді початковий опорний план визначається безпосередньо без додаткових дій;

• у системі обмежень немає необхідної кількості одиничних незалежних векторів. Тоді для побудови першого опорного плану застосовують *метод штучного базису.* Ідея його полягає в тому, що відсутні одиничні вектори можна дістати, увівши до відповідних обмежень деякі змінні з коефіцієнтом +1, які називаються *штучними.* У цільовій функції задачі лінійного програмування штучні змінні мають коефіцієнт +*M* (для задачі на min) або -M (для задачі на max), де *M*— досить велике додатне число.

Штучні змінні економічного змісту не мають.

Визначені одиничні лінійно незалежні вектори утворюють базис, і змінні задачі, що відповідають їм, називають *базисними,* а всі інші змінні — *вільними,* їх прирівнюють до нуля та з кожного обмеження задачі визначають значення базисних змінних. У такий спосіб отримують початковий опорний план задачі лінійного програмування.

Узагальнений алгоритм симплексного методу складається з двох кроків:

Крок 1.Перевірка розв’язку на оптимальність. Якщо розв’язок є оптимальним, то алгоритм закінчено, інакше крок 2.

Крок 2. Схема отримання нового опорного розв’язку задачі, який є незгіршим ніж попередній. Перехід до Кроку 1.

Визначені одиничні лінійно незалежні вектори утворюють базис, і змінні задачі, що відповідають їм, називають базисними, а всі інші змінні — вільними. Їх прирівнюють до нуля та з кожного обмеження задачі визначають значення базисних змінних. У такий спосіб отримують початковий опорний план задачі лінійного програмування

Приклад 1. Потрібно визначити оптимальне поєднання посівів трьох культур: капусти, томатів та багаторічних трав при умові, що господарство має 850 га ріллі, 50тис.люд.-днів трудових ресурсів та 15тон органічних добрив. Витрати цих ресурсів, а також вихід вартості валової продукції в розрахунку на 1 га посіву культур наведено в таблиці

Показники	культури			наявність ресурсу
	капуста	томати	багаторічні трави	
Витрати праці, люд.-дні	50	30	15	5000
Витрати добрив, т	20	15	10	15000
Вартість валової продукції, грош.од.	1000	800	200	

Побудуємо математичну модель задачі. Позначимо за x_1- посівну площу капусти, x_2- посівну площу томатів, x_3- посівну площу багаторічних трав.

Цільова функція задачі – максимум вартості валової продукції, грошові одиниці:

$Z=1000*x_1+800*x_2+200*x_3 \rightarrow max.$

Система обмежень:

1. по використанню ріллі, га:
   $x_1+x_2+x_3\leq 850;$
2. по використанню трудових ресурсів, люд.-дні:

$50*x_1+30*x_2+15*x_3\leq 5000;$

3. по використанню добрив, т:
   $20*x_1+15*x_2+10*x_3\leq 15000$

   Умова невід'ємності змінних:

$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0.$

Розв'язок задачі.

Крок.1 Визначимо канонічну форму запису.

При переході до канонічної форми запису вводяться додаткові змінні, які мають такий економічний зміст:

X_4 – залишок (резерв) ріллі,

X_5– залишок (резерв) трудових ресурсів,

X_6– залишок (резерв) добрив.

Канонічна форма запису:

$Z=1000*x_1+800*x_2+200*x_3 +x_4+x_5+x_6\rightarrow max.$

$x_1+x_2+x_3+x_4=850;$

$50*x_1+30*x_2+15*x_3+x_5=5000;$

$20*x_1+15*x_2+10*x_3+x_6=15000$

$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0.$

Випишемо матрицю системи обмежень:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 50 & 30 & 15 & 0 & 1 & 0 \\ 20 & 15 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Одиничними є вектори змінних x_4, x_5, x_6. кількість одиничних векторів три, кількість обмежень три. Висновок – задача є невиродженою, штучні змінні вводити не потрібно.

Базисні змінні – x_4, x_5, x_6. небазисні – x_1, x_2, x_3.

Початковий розв'язок задачі:

$x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$,

$x_4=850$, $x_5=50000$, $x_6=15000$, $Z=0$.

2.4.3. Алгоритм розв’язання оптимізаційної задачі симплексним методом у симплексних таблицях

Алгоритм розв’язування задачі лінійного програмування симплекс-методом складається з п’яти етапів:

- 1. Визначення початкового опорного плану задачі лінійного програмування.
- 2. Побудова симплексної таблиці.
- 3. Перевірка опорного плану на оптимальність за допомогою оцінок $Z_j – C_j$. Якщо всі оцінки задовольняють умову оптимальності, то визначений опорний план є оптимальним планом задачі. Якщо хоча б одна з оцінок $Z_j – C_j$ не задовольняє умову оптимальності, то переходять до нового опорного плану або встановлюють, що оптимального плану задачі не існує.
- 4. Перехід до нового опорного плану задачі виконується визначенням розв’язувального елемента та розрахунком нової симплексної таблиці.
- 5. Повторення дій починаючи з п. 3.

Розглянемо кожен крок детально.

1. Як визначити початковий план мі визначили з попереднього пунку.

2. Подальший обчислювальний процес та перевірку опорного плану на

оптимальність подають у вигляді симплексної таблиці.

У першому стовпчику таблиці — «Базис» — записують базисні змінні опорного плану, причому в тій послідовності, в якій вони розміщуються в системі обмежень задачі.

Наступний стовпчик симплексної таблиці — «$C_{\text{баз}}$» — коефіцієнти при базисних змінних у цільовій функції задачі.

У третьому стовпчику — «План» — записують значення базисних змінних і відшукувані у процесі розв’язування задачі компоненти оптимального плану.

У решті стовпчиків симплексної таблиці, кількість яких відповідає кількості змінних задачі, записують відповідні коефіцієнти з кожного обмеження задачі лінійного програмування.

3. Перевіряють опорний план на оптимальність згідно з наведеною далі теоремою.

Ознака оптимальності опорного плану. Опорний план $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ задачі лінійного програмування є оптимальним, якщо для всіх j $(j = \overline{1,n})$ виконується умова

$$Z_j - C_j \geq 0 \qquad \text{(для задачі на max)}$$

або

$$Z_j - C_j \leq 0 \qquad \text{(для задачі на min)}$$

Якщо для побудови опорного плану було використано метод штучного базису, необхідною умовою оптимальності є також вимога, щоб у процесі розв’язування задачі всі штучні змінні були виведені з базису і дорівнювали нулю.

Значення оцінок $Z_j - C_j$ визначають за формулою

$$\Delta_j = Z_j - C_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j \qquad (j = \overline{1,n})$$

або безпосередньо із симплексної таблиці як скалярний добуток векторів-стовпчиків «$C_{\text{баз}}$» та «x_j» мінус відповідний коефіцієнт C_j. Розраховані оцінки записують в окремий рядок симплексної таблиці, який називають ***оцінковим***.

У процесі перевірки умови оптимальності можливі такі випадки:

а) усі $\Delta_j \left(j=\overline{1,n}\right)$ задовольняють умову оптимальності, і тоді визначений опорний план є оптимальним;

б) не всі Δ_j задовольняють умову оптимальності, і тоді потрібно виконати перехід до наступного, нового опорного плану задачі.

4. Перехід від одного опорного плану до іншого виконується зміною базису, тобто виключенням з нього деякої змінної та введенням замість неї нової з числа вільних змінних задачі.

Змінна, яка включається до нового базису, відповідає тій оцінці $Z_j - C_j$, що не задовольняє умову оптимальності. Якщо таких оцінок кілька, серед них вибирають найбільшу за абсолютною величиною і відповідну їй змінну вводять до базису. Припустимо, що індекс зазначеної змінної $j = k$. Відповідний стовпчик симплексної таблиці називають ***напрямним або розв'язальним.***

Для визначення змінної, що має бути виключена з базису, знаходять для всіх додатних a_{ik} напрямного стовпчика величину $\theta = b_i / a_{ik}$. Вибирають найменше значення θ, яке вказує на змінну, що виводиться з базису. Припустимо, що це виконується для $i = r$. Відповідний рядок симплексної таблиці називатиметься ***напрямним або розв'язальним***.

Перетином напрямного стовпчика та напрямного рядка визначається число симплексної таблиці a_{rk}, яке називають ***розв'язувальним елементом***. За допомогою елемента a_{rk} і методу Жордана- Гаусса розраховують нову симплексну таблицю.

Далі ітераційний процес повторюють доти, доки не буде визначено оптимальний план задачі.

У разі застосування симплекс-методу для розв'язування задач лінійного програмування можливі такі випадки.

1. Якщо в оціночному рядку останньої симплексної таблиці оцінка $Z_j - C_j = 0$ відповідає вільній (небазисній) змінній, то це означає, що задача лі-

нійного програмування має альтернативний оптимальний план. Отримати його можна, вибравши розв'язувальний елемент у зазначеному стовпчику таблиці та здійснивши один крок симплекс-методом.

2. Якщо при переході у симплекс-методі від одного опорного плану задачі до іншого в напрямному стовпчику немає додатних елементів a_{ik}, тобто неможливо вибрати змінну, яка має бути виведена з базису, то це означає, що цільова функція задачі лінійного програмування є необмеженою й оптимальних планів не існує.

3. Якщо для опорного плану задачі лінійного програмування всі оцінки $Z_j - C_j \ (j = \overline{1,n})$ задовольняють умову оптимальності, але при цьому хоча б одна штучна змінна є базисною і має додатне значення, то це означає, що система обмежень задачі несумісна й оптимальних планів такої задачі не існує.

Приклад 1. Розглянемо розв'язання симплексним методом задачі, що розглядалась в попередньому пункті.

Перша симплексна таблиця.

№	БП	Сб	Ро	**1000**	800	200	0	0	0	Q
				x1	x2	x3	x4	x5	x6	
1	x4	0	850	**1**	1	1	1	0	0	850
2	x5	0	50000	**50**	30	15	0	1	0	1000
3	**x6**	**0**	**15000**	**20**	**15**	**10**	**0**	**0**	**1**	**750**
m+1	Δ_j		0	**-1000**	-800	-200	0	0	0	

Елементи останнього рядка симплекс-таблиці є оцінками Δ_j, за допомогою яких опорний план перевіряють на оптимальність. Їх визначають так:

$$Z_1 - C_1 = (0 \cdot 1 + 0 \cdot 50 + 0 \cdot 20) - 1000 = -1000\,;$$

$$Z_2 - C_2 = (0 \cdot 1 + 0 \cdot 30 + 0 \cdot 15) - 800 = -800\,;$$

$$Z_3 - C_3 = (0 \cdot 1 + 0 \cdot 15 + 0 \cdot 10) - 200 = -200\,;$$

$$Z_4 - C_4 = (0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0) - 0 = 0\,;$$

$$Z_5 - C_5 = (0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0) - 0 = 0\,;$$

$$Z_6 - C_6 = (0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1) - 0 = 0\,.$$

У стовпчику «План» оціночний рядка записують значення цільової функції

Z, якого вона набуває для визначеного опорного плану: $Z_0 = 0 \cdot 1000 + 0 \cdot 800 + 0 \cdot 200 = 0$.

3. Після обчислення всіх оцінок опорний план перевіряють на оптимальність. Для цього продивляються елементи оціночного рядка. Якщо всі $\Delta_j \geq 0$ (для задачі на max) або $\Delta_j \leq 0$ (для задачі на min), визначений опорний план є оптимальним. Якщо ж в оціночному рядку присутня хоча б одна оцінка, що не задовольняє умову оптимальності (від'ємна в задачі на max або додатна в задачі на min), то опорний план є неоптимальним і його можна поліпшити.

У цій задачі в оціночному рядку три оцінки $\Delta_1 = -1000$, $\Delta_2 = -800$ та $\Delta_3 = -200$ суперечать умові оптимальності, і тому перший визначений опорний план є неоптимальним. За алгоритмом симплекс-методу необхідно від нього перейти до іншого опорного плану задачі.

4. Перехід від одного опорного плану до іншого виконують зміною базису, тобто за рахунок виключення з поточного базису якоїсь змінної та включення замість неї нової з числа вільних змінних.

Для введення до нового базису беремо змінну x_1, оскільки їй відповідає найбільша за абсолютною величиною оцінка серед тих, які не задовольняють умову оптимальності ($|-1000| > |-800|$, та ($|-1000|$>($|-200|$).

Щоб визначити змінну, яка підлягає виключенню з поточного базису, для всіх додатних елементів стовпчика «x_1» знаходимо відношення $\theta = b_i / a_{i2}$ і вибираємо найменше значення. Згідно з даними симплексної таблиці бачимо, що $\min \theta = \{850/1; 5000/50, 15000/20\} = 750$, і тому з базису виключаємо змінну x_6, а число a_{31} = 20 називатимемо ***розв'язувальним елементом***. Подальший перехід до нового опорного плану задачі полягає в побудові наступної симплексної таблиці, елементи якої розраховують за методом Жордана—Гаусса.

У цій таблиці спочатку заповнюють два перших стовпчики «Базис» і «$C_{баз}$», а решту елементів нової таблиці розраховують за розглянутими далі правилами:

1. Розв'язувальний (напрямний) рядок необхідно поділити на розв'язувальний елемент і здобуті числа записати у відповідний рядок нової симплексної таблиці.

2. Розв'язувальний стовпчик у новій таблиці записують як одиничний з одиницею замість розв'язувального елемента.

3. Якщо в напрямному рядку є нульовий елемент, то відповідний стовпчик переписують у нову симплексну таблицю без змін.

4. Якщо в напрямному стовпчику є нульовий елемент, то відповідний рядок переписують у нову таблицю без змін.

Усі інші елементи наступної симплексної таблиці розраховують за ***правилом прямокутника***.

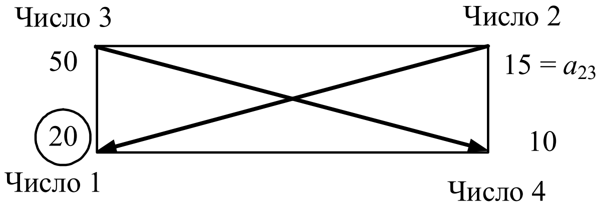
Щоб визначити будь-який елемент нової таблиці за цим правилом, необхідно в попередній симплексній таблиці скласти умовний прямокутник, вершини якого утворюються такими числами:

1 — розв'язувальний елемент; 2 — число, що стоїть на місці елемента нової симплексної таблиці, який ми маємо розрахувати; 3 та 4 — елементи, що розміщуються в двох інших протилежних вершинах умовного прямокутника.

Необхідний елемент нової симплекс-таблиці визначають так:

$$\frac{\text{Число } 1 \cdot \text{Число } 2 - \text{Число } 3 \cdot \text{Число } 4}{\text{Розв'язувальний елемент}}.$$

Наприклад, визначимо елемент a'_{24}, який розміщується в новій таблиці в другому рядку стовпчика «x_4». Складемо умовний прямокутник:



Тоді $a'_{23} = (15 \cdot 20 - 50 \cdot 10) : 20 = -10$. Це значення записуємо в стовпчик «x_3»

другого рядка другої симплексної таблиці.

Друга симплексна таблиця має такий вигляд:

№	БП	$C_б$	P_o	1000	**800**	200	0	0	0	Q
				x1	**x2**	x3	x4	x5	x6	
1	**x4**	**0**	**100**	**0**	**0,25**	**0,5**	**1**	**0**	**-0,05**	**400**
2	x5	0	12500	0	**-7,5**	-10	0	1	-1,5	-
3	x1	1000	750	1	**0,75**	0,5	0	0	0,0	1000
m+1	Δ_j		750000	0	**-50**	300	0	0	50	

Аналогічно розраховують усі елементи нової симплексної таблиці, у тому числі елементи стовпчика «План» та оцінкового рядка. Наявність двох способів визначення оцінок опорного плану (за правилом прямокутника та за відповідною формулою) дає змогу контролювати правильність арифметичних обчислень на кожному кроці симплекс-методу.

В кожній симплексній таблиці визначається опорний розвязок задачі. Для того, щоб його виписати, потрібно прирівняти стовпчики «БЗ» та «План P_0».

Так в другій таблиці міститься такий лопорний розвязок:

$X=(x_1=750; x_2=0; x_3=0; x_4=100; x_5=12500; x_6=0); Z=750000.$

Після заповнення нового оцінкового рядка перевіряємо виконання умови оптимальності $Z_j - C_j \geq 0$ для другого опорного плану. Цей план також неоптимальний, оскільки $\Delta_2 - 50$. Використовуючи процедуру симплекс-методу, визначаємо третій опорний план задачі, який наведено у вигляді таблиці:

Третя симплексна таблиця

№	БП	$C_б$	P_o	1000	800	200	0	0	0	
				x1	x2	x3	x4	x5	x6	
1	x2	800	400	0	1	2	4	0	-0,2	
2	x5	0	15500	0	0	5	30	1	-4	
3	x1	1000	450	1	0	-1	-3	0	0,2	
m+1	Δ_j		770000	0	0	400	200	0	40	

В оцінковому рядку третьої симплексної таблиці немає від’ємних чисел, тобто всі $\Delta_j \geq 0$ і задовольняють умову оптимальності. Це означає, що знайдено оптимальний план задачі:

$$X=(x_1=450;\ x_2=400;\ x_3=0;\ x_4=0;\ x_5=15500;\ x_6=0);\ Z=770000.$$

або

$$X^* = (450;\ 400;\ 0;\ 0;\ 15500;\ 0);$$

$$\max Z = 1000 \cdot 440 + 800 \cdot 400 + 200 \cdot 0 = 770000\,.$$

Отже, для отримання максимальної вартості валової продукції 770000 грошових одиниць, площа капусти має становити 450 гектарів, томатів – 400 гектарів, а багаторічні трави вирощувати невигідно. При цьому рілля використовується повністю, трудові ресурси є в залишку 15500 люд-днів, а добрива теж використовуються повністю.

2.4.4. Метод штучного базису

У попередніх темах розглядався випадок, коли система обмежень задачі лінійного програмування містила одиничну матрицю порядку m. Проте більшість задач не можна звести до потрібного вигляду. В такому разі застосовується метод штучного базису.

Розглянемо задачу лінійного програмування (2.2.-2.4.)

Задача подана в канонічному вигляді і система обмежень (2.3) не містить одиничної матриці. Отримати одиничну матрицю можна, якщо до кожного рівняння в системі обмежень задачі додати одну змінну $x_{n+i} \geq 0 \ (i = \overline{1,m})$. Такі змінні називають ***штучними***. (Не обов'язково кількість введених штучних змінних має дорівнювати m. Їх необхідно вводити лише в ті рівняння системи обмежень, які не розв'язані відносно базисних змінних.) Допустимо, що система рівнянь (2.3) не містить жодного одиничного вектора, тоді штучну змінну вводять у кожне рівняння:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m. \end{cases} \tag{2.5}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = 1,2,\ldots,n+m).$$

У результаті додавання змінних у рівняння системи (2.3) область допустимих розв'язків задачі розширилась. Задачу з системою обмежень (2.5) називають ***розширеною***, або ***М-задачею***. Розв'язок розширеної задачі збігатиметься з розв'язком початкової лише за умови, що всі введені штучні змінні в оптимальному плані задачі будуть виведені з базису, тобто дорівнюватимуть нулеві. Тоді система обмежень (2.5) набуде вигляду (2.3) (не міститиме штучних змінних), а розв'язок розширеної задачі буде розв'язком і задачі (2.2)—(2.4).

Згідно з симплексним методом до базису вводять змінні, які покращують значення цільової функції. Для даної задачі на максимум вони мають його збільшувати. Отже, для того, щоб у результаті процедур симплексних перетворень виключалися з базису штучні змінні, потрібно ввести їх у цільову функцію з від'ємними коефіцієнтами. Тобто цільова функція набуде вигляду:

$$\max F^* = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - Mx_{n+1} - \ldots - Mx_{n+m}$$

У разі розв'язання задачі на відшукання мінімального значення цільової функції вводять коефіцієнти, які є досить великими числами. Цільова функція тоді має вигляд: $\min F^* = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + Mx_{n+1} + \ldots + Mx_{n+m}$.

Припускається, що величина M є досить великим числом. Тоді якого б малого значення не набувала відповідна коефіцієнту штучна змінна x_{n+i}, значення цільової функції F^* буде від'ємним для задачі на максимум та додатним для задачі на мінімум і водночас значним за модулем. Тому процедура симплексного методу одразу вилучає відповідні змінні з базису і забезпечує знаходження плану, в якому всі штучні змінні $x_{n+i} = 0 \left(i = \overline{1,m}\right)$.

Якщо в оптимальному плані розширеної задачі існує хоча б одне значення

$x_{n+i} > 0$, то це означає, що початкова задача не має розв’язку, тобто система обмежень несумісна.

Для розв’язання розширеної задачі за допомогою симплексних таблиць зручно використовувати таблиці, оціночні рядки яких поділені на дві частини-рядки. Тоді в ($m+2$)-му рядку записують коефіцієнти з M, а в ($m+1$)-му — ті, які не містять M. Вектор, який підлягає включенню до базису, визначають за ($m+2$)-м рядком. Ітераційний процес по ($m+2$)-му рядку проводять до повного виключення всіх штучних змінних з базису, потім процес визначення оптимального плану продовжують за ($m+1$)-им рядком.

Якщо всі штучні змінні з базису виведені, а для (m+1)стрічки виконується критерій оптимальності, то знайдено оптимальний розв’язок задачі.

Метод штучного базису розглянемо на такому прикладі.

Приклад 2. . Нехай фермер прийняв рішення вирощувати озиму пшеницю і цукрові буряки на площі 20 га, відвівши під цукрові буряки не менше як 5 га. Техніко-економічні показники вирощування цих культур маємо у табл. 2.3. Критерієм оптимальності є максимізація прибутку.

Таблиця 2.3.

Показники вирощування сільськогосподарських культур

Показник (із розрахунку на 1 га)	Озима пшениця	Цукрові буряки	Наявний ресурс
Затрати праці, людино-днів	5	25	270
Затрати праці механізаторів, людино-днів	2	8	80
Урожайність, тонн	3,5	40	—
Прибуток, тис. грн	0,7	1	—

Запишемо економіко-математичну модель структури виробництва озимої пшениці та цукрових буряків, ввівши такі позначення:x_1 - площа посіву озимої пшениці, га;x_2 - площа посіву цукрових буряків, га.

Задача лінійного програмування має такий вигляд:

$$\max Z = 0{,}7x_1 + x_2$$

за умов:

$$x_1 + x_2 \le 20;$$
$$5x_1 + 25x_2 \le 270;$$
$$2x_1 + 8x_2 \le 80;$$
$$x_2 \ge 5;$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Перейдемо до канонічної форми запису. Водимо додаткові змінні: x_3 - залишок ріллі, га; x_4 - залишок трудових ресурсів; x_5 - залишок праці механізаторів; x_6 - площа під цукровими буряками понад мінімальний розмір.

$$\max Z = 0{,}7x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0\,x_5 + 0x_6$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 20;$$
$$5x_1 + 25x_2 + x_4 = 270;$$
$$2x_1 + 8x_2 + x_5 = 80;$$
$$x_2 - x_6 = 5;$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,\ x_6 \ge 0\ .$$

Матриця системи обмежень

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 25 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

містить три одиничних вектори, а обмежень є чотири. Отже, потрібно ввести четвертий одиничний вектор, якому буде відповідати штучна змінна – x_7. ця змінна немає економічного змісту і в цільову функцію добавиться з коефіцієнтом «-М».

Приведена задача.

$\max Z = 0{,}7x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0\,x_5 + 0x_6 - Mx_7$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 20;$$
$$5x_1 + 25x_2 + x_4 = 270;$$
$$2x_1 + 8x_2 + x_5 = 80;$$
$$x_2 - x_6 + x_7 = 5;$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0,\ x_7 \geq 0\ .$$

Випишемо початковий розв'язок задачі: небазисні змінні дорівнюють нулю ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_6 = 0$). Знайдемо значення базисних змінних з (2.6.): $x_3 = 20$, $x_4 = 270$, $x_5 = 80$, $x_7 = 5$.

Заповнимо першу симплексну таблицю.

№	БП	$C_б$	P_o	0,7	**1**	0	0	0	0	-M	Q
				x1	**x2**	x3	x4	x5	x6	x7	
1	x3	0	20	1	**1**	1	0	0	0	0	20
2	x4	0	270	5	**25**	0	1	0	0	0	10,8
3	x5	0	80	2	**8**	0	0	1	0	0	10
4	**x7**	**-M**	**5**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**-1**	**1**	**5**
m+1	Δ_j		0	-0,7	**-2**	0	0	0	0	0	
m+2			-5M	0	**-M**	0	0	0	M	0	

Змінні x_2 вводиться до базису, а змінна x_7 виводиться з базису.

Зауваження. Якщо штучна змінна виходить з базису, то в наступній симплексній таблиці стовпчик, що їй відповідає можна не розраховувати. Якщо всі штучні змінні виведені з базису, то в стрічці (m+2) всі коефіцієнти дорівнюють нулю, і цю стрічку далі можна відкинути.

Друга симплексна таблиця

№	БП	$C_б$	P_o	0,7	1	0	0	0	**0**	-M	Q
				x1	x2	x3	x4	x5	**x6**	x7	
1	x3	0	15	1	0	1	0	0	**1**		15
2	x4	0	170	5	0	0	1	0	**25**		6,8
3	**x5**	**0**	**40**	**2**	**0**	**0**	**0**	**1**	**8**		**5**
4	x2	1	5	0	1	0	0	0	**-1**		X
m+1	Δ_j		5	-0,7	0	0	0	0	**-2**		
m+2			0	0	0	0	0	0	**0**		

В цій симплексні таблиці розв'язальниним є стовпчик змінної x_6, а розв'язальною стрічкою – x_5. отже змінні x_5виводиться з базису, а змінна x_6 – в базис вводиться. Заповнимо третю симплексні таблицю.

Третя симплексна таблиця

№	БП	$C_б$	P_o	**0,7**	1	0	0	0	0	Q
				x1	x2	x3	x4	x5	x6	
1	**x3**	**0**	**10**	**0,75**	**0**	**1**	**0**	**-0,125**	**0**	**13,33**
2	x4	0	45	**-1,25**	0	0	1	-3,125	0	X
3	x6	0	5	**0,25**	0	0	0	1,125	1	20
4	x2	1	10	**0,25**	1	0	0	1,125	0	40
m+1	Δ_j		10	**-0,2**	0	0	0	0,25	0	

В цій симплексні таблиці розв'язальниним є стовпчик змінної x_1, а розв'язальною стрічкою – x_3. отже змінні x_3виводиться з базису, а змінна x_1 – в базис вводиться. Заповнимо третю симплексні таблицю.

Четверта симплексна таблиця

№	БП	$C_б$	P_o	0,7	1	0	0	0	0	Q
				x1	x2	x3	x4	x5	x6	
1	x1	0,7	13,33	1	0	1,33	0	-0,17	0	13,33
2	x4	0	61,67	0	0	1,67	1	-3,33	0	X
3	x6	0	1,67	0	0	-0,33	0	1,17	1	20
4	x2	1	6,67	0	1	-0,33	0	1,17	0	40
m+1	Δ_j		12,67	0	0	0,26	0	0,22	0	

В цій таблиці визначено оптимальний розв'язок задачі тому, що всі $\Delta_j \geq 0$. Отже, $x_1=13,33$; $x_2=6,67$; $x_3=0$;$x_4=61,67$; $x_5=0$; $x_6=1,67$; Z=12,67.

Економічно маємо такий розв'язок - площа посіву озимої пшениці має становити 13,33га, площа посіву цукрових буряків –6,67 га. Ресурси використовуються так: рілля та праця механізаторів повністю, залишок використання трудових ресурсів становить 61,67 людино-днів.

2.4.5. Розв’язання оптимізаційних задач симплексним методом в електронному процесорі Excel

Методику розв’язку оптимізаційних задач симплексним методом в електронному процесорі Excel наведемо, розглядаючи класичну задачу оптимізації використання ресурсів.

Потрібно визначити оптимальне поєднання посівів трьох культур: капусти, томатів та багаторічних трав при умові, що господарство має 850 га ріллі, 50тис.люд.-днів трудових ресурсів та 15тон органічних добрив. Витрати цих ресурсів, а також вихід вартості валової продукції в розрахунку на 1 га посіву культур наведено в таблиці

Показники	Культури			наявність ресурсу
	капуста	томати	багаторічні трави	
Витрати праці, люд.-дні	50	30	15	5000
Витрати добрив, т	20	15	10	15000
Вартість валової продукції, грош.од.	1000	800	200	

Побудуємо математичну модель задачі. Позначимо за x_1- посівну площу капусти, x_2- посівну площу томатів, x_3- посівну площу багаторічних трав.

Цільова функція задачі – максимум вартості валової продукції, грошові одиниці:

$Z=1000*x_1+800*x_2+200*x_3 \rightarrow max.$

Система обмежень:

1. по використанню ріллі, га:
   a. $x_1+x_2+x_3 \leq 850;$

2. по використанню трудових ресурсів, люд.-дні:
   a. $50*x_1+30*x_2+15*x_3 \le 5000$;

3. по використанню добрив, т:
   a. $20*x_1+15*x_2+10*x_3 \le 15000$

Умова невід'ємності змінних:

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$.

Матриця задачі буде мати вигляд:

№ з/п	Обмеження	Капуста, x_1	Томати, x_2	Багаторічні трави, x_3	Тип обм.	Наявність ресурсу
1	Використання ріллі, га	1	1	1	≤	850
2	Витрати праці, люд.-дні	50	30	15	≤	50000
3	Витрати добрив, т	20	15	10	≤	15000
	Вартість валової продукції, грош.од.	1000	800	200	→	max

Алгоритм розв'язку задачі

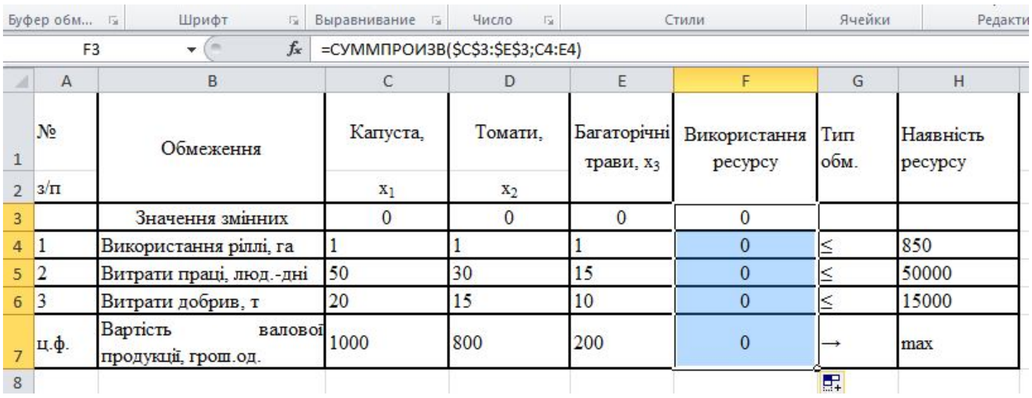
1. Для наведеної задачі підготовимо форму для вводу умов (рис.2.11.).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	№	Обмеження	Капуста,	Томати,	Багаторічні трави, x_3	Використання ресурсу	Тип обм.	Наявність ресурсу
2	з/п		x_1	x_2				
3		Значення змінних						
4	1	Використання ріллі, га						
5	2	Витрати праці, люд.-дні						
6	3	Витрати добрив, т						
7	ц.ф.	Вартість валової продукції, грош.од.						

Рис. 2.11. Форма для вводу даних

2. У нашій задачі оптимальні значення вектора $X = (X_1, X_2, X_3)$ після розв'язку задачі будуть розміщені в клітинках C3:E3, оптимальне значення цільової функції – в клітині F7.

3. Введемо дані задачі у підготовлену форму, отримаємо результат, зображений на рис. 2.12.



=СУММПРОИЗВ($C$3:$E$3;C4:E4)

№ з/п	Обмеження	Капуста, x_1	Томати, x_2	Багаторічні трави, x_3	Використання ресурсу	Тип обм.	Наявність ресурсу
	Значення змінних	0	0	0	0		
1	Використання ріллі, га	1	1	1	0	≤	850
2	Витрати праці, люд.-дні	50	30	15	0	≤	50000
3	Витрати добрив, т	20	15	10	0	≤	15000
ц.ф.	Вартість валової продукції, грош.од.	1000	800	200	0	→	max

Рис. 2.12. Вигляд форми після введення даних

4. Введемо залежність для першого обмеження:

- Робимо активною клітину F4.
- Курсор на Мастер функций.
- На екрані з’являється діалогове вікно Мастер функций.
- З вікна Категория курсором вибираємо категорію Математические.
- У вікні Функции обираємо СУММПРОИЗВ.
- У масив 1 ввести C3:E3.
- У масив 2 ввести C4:E4. (рис 2.13)

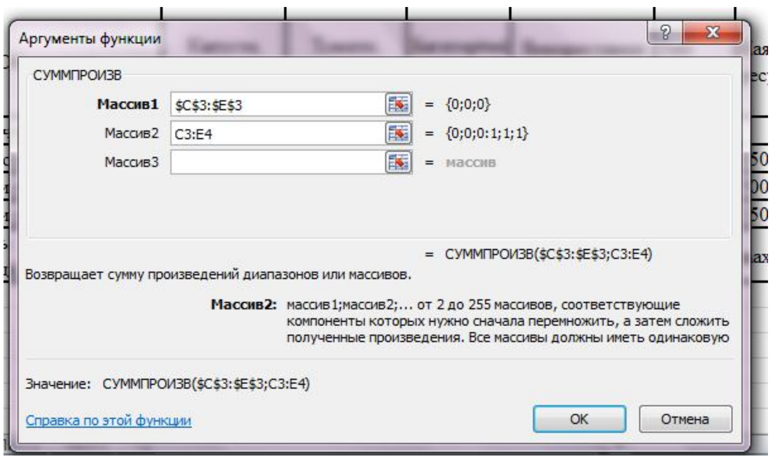


Рис. 2.13. Діалогове вікно функції «СУММПРОИЗВ»

Зауваження: Адреси клітин в усі діалогові вікна зручно вводити не з клавіатури, а рухаючись мишкою по клітинах, адреси яких слід ввести.

Установку першого обмеження завершено.

5. Введемо залежності для лівих частин обмежень: або аналогічно попередньому кроці вводимо функції для лівих частин, або з клітини F7 копіюємо формулу в F4,F5, F6, коригуючи адреси клітинок. На цьому завершено введення залежностей.

2. Запуск сервісної програми «ПОИСК РЕШЕНИЯ»

Запуск сервісної програми «ПОИСК РЕШЕНИЯ» відбувається зі закладки «Данные» електронної таблиці Excel.

Якщо такої сервісної програми на закладці данні немає, то її слід завантажити. Завантаження надбудови відбувається за наступним алгоритмом:

Файл→ПараметриНадстройки →Перейти на надбудови Excel.

У вікні, що відкрилося (рис. 2.14) позначити прапорцем надбудову «Поиск решений».

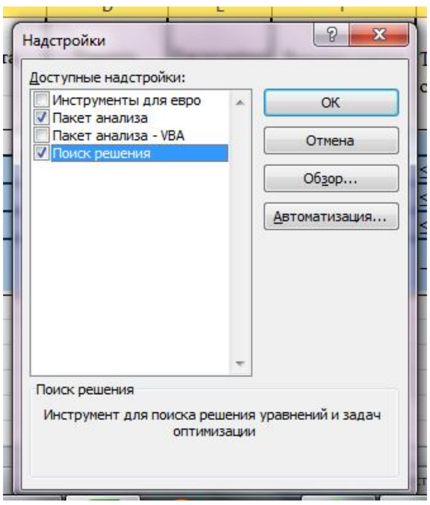


Рис. 2.14. Надбудови Excel.

Після завантаження надбудови «Поиск решения» з’явиться діалогове вікно -Поиск решения- (рис. 2.15).

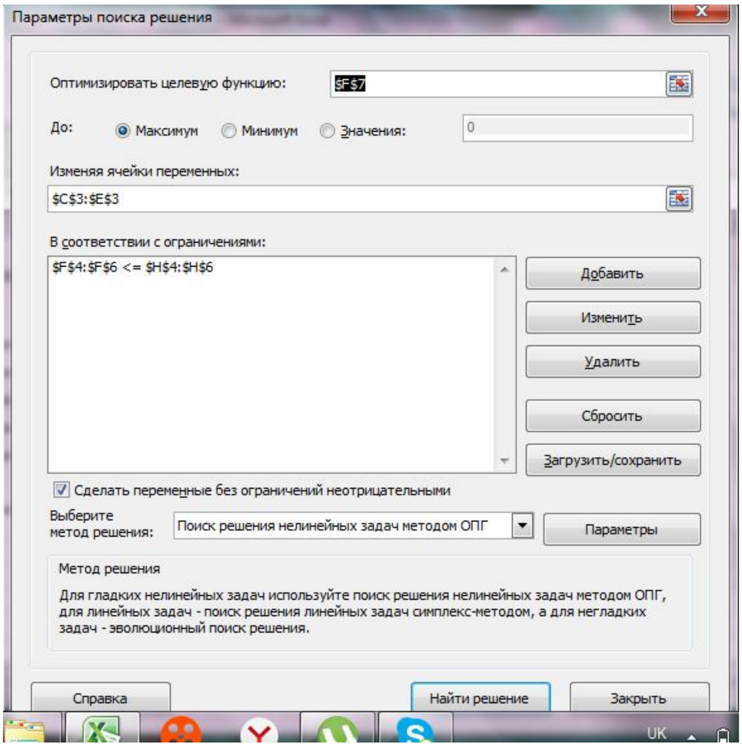


Рис.2.15. Діалогове вікно надбудови «Поиск решения»

У діалоговому вікні Поиск решения є три основних параметра:

- Установить целевую функцию;
- зменяя ячейки;
- Ограничения.

Насамперед необхідно заповнити поле -Установить целевую функцию – тобто вказати адресу клітини, в якій введена формула для обчислення цільової функція, або відкрити надбудову «ПОИСК РЕШЕНИЯ» з цієї клітини .

У всіх задачах для засобу «Поиск решения» оптимізується результат в одній з клітин робочого листа. Цільова функція зв’язана з іншими клітинами цього листа за допомогою формул. Засіб «Поиск решения» дає можливість обрати пошук найменшого чи найбільшого значення для цільової функції, або встановити конкретне значення.

Другий важливий параметр засобу Поиск решения – Изменяя ячейки.

– Изменяемые ячейки- – це клітини, значення в яких будуть змінюватися, для того щоб оптимізувати результат у цільовій клітині.

Для розв'язку задачі можна вказати до 200 таких клітин, але до них є дві основних умови: вони не мають містити формули і зміна їх значень повинна впливати на зміну значення цільової функції, тому цільова клітина залежна від Изменяемых ячеек.

Третій параметр, що необхідно встановити – Ограничения

6. Призначення цільової функції.

– Навести курсор у поле Установить целевую функцию. _ Ввести адресу клітини F5.
– Ввести напрямок цільової функції (максимального значення).
– Ввести адреси змінних:
– Навести курсор у поле -Изменяя ячейки-_ Ввести адреси C3:E3.

7. Вводимо обмеження:

Курсор у поле Добавить, з'являється діалогове вікно Добавление ограничений (рис. 2.16.)

– У полі -Ссылка на ячейку- ввести адресу F7.
– Ввести знак обмеження.
– Обсяг обмеження вводимо в полі – Ограничения- .
– Добавить. Аналогічно ввести решту обмежень.
– Після останнього обмеження ввести ОК.

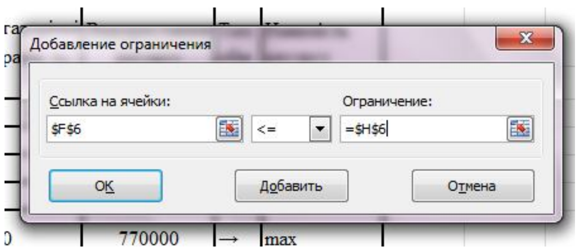


Рис. 2.16. Формування обмежень

На екрані з'являється діалогове вікно Поиск решения з введеними умовами (рис.2.17)

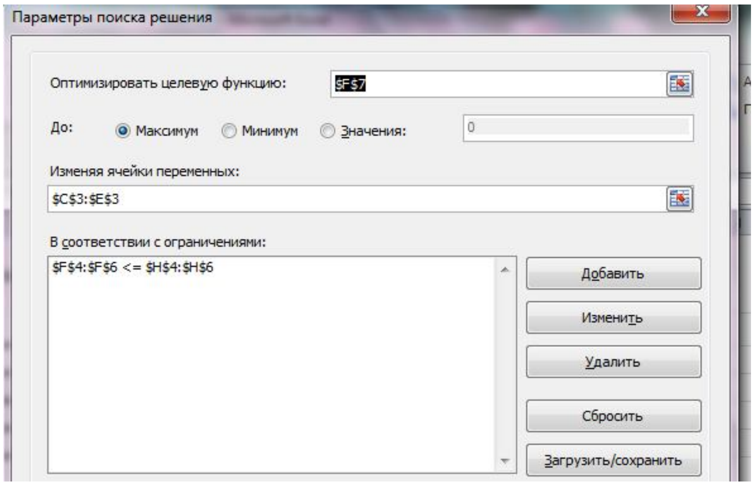


Рис. 2.17.Сформовані та введені всі умови для розв’язку задачі

8. Визначаємо прапорцем «Сделать переменные без ограничений еотрицательными» (рис. 2.18).

9. Обираємо метод розв’язання задачі (Рис.2.18)

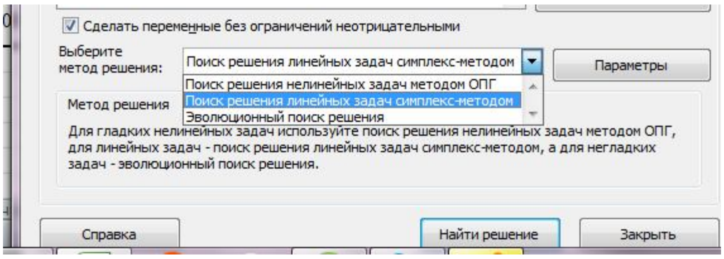


Рис.2.18.Параметри для ЗЛП

10. Натиснути на екранну кнопку «Найти решение».
11. ОК - На екрані з’явиться вікно -Поиска решения-._ Выполнить. На екрані з’явиться діалогове вікно Результаты поиска решений – рис. 2.19.

№ з/п	Обмеження	Капуста, x_1	Томати, x_2	Багаторічні трави, x_3	Використання ресурсу	Тип обм.	Наявність ресурсу
	Значення змінних	450	400	0			
1	Використання ріллі, га	1	1	1	850	≤	850
2	Витрати праці, люд.-дні	50	30	15	34500	≤	50000
3	Витрати добрив, т	20	15	10	15000	≤	15000
ц.ф.	Вартість валової продукції, грош.од.	1000	800	200	770000	→	max

Рис. 2.19. Оптимальний розв’язок знайдено

Розв’язавши задачу ми отримали такий результат:

$$X_1 = 450, X_2 = 400, X_3 = 10, F = 770000.$$

Отриманий оптимальний розв’язок означає, що максимальну виручку від вирощування культур – 770000 грош.од. фермер зможе отримати при вирощуванні капусти на площі 450гектар, томатів – 400 гектар, а багаторічні трави вирощувати невигідно. При цьому рілля та добрива використовуються повністю, а трудові ресурси є в залишку.

2.5. Завдання для самостійної роботи

Побудувати математичну та числову модель задачі. Знайти розв’язок задачі графічним та симплексним методами. Розв’язати задачі в електронній таблиці Excel. Проаналізувати отримані результати.

Задача 1. Визначити площу саду та винограднику при використанні слідуючих ресурсів: рілля під багаторічні насадження - А га, трудові ресурси - В тис. люд-діб, грошові ресурси - С тис. гр. Площа під виноградником не менше за 75га Відомі витрати виробничих ресурсів на 1 га площі саду та винограднику наведено в таблиці.

Таблиця.

Ресурси	Сад	Виноградник
1.Трудові, тис. люд.-діб	0.05	0.1
2.Грошові, тис. гр.	0.28	0.4
3.Вартість продукції, тис. гр.	2.3	4.5

Значення параметрів А,В,С задаються згідно варіанту.

Задача 2.Для вирощування сільськогосподарських культур сільськогосподарське підприємство має такі ресурси: ресурси праці -А1 люд.-год., матеріально - грошові ресурси - А2 грошових одиниць, земельні ресурси - А3 га., обсяг механізованих робіт - А4 умовних гектар. Вартість валової продукції складає(грошові одиниці за 1центнер): пшениця-18,овес-15,ячмінь-

17,картопля-10,кормові буряки-7,однорічні трави-2. Витрати ресурсів на 1га кожної сільськогосподарської культури наведено в таблиці.

Вид сільськогосподарської культури	Витрати на 1 га посіву культури			Врожайність, ц/га
	Праці, люд.-год.	Матеріально-грошові витрати, грошові одиниці	Механізованих робіт, умовні га.	
Пшениця	20	90	6	38
Ячмінь	15	60	4	18
Овес	17	50	5	15
Картопля	300	400	12	300
Кормові буряки	550	520	14	450
Однорічні трави	12	30	1	15

Скласти такий план вирощування сільськогосподарських культур, при якому вартість валової продукції буде максимальною. Значення A_i вибрати згідно з отриманим варіантом.

Задача 3.Для складання кормового раціону є такі види кормів та їх ціна (грошові одиниці за 1 кілограм): концентрати - 1.0, сіно - 0.28, силос - 0.22, кормові коренеплоди - 0.34,солома -0.14.Раціон необхідно збалансувати по кормових одиницях, перетравному протеїнові.

Вміст кормових одиниць, перетравного протеїну та їх мінімальну потребу наведено в таблиці.

Скласти найбільш дешевий раціон, що повністю задовольняє потребу тварин в поживних речовинах. Значення B_i вибирати згідно з визначеним варіантом.

Таблиця.

Види кормів	Вміст в 1 кг корму	
	кормових одиниць, кг	перетравного протеїну, г
Концентрати	1,0	126
Сіно	0,42	51
Силос	0,17	12
Кормові коренеплоди	0,15	9
Солома	0,26	16
Мінімальна потреба в поживних речовинах	B1	B2

Задача 4. Два трактори виконують три види сільськогосподарських робіт. Інші умови задачі наведено в таблиці.

Таблиця.

Види робіт	Продуктивність трактора за добу, умовні га		Витрати за добу, грош.од.		План, умовні га
	МТЗ-80	Т-150	МТЗ-80	Т-150	
Боронування	80	60	8,0	6,6	С1
Культивація	28	74	5,4	35,5	С2
Сівба	24	58	25,2	75,4	С3

Скласти такий план розподілу тракторів між видами робіт, щоб витрати були мінімальними, а термін роботи склав не більше 10 діб.

Задача 5. В господарстві необхідно внести добрива на три ділянки. Знайти площі по кожній ділянці, під які треба внести добрива, так щоб приріст урожаю за рахунок внесення добрив був максимальним. Дані для розв'язання задачі наведено в таблиці.

Таблиця.

Номер ділянки	Посівні площі, га	Витрати добрив на 1 га, ц			Приріст урожайності на 1 га, ц
		фосфорні	азотні	калійні	
1	А1	2	1	1	12
2	А2	1	2	1.25	14
3	А3	1	1.5	0	10
Наявність добрив, ц		А4	А5	А6	

Задача 6. Визначити оптимальну структуру посівних площ, що забезпечують максимум вартості валової продукції .

Культури	Витрати на 1 га			Вартість валової продукції з 1 га, гр.од.
	Праці, люд.-год.	Тракторних робіт, ум.га	Витрати матер.-грошов.ресгр.од.	
Пшениця	20+	6+	90+	120
Ячмінь	15+	4+	60+	70
Картопля	40+	12+	400+	650

Господарство має 4+ тис. га ріллі, трудові ресурси становлять 80+ тис. людино-годин, ресурси тракторного парку 30+ тис. умовних га, матеріально-грошові ресурси 11+ тис.гр.од.

Задача 7. Необхідно скласти на стійловий період оптимальний добовий раціон годівлі дійних корів живою вагою 550 кг і добовим надоєм 30 кг. На одну голову на добу необхідно не менше С1 кг кормових одиниць і С2 г перетравного протеїну. Раціон складається з трьох видів кормів - комбікорму, сіна та силосу. Собівартість і вміст поживних речовин в 1кг корму наведено в табл. 1. Згідно біологічним властивостям тварин в раціоні повинно бути не менше

25 % концентрованих кормів і не більше 30% грубих кормів від загальної поживності раціону.

Таблиця.

Показники	Комбікорм	Сіно	Силос
Кормові одиниці, кг	1	0.5	0.2
Перетравний протеїн, г	160	60	30
Собівартість, гр.од.	14	3	2

Задача 8. При виготовленні взуття використовують жорстку шкіру, чепрак та воріт. Кожен з видів поділяється на категорії по товщині. Одна і та сама деталь може бути виготовлена з будь-яких видів шкіри. Необхідно скласти такий план випуску деталей, щоб забезпечити виконання плану деталей та вартість матеріалу була б мінімальною. Вихідні дані наведено в таблиці.

Таблиця.

Товщина деталі, мм	Кількість деталей, за планом тис.шт.	К-ть деталей, які можна виготовити з 1000 $м^2$ шкіри, тис.шт.			
		Товщина чепрака, мм		товщина вороту, мм	
		4.01-4.5	4.51-5.0	3.5-4.0	4.51-5.0
3.9	21	26.5	7.8	-	-
3.0	30	51.0	26.0	45.7	-
2.5	Д1	-	-	5.0	72.5
Кількість наявного матеріалу, тис. $м^2$		0.9	0.8	5.0	6.0
Вартість тисячі $м^2$, гр.од.		Д2	Д3	Д4	Д5

Задача 9. Виділено дві грунтово-кліматичні зони, площі яких відповідно становлять В1, В2 млн га. Визначити розміри посівних площ озимих, ярових зернових культур, необхідних для досягнення максимальної вартості валової продукції. Врожайність культур по зонам і вартість 1ц зерна наведено в таблиці. Необхідно озимих виростити не менше В3 млн. ц і ярих не менше В4 млн.ц.

Таблиця.

Зернові культури	Урожайність, ц/га		Вартість 1ц, гр.од.
	1 зона	2 зона	
Озимі	20	25	8
Ярові	28	27	7

2.6. Контрольні питання

1. Запишіть загальну математичну модель задачі лінійного програмування.
2. Поясніть геометричну інтерпретацію задач лінійного програмування.
3. Які задачі лінійного програмування можна розв'язати графічним методом?
4. Наведіть алгоритм графічного методу розв'язання задач лінійного програмування.
5. коли і як виконується аналіз на чутливість?
6. В чому полягає перша задача на чутливість?
7. В чому полягає друга задача на чутливість?
8. В чому полягає третя задача на чутливість?
9. Запишіть загальну математичну модель задачі лінійного програмування.
10. Як звести задачу лінійного програмування до канонічної форми?
11. Які є форми запису задач лінійного програмування?
12. Поясніть геометричну інтерпретацію задачі лінійного програмування.
13. Який розв'язок задачі лінійного програмування називається допустимим?
14. Поясніть, що називається областю допустимих планів.
15. Який план називається опорним?
16. Який опорний план називається невиродженим?
17. Сформулюйте основні аналітичні властивості розв'язків задачі лінійного програмування.
18. Які задачі лінійного програмування можна розв'язувати графічним методом?
19. За яких умов задача лінійного програмування з необмеженою областю допустимих планів має розв'язок?
20. Суть алгоритму графічного методу розв'язання задач лінійного програмування.
21. Для розв'язування яких математичних задач застосовується симплексний метод?
22. Суть алгоритму симплексного методу.
23. Сформулюйте умови оптимальності розв'язку задачі симплексним методом.
24. Як вибрати спрямовуючий вектор-стовпець?
25. Як вибрати розв'язувальний елемент?
26. Суть методу Жордана—Гаусса.
27. Суть методу штучного базису.

РОЗДІЛ 3

ЦІЛОЧИСЛОВІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ ЗНАХОДЖЕННЯ ЇХ ОПТИМАЛЬНИХ РОЗВЯЗКІВ

3.1. Постановка цілочислової оптимізаційної задачі
3.2. Приклади задач цілочислового програмування
3.3. Загальна характеристика методів розв'язання цілочислових задач лінійного програмування
3.4. Метод Гоморі – представник методів відтинання
3.5. Метод гілок та меж – представник комбінаторних методів
3.6. Приклади та завдання для самостійної роботи
3.7. Контрольні питання

3.1. Постановка цілочислової оптимізаційної задачі

Поява вимоги цілочисловості в економічних задачах є досить очевидною і пов'язана з наявністю у моделях параметрів, які можуть набувати тільки цілих значень. Нелінійність, яка випливає з вимог цілочисловості змінних, є незначною. Тому цілочислове програмування часто розглядають як розділ математичної оптимізації лінійних моделей, в яких на деякі чи всі змінні накладено умову цілочисловості.

Зауважимо, що задачі цілочислового програмування є частковим випадком загальнішого типу задач – дискретної оптимізації. Вимоги дискретності змінних, якщо не в явному вигляді, то в прихованій формі властиві багатьом практичним типам задач, що забезпечує дуже широке коло застосування дискретного програмування в багатьох теоретичних і прикладних дисциплінах. Задачі проектування, планування, розміщення, класифікації і управління добре формалізуються за допомогою різних моделей дискретного програмування.

За змістом значної частини економічних задач, що відносяться до задач лінійного програмування, компоненти розв'язку повинні виражатися в цілих числах, тобто бути цілочисловими. До них відносяться, наприклад, задачі, у яких змінні означають кількість одиниць неподільної продукції, число верстатів при завантаженні устаткування, число кораблів, які розподіляють по лініях, число турбін в енергосистемі, число обчислювальних машин у керуючому комплексі і багато іншого.

Задача лінійного цілочислового програмування формулюється так: знайти такий розв'язок (план) $X=(x_1,x_2,...,x_n)$, при якому лінійна функція

$$Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{3.1}$$

приймає максимальне або мінімальне значення при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i=1,2,...,m. \tag{3.2}$$

$$x_j \ge 0,, \quad j=1,2,...,n. \tag{3.3}$$

$$x_j - \text{цілі числа}. \tag{3.4}$$

Слід зазначити, що класична транспортна задача і деякі інші транспортного типу «автоматично» забезпечують розв'язок задачі в цілих числах (якщо, скінчені цілочислові параметри умов). Однак у загальному випадку умова цілочисловості (3.4), що додається до звичайних задач лінійного програмування, істотно ускладнює її розв'язок.

Для розв'язку задач лінійного цілочислового програмування використовується ряд методів. Найпростіший з них - звичайний метод лінійного програмування. У випадку, якщо компоненти оптимального розв'язку є нецілочисловими, їх округляють до найближчих цілих чисел. Цей метод застосовують тоді, коли окрема одиниця сукупності складає малу частину всієї сукупності. У іншому випадку округлення може привести до далекого від оптимального цілочислового розв'язку, тому використовують спеціально розроблені методи.

Методи цілочислової оптимізації можна розділити на три основні групи: а) методи відсікання; б) комбінаторні методи; в) наближені методи. Зупинимося докладніше на методах відсікання.

3.2. Приклади задач цілочислового програмування

Задача про призначення.

Економічна постановка задачі про призначення така: для виконання n різних робіт виділено n виконавців (робітників, станків, фірм,...). За кожною роботою можна закріпити лише одного виконавця. Кожен виконавець може виконувати лише одну роботу. Прибуток від виконання i-ої роботи j-им виконавцем становить c_{ij}.

Потрібно розподілити виконавців за роботами так, щоб загальний прибуток був найбільшим.

Для побудови відповідної математичної моделі введемо змінні x_{ij} (i=1,...,n; j=1,...,n) так:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{якщо} \quad i-\textit{й} \quad \textit{виконавець} \quad \textit{виконує} \quad \text{j-ту} \quad \textit{роботу} \\ 0, & \textit{в} \quad \textit{іншому} \quad \textit{випадку} \end{cases}.$$

Отже, проблема полягає у тому, щоб в наступній таблиці (таблиці 3.1) проставити нулі та одиниці найкращим способом. У кожному рядку, як і в кожному стовпці допускається рівно один нуль.

Таблиця 3.1

Виконавці	Роботи				
	1	......	j	....	n
1	0	0	1	0	0
.....	0	1	0	0	0
i	1	0	0	0	0
.....	0	0	0	1	0
n	0	0	0	0	1

Математична постановка задачі про призначення, таким чином, така: знайти невідомі величини x_{ij} так, щоб надати максимум лінійній формі L з обмеженнями чотирьох типів:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \max \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (i = 1,..., n) \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (j = 1,..., n) \qquad (3)$$

$$0 \le x_{ij} \le 1 \quad (i = 1,..., n; j = 1,..., n) \qquad (4)$$

$$x_{ij} - \text{цілі} \ (i = 1,..., n; j = 1,..., n) \qquad (5)$$

Це типова цілочислова задача лінійного програмування.

Оптимізація складу та обігу стада великої рогатої худоби.

Виходячи з наявності поголів’я великої рогатої худоби на початок року, необхідно визначити оптимальний рух стада, який забезпечить виконання планів реалізації продукції, задоволення внутрішньогосподарських потреб, а також подальше відтворення поголів’я. Критерієм оптимальності може бути максимум товарної продукції тваринництва у вартісному виражені, виробництво молока чи м’яса.

Для розробки моделі необхідно мати наступну інформацію:

- поголів’я тварин на початок року за статево-віковими групами;
- вихід телят на 100 голів маточного стада;
- норми вибракування по статево-віковим групам;
- продуктивність однієї голови;
- план реалізації продукції тваринництва;
- ціни реалізації.

Склад змінних. План обороту стада складається з наступних розділів: поголів’я на початок року; надходження, який відображає джерела зміни поголів’я; вибуття, який показує вибуття худоби по групам; поголів’я на кінець року.

Виходячи з цього, визначають основні групи перемінних:
$y_i^{(1)}$, $y_i^{(2)}$ – відповідно поголів’я на початок і кінець року по і-й статево-віковій групі тварин;
$y_i^{(0)}$ – середньорічне поголів’я корів;
$x_i^{(1)}$, $x_i^{(2)}$, $x_i^{(3)}$ – надходження з інших груп ($x_i^{(1)}$), приплід ($x_i^{(2)}$), купівля племінної і користувальної худоби ($x_i^{(3)}$);
$Z_i^{(s)}$, де s = 1-5 – переведення худоби в інші групи ($Z_i^{(1)}$), реалізація м’яса ($Z_i^{(2)}$), продаж племоб’єднанням ($Z_i^{(3)}$), іншим господарствам ($Z_i^{(4)}$), інше вибуття ($Z_i^{(5)}$).
Сиситема обмежень. При складанні плану річного обороту стада виділяють наступні статеві і вікові групи тварин: бугаї, корови, нетелі, телиці народження позаминулого року, телиці народження минулого року, бички і кастрати всіх вікових періодів, доросла худоба на відгодівлі, телята народження року, що планується. Однак у групі “бички і кастрати всіх вікових періодів” поєднано молодняк народження позаминулого і минулого років, у групі “телята народження року, що планується” – бички і телички, хоча вони звичайно мають різний добовий приріст живої маси і різне господарське призначення. При моделюванні ці групи доцільно розділяти.
З урахуванням зазначеного визначають склад обмежень по кожній групі умов: наявності поголів’я на початок року, руху поголів’я і т. д.
Охарактеризуємо задачу в математичній формі.
Найти план: уі (1), уі (2) – відповідно поголів’я на початок і кінець року по і-й статевовіковій групі тварин; уі (0) – середньорічне поголів’я корів; хі (1), хі (2) , хі (3) – надходження з інших груп (хі (1)), приплід (хі (2)), купівля племінної і користувальної худоби (хі (3)); Zі (s) , де s = 1-5 – переведення худоби в інші групи (Zі (1)), реалізація м’яса (Zі (2)), продаж племоб’єднанням (Zі (3)), іншим господарствам (Zі (4)), інше вибуття (Zі (5)).
Де n, k, s – індекси підгруп перемінних: n = 0-2, k = 1-3, s = 1-5, при якому

досягається максимум товарної продукції тваринництва (грн.):
де C_j – вартість товарної продукції у розрахунку на 1 голову j-ї статево-вікової групи тварин, грн.

1. Поголів'я тварин на початок року, гол.:

$$y_i^{(1)} = B_j \ (j \in D),$$

де D – множина статево-вікових груп тварин;
B_j – поголів'я j-ї групи на початок року, гол.

2. Рух поголів'я кожної статево-вікової групи, гол.:

$$y_i^{(1)} + x_j^{(k)} = Z_j^{(s)} + y_i^{(2)} \ (j \in i).$$

Групу перемінних по поголів'ю на початок року і першу групу обмежень в модель можна не вводити, але поголів'я на початок року відображають в правій частині другої групи обмежень. Але в даній моделі перемінні по поголів'ю на початок року не вилучаються, так як вона в такому вигляді більш наглядно імітує відповідну форму планових документів і більш зручна для автоматизації розрахунків.

3. Співвідношення між переведенням поголів'я в сарші групи і надходженням із молодших груп, гол.:

$$Z_i^{(1)} = x_j^{(1)} \ (j \in D).$$

4. Вихід приплоду, гол.:

$$x_j^{(2)} = g_i * (y_j^{(1)} + x_i^{(1)}) \ (j \in D^{(`)}),$$

де $D^{(`)}$ – підмножина статево-вікових груп (телички народження планового року, бички народження планового року);
g_i – вихід телят на 100 голів маточного стада.
Як видно з даного обмеження, приплід пов'язується не лише з поголів'ям корів на початок року, але й з поголів'ям нетелей, яке буде переведене протягом планового року в групу корів.
5. Вибракування поголів'я, гол.:

$$Z_i^{(2)} >= d_j x_j^{(1)} \ (j \in D),$$

де d_j - коефіцієнт по вибракуванню поголів'я j-ї статево-вікової групи тварин.

6. Поголів'я молодняку на дорощуванні і відгодівлі у населення за угод ома, гол.:

$$Z_i^{(1)} = b_j.$$

6. Сумарне вихідне поголів'я на кінець року, гол.:

$$y_j^{(2)} = y_j^{(1)},$$

в тому числі корів

$$y_j^{(2)} = y_j^{(1)}.$$

6. Продаж тварин племоб'єднанню, іншим господарствам, інші вибуття, гол.:

$$Z_i^{(s)} = b_j^{(s)},$$

де $b_j^{(s)}$ – поголів'я j-ї статево-вікової групи тварин (s = 3, 4, 5).

6. Продаж м'яса, ц:

де і – індекс виду продукції;

Q_i – планове завдання на продаж продукції і-го виду, ц;

- вихід і-го виду продукції на одну голову j-ї статево-вікової групи, ц.

6. Виробництво молока для виконання плану продажу і задоволення внутрішньогосподарських потреб, ц:
6. Середньорічне поголів'я корів, гол.:

$$y_j^{(0)} = 0,5\ (y_j^{(1)} + y_i^{(2)}).$$

Річний оборот стада не дозволяє досить точно визначити середньорічне поголів'я тварин. З цією метою складають помісячний оборот стада. Але по поголів'ю корів (при відносній їх стабільності) цей розрахунок може бути передбачений у моделі з незначною результативною погрішністю, так як цей параметр необхідний для математичної формалізації умов по виробництву молока, товарної продукції.

Змінні цієї задачі позначають кількість тварин певної статево-вікової групи, кількість тварин, що підлягає вибракуванню. Природньо, що ці змінні мають приймати тільки цілих значень.

Задача про завантаження обладнання.

Розглянемо задачу завантаження обладнання, коли один і той же виконавець (технічний засіб, робітник) може використовуватися для декількох робіт за умови, що окремі роботи повинні бути взаємопов'язані однією метою: виконати одну завершену роботу.

Нехай, наприклад, двоє працівників (Іван та Степан) займаються відсиланням листів. Іван друкує один лист за 5хв. і підписує один конверт за 1хв. Степан друкує той же лист за 10 хв, а конверт підписує аж 5хв. Отже, за одну годину Іван може або надрукувати 12 листів або підписати 60 конвертів. Степан за цей же час або надрукує 6 листів, або підпише 12 конвертів.

Легко переконатися, що коли обидва працівники працюватимуть окремо, то всього за годину вони відправлять 14 листів (10 листів Іван та 4 листи Степан).

Якщо ж Іван буде лише друкувати, а Степан займатися конвертами, то за цю ж годину буде відправлено тільки 10 листів. Ситуація, коли друкує листи Степан, а Іван підписує конверти, ще гірша.

Побудуємо математичну модель, яка вкаже нам на найкращий із всіх можливих способів кооперації праці цих працівників.

Нехай x_{11} $(0 \le x_{11} \le 1)$ - частка робочого часу, яку використовує Іван на друкування листів, а x_{12} $(0 \le x_{12} \le 1)$ - на підписання конвертів.

Нехай x_{21} та x_{22} $(0 \le x_{21}, x_{22} \le 1)$ - частки робочого часу, які використовує Степан відповідно на друкування та на підписання конвертів.

Очевидно, повинна виконуватися умова: загальна кількість надрукованих листів повинна збігатися із загальною кількістю підписаних конвертів: $12x_{11}+6x_{21}=60x_{12}+12x_{22}$; при цьому ця величина $L=12x_{11}+6x_{21}$ має бути якнайбільшою. Крім того, обидва працівники повинні бути зайняті весь свій робочий час: $x_{11}+x_{12}=1$; $x_{21}+x_{22}=1$.

Отже, маємо математичну постановку даної задачі про завантаження обладнання: знайти такі значення величин x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, які надають максимального значення функції

$$F=12x_{11}+6x_{21} \to \max \qquad (1)$$

за умов

$$12x_{11}+6x_{21}-60x_{12}-12x_{22}=0$$

$$x_{11}+x_{12}=1 \qquad (2)$$

$$x_{21}+x_{22}=1$$

$$(0 \le x_{11},x_{12},x_{21},x_{22} \le 1) \qquad (3)$$

Задача про рюкзак.

Найпростішою задачею цілочислового програмування, а саме задачею лише з одним обмеженням, є задача про рюкзак (або ранець). Така задача має багато прикладів практичного застосування. Назва «задача про рюкзак» пов'язана з інтерпретацією задачі вибору найкращого складу предметів, що задовольняють певні умови гіпотетичної проблеми туриста щодо вибору для походу оптимальної кількості речей.

Турист може вибирати потрібні речі із списку з n предметів. Відома вага кожного j-го предмета $m_j(j=\overline{1,n})$. Визначена також цінність кожного виду предметів w_j. Максимальна вага всього вантажу в рюкзаку не може перевищувати зазначеного обсягу M. Необхідно визначити, скільки предметів кожного виду турист має покласти в рюкзак, щоб загальна цінність спорядження була максимальною за умови виконання обмеження на вагу рюкзака.

Позначимо через x_j – кількість предметів j-го виду в рюкзаку. Тоді математична модель задачі матиме вигляд:

$$\max F=\sum_{j=1}^{n} w_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} m_j x_j \le M\ ;$$

$$x_j \ge 0,\ x_j \text{ — цілі числа, } (j = \overline{1,n})$$

Приклад. Фермеру для удобрення земельної ділянки необхідно придбати 107 кг добрив. Він може купити добрива в упаковках по 35 кг вартістю 14 ум. од. або по 24 кг вартістю 12 ум. од. Метою фермера є закупівля не менше, ніж 107 кг добрив з мінімальними витратами. Причому потрібно купувати або цілу упаковку, або не купувати її зовсім, бо частину упаковки придбати неможливо.

Розв'язання. Позначимо кількість упаковок вагою 35 кг та вагою 24 кг відповідно змінними x_1 та x_2. Маємо модель цієї задачі:

$$\min F = 14x_1 + 12x_2$$

$$35x_1 + 24x_2 \ge 107\ ;$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_1, x_2 \text{ — цілі числа.}$$

Задача оптимального розкрою матеріалів.

На підприємстві здійснюється розкрій m різних партій матеріалів у обсягах $b_i (i = \overline{1,m})$ одиниць однакового розміру в кожній партії. Із матеріалів усіх партій потрібно виготовити максимальну кількість комплектів Z, у кожен з яких входить p різних видів окремих частин в кількості $k_r (r = \overline{1,p})$ одиниць, враховуючи, що кожну одиницю матеріалу можна розкроїти на окремі частини n різними способами, причому у разі розкрою одиниці i-ої партії j-им способом отримуємо a_{ijr} деталей r-го виду.

Запишемо математичну модель задачі. Позначимо через x_{ij} — кількість одиниць матеріалу *i*-ої партії, що будуть розкроєні *j*-им способом. Тоді з *i*-ої партії за *j*-го способу розкрою отримаємо $a_{ijr}\, x_{ij}$ деталей *r*-го виду. З усієї ж *i*-ої партії у разі застосування до неї всіх *n* способів розкрою отримаємо $\sum_{j=1}^{n} a_{ijr} x_{ij}$

деталей r-го виду, а з усіх m партій їх буде отримано $Z_r = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijr}x_{ij}$. У кожен комплект має входити $k_r (r=\overline{1,p})$ деталей, тому відношення $Z_r / k_r (r=\overline{1,p})$ визначає кількість комплектів, які можна виготовити з деталей r-го виду. Кількість повних комплектів для всіх видів деталей визначається найменшим з цих відношень.

У разі повного комплекту має виконуватися рівність відношень:

$$Z_1/k_1 = Z_2/k_2 = ... = Z_r/k_r = ... = Z_p/k_p ,$$

звідки $p - 1$ відношення можна виразити через будь-яке з них, наприклад, через перше:

$$Z_r/k_r = Z_1/k_1 \quad (r=\overline{2,p}) \text{ або } Z_r = k_r Z_1/k_1 \quad (r=\overline{2,p}).$$

Замінивши Z_r та Z_1 їх значеннями, отримаємо $p - 1$ обмеження стосовно комплектів:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijr}x_{ij} = \frac{k_r}{k_1}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij1}x_{ij} ;$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ijr} - \frac{k_r}{k_1}a_{ij1}\right)x_{ij} = 0,\ r=\overline{2,p}.$$

Враховуючи наявну кількість одиниць матеріалу в партіях, запишемо m обмежень щодо ресурсів:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i \ (i=\overline{1,m}).$$

(Обмеження щодо використання ресурсів можуть бути рівняннями чи нерівностями залежно від того, повністю чи не повністю необхідно використати наявний обсяг ресурсів).

Всі x_{ij} мають задовольняти умову невід’ємності: $x_{ij} \geq 0 (i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n})$ та цілочисловості.

Отже, необхідно знайти найбільше значення функції:

$$\max Z = \min_{1\leq r\leq p}\frac{1}{k_r}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijr}x_{ij}$$

за обмежень:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ijr}-\frac{k_r}{k_1}a_{ij1}\right)x_{ij}=0, (r=\overline{2,p}); \\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=b_i \ (i=\overline{1,m}); \end{cases}$$

$$x_{ij}\geq 0 \ (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}),$$

$$x_{ij} \text{ — цілі числа } (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}).$$

Задача комівояжера.

Розглядається n міст A_1, A_2,..., A_n, що пов'язані між собою транспортною мережею. Відома матриця відстаней від кожного міста до усіх інших:

$$c_{ij}=\begin{pmatrix} 0 & c_{12} & ... & c_{1n} \\ c_{21} & 0 & ... & c_{2n} \\ .... & .... & ... & ..... \\ c_{n1} & c_{n2} & ... & 0 \end{pmatrix},$$

причому в загальному випадку не завжди $c_{ij}=c_{ji}$. Комівояжер повинен побувати в кожному місті тільки один раз і повернутися в те місто, з якого почав рухатися. Необхідно відшукати такий замкнений маршрут, що проходить через кожне місто лише один раз і довжина якого мінімальна.

Позначимо:

$$x_{ij}=\begin{cases} 1, \text{ якщо маршрут передбачає переїзд із } i\text{-го міста до } j\text{-го;} \\ 0, \text{ в іншому разі.} \end{cases}$$

Отже, x_{ij} може набувати лише двох значень: одиниці або нуля. Такі змінні мають назву бульових змінних. Очевидно, що вони є цілочисловими. Цільовою функцією цієї задачі є мінімізація всього маршруту комівояжера:

$$\min Z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij},$$

де c_{ij} — відстань між містами i та j.

Обмеження щодо одноразового в'їзду в кожне місто:

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1 \ \left(j=\overline{1,n};\ i\neq j\right).$$

Обмеження щодо одноразового виїзду з кожного міста:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \left(i = \overline{1,n}; i \neq j\right).$$

Зазначені обмеження не повністю описують допустимі маршрути і не виключають можливості розриву маршруту. Щоб усунути цей недолік, введемо невід'ємні цілочислові змінні $u_i (u_j)$ $\left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n};\ i \neq j\right)$, які в процесі розв'язування задачі набуватимуть значень порядкових номерів міст за оптимальним маршрутом прямування комівояжера. Запишемо обмеження, які усувають можливість існування підмаршрутів:

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1 \left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n};\ \ i \neq j\right).$$

Доведемо, що для довільного маршруту, який починається в пункті A_1, можна знайти такі $u_i(u_j)$, що задовольняють наведену нерівність. Нехай комівояжер переїжджає з міста A_i до міста A_j на p-му кроці і допустимо також, що $u_i = p$, тоді з міста A_j комівояжер вирушить на наступному, (p + 1)-му кроці і $u_j = p + 1$. Звідси випливає, що:

$$u_i - u_j + nx_{ij} = p - (p+1) + nx_{ij} = -1 + nx_{ij} \leq n - 1.$$

Така нерівність виконується для будь-яких значень i та j у разі, коли $x_{ij} = 0$, а при $x_{ij} = 1$ нерівність виконується як строге рівняння. Отже, якщо вибрано маршрут пересування з i-го міста до j-го, то згадана нерівність фіксує два підряд порядкових номери цих міст.

Отже, маємо таку математичну модель:

$$\min Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \ (j = \overline{1,n};\ i \neq j); \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \ (i = \overline{1,n};\ i \neq j); \\ u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1 \ (i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n};\ i \neq j), \end{cases}$$

$$x_{ij} \in \{0;1\}\ (i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n}).$$

Задача з постійними елементами витрат.

Відомо, що витрати на виготовлення будь-якої продукції складаються з двох частин: постійних та змінних витрат.

Нехай розглядається процес виробництва продукції за умов використання m видів ресурсів. Відомі обсяги кожного виду ресурсів $b_1, b_2, ..., b_m$, а також норми використання i-го $(i = \overline{1,m})$ виду ресурсів на одиницю виготовлення j-го $(j = \overline{1,n})$ виду продукції a_{ij}.

Умови використання ресурсів на виготовлення продукції можна записати у вигляді таких обмежень:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i\ (i = \overline{1,m}).$$

Витрати на виготовлення продукції поділяють на два види: постійні витрати — k_j, які не залежать від обсягу виробництва, і змінні — c_j, що розраховуються на одиницю виготовленої продукції, де j — вид продукції. Необхідно визначити оптимальні обсяги виробництва продукції $x_j (j = \overline{1,n})$, за яких загальні витрати були б мінімальними.

Зауважимо, що виготовлення будь-якої кількості продукції $(x_j > 0)$ потребує певних фіксованих k_j та змінних $c_j x_j$ витрат, тобто загальна сума витрат на виготовлення продукції обсягом x_j визначається за формулою: $D_j = k_j + c_j x_j$. Однак у разі, якщо $x_j = 0$ (продукція не випускається), то розрахунок витрат за формулою $D_j = k_j + c_j x_j = k_j + c_j \cdot 0 = k_j$ призводить до додатного значення, що неправильно. Для адекватного відображення функціональної залежності загальних витрат від обсягу виробленої продукції j-го виду можна скористатися такою нелінійною функцією:

$$z_j = k_j y_j + c_j x_j,$$

де y_j є бульовими змінними виду: $y_j = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x_j = 0; \\ 1, \text{ якщо } x_j > 0. \end{cases}$

Таку умову можна записати у вигляді лінійної нерівності. Допустимо, що існує таке досить велике число M, для якого умова $x_j \le M$ виконуватиметься для всіх допустимих значень x_j. Тоді обмеження виду:

$$x_j \le My_j$$

завжди виконується при $y_j = 1$, і, крім того, якщо y_j – ціле число, то мінімізація цільової функції забезпечує найменше значення $y_j = 1$. Якщо $y_j = 0$, то нерівність $x_j \le My_j = 0$ забезпечить $x_j = 0$.

Отже, маємо таку математичну модель:
цільова функція, що описує мінімальні загальні витрати на виробництво всіх видів продукції, набуває вигляду:

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n} (k_j y_j + c_j x_j)$$

за умов:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = \overline{1,m}); \\ x_j \le My_j \quad (j = \overline{1,n}); \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,n});$$

$$y_j \ge 0 \ (j = \overline{1,n});$$

$$y_j \text{ — цілі числа } (j = \overline{1,n}).$$

Задача планування виробничої лінії.

Розглядається процес функціонування виробничої лінії. Відома схема, яка зображає послідовність робіт для виготовлення k видів продукції $(k = \overline{1,K})$. Відомі також: a_j — тривалість виконання j-ї операції $(j = \overline{1,n})$; $d_j^{(k)}$ — термін для k-го виробу, до якого необхідно завершити операцію j; x_j — момент початку j-ї операції; t — тривалість виконання всіх операцій. Допускається, що в будь-який момент на верстаті виконується тільки одна операція.

Необхідно визначити оптимальні моменти початку кожної операції.

Економіко-математична модель виробничої лінії міститиме такі групи обмежень:

1. Послідовність виконання j-ї операції записується для всіх пар операцій так: $x_j + a_j \le x_i \quad \left(i, j = \overline{1, n}\right)$, якщо j-та операція передує i-й операції.

2. Обмеження щодо нерозгалуженості виробничого процесу для операцій i та j, які не виконуються одночасно ($i \neq j$), має вигляд:

або $x_i - x_j = a_j$, якщо операція j передує операції i;

або $x_j - x_i = a_i$, якщо операція i передує операції j.

Зауважимо, що логічні обмеження виду «або-або» не можуть входити до економіко-математичної моделі задачі лінійного програмування, оскільки вони породжують неопуклу множину допустимих розв'язків. Тому необхідно ввести допоміжні змінні, які уможливлюють запис наведених вище логічних умов у вигляді лінійних обмежень. Це такі бульові змінні:

$$y_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо операція } j \text{ передує } i; \\ 1, & \text{якщо операція } i \text{ передує } j. \end{cases}$$

Скориставшись прийомом з попереднього прикладу 6.6. (введення досить великого числа M), запишемо обмеження:

$$My_{ij} + \left(x_i - x_j\right) \ge a_j \quad \left(i, j = \overline{1, n}\right);$$

$$M\left(1 - y_{ij}\right) + \left(x_j - x_i\right) \ge a_i \quad \left(i, j = \overline{1, n}\right),$$

де M — досить велике число.

3. Обмеження щодо термінів виготовлення кожного виробу:

$$x_j + a_j \le d_j^{(k)} \quad (k = \overline{1, K}),$$

де j — остання операція для k-го виробу.

4. Усі операції мають бути виконані до моменту t:

$$x_j + a_j \le t, \left(j = \overline{1, n}\right).$$

Критерій оптимальності:

$$\min Z = t\,,$$

тобто ставиться завдання, щоб тривалість виготовлення всіх видів виробів була мінімальною.

Отже, маємо таку математичну модель:

$$\min Z = t$$

$$\begin{cases} x_j + a_j \le x_i \ (i, j = \overline{1, n};\ i \ne j); \\ My_{ij} + (x_i - x_j) \ge a_j \ \ (i, j = \overline{1, n};\ i \ne j); \\ M(1 - y_{ij}) + (x_j - x_i) \ge a_i \ \ (i, j = \overline{1, n};\ i \ne j); \\ x_j + a_j \le d_j^{(k)} \ (i = \overline{1, n};\ k = \overline{1, K}); \\ x_j + a_j \le t \ (j = \overline{1, n}); \end{cases}$$

$$x_i, (x_j) \ge 0\ t \ge 0;$$

$$y_{ij} \ge 0\,,\ y_{ij} \text{ — цілі числа } \left(i, j = \overline{1, n}\right).$$

3.3. Загальна характеристика методів розв’язання цілочислових задач лінійного програмування

Для знаходження оптимальних планів задач цілочислового програмування застосовують такі групи методів:

1) точні методи:

- методи відтинання;
- комбінаторні методи;

2) наближені методи.

Основою методів відтинання є ідея поступового «звуження» області допустимих розв’язків розглядуваної задачі. Пошук цілочислового оптимуму починається з розв’язування задачі з так званими послабленими обмеженнями, тобто без урахування вимог цілочисловості змінних. Далі введенням у модель спеціальних додаткових обмежень, що враховують цілочисловість змінних, багатогранник допустимих розв’язків послабленої задачі поступово зменшують доти, доки змінні оптимального розв'язку не набудуть цілочислових значень.

До цієї групи належать:

а) методи розв'язування повністю цілочислових задач (дробовий алгоритм Гоморі);

б) методи розв'язування частково цілочислових задач (другий алгоритм Гоморі, або змішаний алгоритм цілочислового програмування).

Комбінаторні методи цілочислової оптимізації базуються на ідеї перебору всіх допустимих цілочислових розв'язків, однак, згідно з їх процедурою здійснюється цілеспрямований перебір лише досить невеликої частини розв'язків.

Найпоширенішим у цій групі методів є метод гілок і меж.

Починаючи з розв'язування послабленої задачі, він передбачає поділ початкової задачі на дві підзадачі через виключення областей, що не мають цілочислових розв'язків, і дослідження кожної окремої частини багатогранника допустимих розв'язків.

Для розв'язування задач із бульовими змінними застосовують комбінаторні методи, причому, оскільки змінні є бульовими, то методи пошуку оптимуму значно спрощуються.

Досить поширеними є також наближені методи розв'язування цілочислових задач лінійного програмування. Оскільки для практичних задач великої розмірності за допомогою точних методів не завжди можна знайти строго оптимальний розв'язок за прийнятний час або для розв'язування задачі використовуються наближено визначені, неточні початкові дані, то часто в реальних задачах досить обмежитися наближеним розв'язком, пошук якого є спрощеним.

Значна частина наближених алгоритмів базується на використанні обчислювальних схем відомих точних методів, таких, наприклад, як метод гілок і меж.

До наближених методів належать: метод локальної оптимізації (метод вектора спаду); модифікації точних методів; методи випадкового пошуку та ін.

Головними показниками для зіставлення ефективності застосування конкретних наближених алгоритмів на практиці є такі: абсолютна Δ_1 та відносна Δ_2 похибки отриманих наближених розв'язків.

$$\Delta_1 = F(X^*) - F(X_1), \quad \Delta_2 = \frac{\left|F(X^*) - F(X_1)\right|}{\left|F(X^*)\right|},$$

де F — цільова функція (в даному разі для визначеності допускаємо вимогу відшукання максимального її значення); X1— наближений розв'язок, знайдений деяким наближеним методом; X* — оптимальний план задачі.

3.4. Метод Гоморі – представник методів відтинання

Сутність методів відсікання полягає в тому, що спочатку задача розв'язується без умови цілочисловості. Якщо отриманий план цілочисловий, то задача розв'язана. У іншому випадку до обмежень задачі додається нове обмеження, що володіє наступними властивостями:

- воно повинно бути лінійним;
- воно повинно відтинати знайдений оптимальний нецілочисловий план;
- воно не повинно відтинати жодного цілочислового плану.

Додаткове обмеження, що володіє зазначеними властивостями, називається правильним відсіканням.

Далі задача вирішується з урахуванням нового обмеження. Після цього в разі потреби додається ще одне обмеження і т.п.

Геометрично додавання кожного лінійного обмеження відповідає проведенню прямої (гіперплощини), що відтинає від багатокутника (багатогранника) розв'язків деяку його частину разом з оптимальною крапкою з нецілими координатами, але не торкається ні однієї з цілих крапок цього багатогранника. У результаті новий багатогранник розв'язку містить усі цілі крапки, які містилися в первинному багатограннику розв'язку і відповідно отриманий при цьому багатограннику оптимальний розв'язок буде цілочисловим. Один з алгоритмів розв'язку задачі лінійного цілочислового програмування (6.1)-(6.4), запропонований Гоморі. Цей алгоритм оснований на симплексному методі і використовує досить простий спосіб побудови правильного відсікання.

Нехай задача лінійного програмування (6.1)-(6.3) має кінцевий оптимум і на останньому кроці її розв'язку симплексним методом отримані наступні рівняння, що виражають основні змінні $x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_m$ через неосновні змінні $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_{m+i}, .., x_n$ оптимального розв'язку

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - \alpha_{1\,m+1} x_{m+1} - ... - \alpha_{1\,n} x_n, \\ x_2 = \beta_2 - \alpha_{2\,m+1} x_{m+1} - ... - \alpha_{2\,n} x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_i = \beta_i - \alpha_{i\,m+1} x_{m+1} - ... - \alpha_{i\,n} x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m = \beta_m - \alpha_{m\,m+1} x_{m+1} - ... - \alpha_{m\,n} x_n, \end{cases} \tag{3.5}$$

так, що оптимальним розв'язком задачі (3.1)-(3.3) є $X^* = (\beta_1\, \beta_2, ..., \beta_i, ..., \beta_m, 0, 0, ..., 0)$, у якому, наприклад β_i – нецілий компонент. У цьому випадку можна довести, що нерівність[1]

$$\{\beta_i\} - \{\alpha_{i\,m+1}\} x_{m+1} - ... - \{\alpha_{i\,n}\} x_n \le 0, \tag{3.6}$$

яка сформована по і-му рівнянню системи (6.5), має усі властивості правильного відсікання.

Для розв'язку задачі цілочислового лінійного програмування (3.1)-(3.4) методом Гоморі використовується наступний алгоритм:

1. Симплексним методом вирішити задачу (3.1)-(3.3) без враховування умови цілочисловості. Якщо усі компоненти оптимального плану цілі, то він є оптимальним і для задачі цілочислового програмування (3.1)-(3.4). Якщо перша задача (3.1)-(3.3) нерозв'язувана (тобто не має кінцевого оптимуму або умови її суперечливі), то і друга задача (3.1)-(3.4) також нерозв'язувана.

2. Якщо серед компонентів оптимального розв'язку є нецілі значення, то вибрати компоненту з найбільшою цілою частиною і по відповідному рівнянню системи (3.5) сформувати правильне відсікання (3.6).

3. Нерівність (3.6) введенням додаткової невід'ємної цілочислової змінної перетворити в рівносильне рівняння

$$\{\beta_i\} - \{\alpha_{im+1}\}x_{m+1} - ... - \{\alpha_{in}\}x_n + x_{n+1}, \tag{3.7}$$

і включити його в систему обмежень (3.2).

4. Отриману розширену задачу розв'язати симплексним методом. Якщо знайдений оптимальний план буде цілочисловим, то задача цілочислового програмування (3.1)-(3.4) розв'язана. У іншому випадку повернутися до п.2 алгоритму.

Якщо задача розв'язувана в цілих числах, то після кінцевого числа кроків (ітерацій) оптимальний цілочисловий план буде знайдений.

Якщо в процесі розв'язання з'явиться рівняння (яке виражає основну змінну через неосновні) з нецілим вільним членом і цілими іншими коефіцієнтами, то відповідне рівняння не має розв'язку в цілих числах. У цьому випадку і дана задачі не має цілочислового оптимального розв'язку.

Приклад 3.1. Для придбання устаткування по сортуванню зерна фермер виділяє 34 грош. од. Устаткування повинне бути розміщене на площі, що не перевищує 60 кв.м. Фермер може замовити устаткування двох видів: менш потужні машини типу А вартістю 3 грош. од., що вимагають виробничу

В нерівності (3.6) присутній символ $\{\}$, який означає дробову частину числа. Цілою частиною числа а називається найбільше ціле число $[a]$, яке не більше а, а дробовою частиною числа є число $\{a\}$, яке дорівнює різниці між цим числом і його цілою частиною, тобто $\{a\} = a - [a]$. Наприклад,

1. для $a = 2\,{}^{1}\!/_{3}$, $[a] = 2, \{a\} = 2\,{}^{1}\!/_{3} - 2 = {}^{1}\!/_{3}$;

2. для $a = -2\,{}^{1}\!/_{3}, [a] = -3$ і $\{a\} = -2\,{}^{1}\!/_{3} - (-3) = {}^{2}\!/_{3}$.

площу 3 кв. м (з урахуванням проходів), і які забезпечують продуктивність за зміну 2 т зерна, і більш потужні машини типу В вартістю 4грош. од., що займають площу 5 кв. м і забезпечують продуктивність за зміну 3 т сортового зерна.

Потрібно скласти оптимальний план придбання устаткування, що забезпечує максимальну загальну продуктивність за умови, що фермер може придбати не більш 8 машин типу В.

Розв’язання. Позначимо через x_1, x_2 кількість машин відповідно типу А і В, через Z - загальну продуктивність. Тоді математична модель задачі прийме вид:

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max \qquad (3.1')$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 60, & (1) \\ 3x_1 + 4x_2 \le 34, & (2) \\ \qquad\quad x_2 \le 8, & (3) \end{cases} \qquad (3.2')$$

$$x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0, \qquad (3.3')$$

$$x_1, x_2 - \text{цілі числа.} \qquad (3.4')$$

Приведемо задачу до канонічного виду, ввівши додаткові додатні змінні x_3, x_4, x_5. Одержимо систему обмежень:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 \qquad\qquad = 60, \\ 3x_1 + 4x_2 \qquad + x_4 \qquad = 34, \\ x_2 \qquad\qquad\qquad + x_5 = \ 8, \end{cases} \qquad (3.5')$$
$$x_j \geq 0, \ j = 1,2,...,5.$$

Розв'яжемо задачу симплексним методом.

I крок. Основні змінні x_3, x_4, x_5; неосновні змінні x_1, x_2.

$$\begin{cases} x_3 = 60 - 3x_1 - 5x_2, \\ x_4 = 34 - 3x_1 - 4x_2, \\ x_5 = \ 8 \qquad - \ x_2, \end{cases}$$
$$Z = 2x_1 + 3x_2.$$

Перший базисний розв'язок $X_1 = (0;0;60;34;8)$ – допустимий. Відповідне значення лінійної функції $Z_1 = 0$.

Переводимо в основні змінні змінну x_2, що входить у вираз лінійної функції мети з найбільшим позитивним коефіцієнтом. Знаходимо максимально можливе значення змінної x_2, що «дозволяє» прийняти система обмежень, з умови мінімуму відповідних співвідношень:

$$x_2 = \min\left\{\frac{60}{5}; \frac{34}{4}; \frac{8}{1}\right\} = 8,$$

тобто рівняння, що дозволяє (виділене) є третє рівняння. При $x_2 = 8$ у цьому рівнянні $x_5 = 0$, і в неосновні переходить змінна x_5.

II крок. Основні змінні x_2, x_3, x_4; неосновні змінні x_1, x_5.

$$\begin{cases} x_2 = \ \ 8 - x_5, \\ x_3 = 20 - 3x_1 + 5x_5, \\ x_4 = 2 - 3x_1 + 4x_5, \end{cases}$$
$$Z = 24 + 2x_1 - 3x_2.$$

$X_2 = (0;8;20;2;0);\ Z_2 = 24$. Переводимо в основні змінну x_1, $x_1 = \min\left\{\infty; \frac{20}{3}; \frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}$, а в неосновні x_4.

III крок. Основні змінні x_1, x_2, x_3; неосновні змінні x_4, x_5.

Після перетворень одержимо:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_4 + \frac{4}{3}x_5, \\ x_2 = 8 \qquad\quad - x_5, \\ x_3 = 18 \ + x_4 \ \ + x_5, \end{cases}$$

$$Z = 25\frac{1}{3} - \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5.$$

$$\boldsymbol{X}_3 = (\frac{2}{3}; 8; 18; 0; 0);\ \boldsymbol{Z}_3 = 25\frac{1}{3}.$$

Базисний розв'язок X_3 оптимальний для задачі (3.1')-(3.3') $(Z_{\max} = Z_3 = 25\frac{1}{3})$, тому що у виразі лінійної функції відсутні неосновні змінні з позитивними коефіцієнтами.

Однак розв'язок X_3 не задовільняє умові цілочислових (3.4'). По першому рівнянню зі змінною x_1, що одержала цілочислове значення в оптимальному розв'язку (2/3), складаємо додаткове обмеження (3.6):

$$\left\{\frac{2}{3}\right\} - \left\{\frac{1}{3}\right\}\boldsymbol{x}_4 - \left\{-\frac{4}{3}\right\}\boldsymbol{x}_5 \le 0.$$

Звертаємо увагу на те, що згідно (6.5) і (6.6) беремо дробову частину вільного члена з тим же знаком, що він має в рівнянні, а дробові частини коефіцієнтів при неосновних змінних x_4 і x_5 – із протилежними знаками.

Тому що дробові частини $\left\{\frac{2}{3}\right\} = \left\{0 + \frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}$, $\left\{\frac{1}{3}\right\} = \left\{0 + \frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3}$,

$\left\{-\dfrac{4}{3}\right\} = \left\{-2+\dfrac{2}{3}\right\} = \dfrac{2}{3}$, ту останню нерівність запишемо у виді

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 \le 0. \qquad (3.6')$$

Увівши додаткову цілочислову змінну $x_6 \ge 0$, одержимо рівносильне нерівності (6.6') рівняння

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 + x_6 = 0. \qquad (3.7')$$

Рівняння (3.7') необхідно включити в систему обмежень (3.5') вихідної канонічної задачі, після чого повторити процес розв'язання задачі симплекс-ним методом стосовно розширеної задачі. При цьому для скорочення числа кроків (ітерацій) рекомендується вводити додаткове рівняння (3.7') у систему, отриману на останньому кроці розв'язків задачі (без умови цілочисловості).

IV крок. Основні змінні x_1, x_2, x_3, x_6; неосновні змінні x_1, x_2.

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3}x_4 + \dfrac{4}{3}x_5, \\ x_2 = 8 - x_5, \\ x_3 = 18 + x_4 + x_5, \\ x_6 = -\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}x_4 + \dfrac{2}{3}x_5. \end{cases}$$

Базисний розв'язок $\boldsymbol{X}_4 = \left(\dfrac{2}{3};\ 8; 18; 0; 0; -\dfrac{2}{3}\right)$ - недопустимий. (Відмітимо, що після включення в систему обмежень додаткового рівняння, що відповідає правильному відсіканню, завжди буде виходити неприпустимий базисний розв'язок).

Для одержання допустимого базисного розв'язку необхідно перевести в основні змінну, яка входить у рівняння з позитивним коефіцієнтом, у якому вільний член негативний, тобто x_4 або x_5 (на цьому етапі лінійну функцію мети не розглядаємо). Переводимо в основні, наприклад, змінну x_5.

V крок. Основні змінні x_1, x_2, x_3, x_5; неосновні змінні x_4, x_6.

Після перетворень одержимо:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_4 + 2x_6, \\ x_2 = 7 + \dfrac{1}{2}x_4 - \dfrac{3}{2}x_6, \\ x_3 = 19 + \dfrac{1}{2}x_4 + \dfrac{3}{2}x_6, \\ x_5 = 1 - \dfrac{1}{2}x_4 + \dfrac{3}{2}x_6, \end{cases}$$

$$Z = 25 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_6.$$

$$X_5 = (2;7;19;0;1;0);\ \ Z_5 = 25.$$

Тому що у виразі лінійної функції мети немає основних змінних з позитивними коефіцієнтами, то X_5 – оптимальний розв'язок.

Отже $Z_{max} = 25$ при оптимальному цілочисловому розв'язку $X^* = X_5 = (2;7;19;0;1;0)$, тобто максимальну продуктивність 25 т сортового зерна за зміну можна одержати придбанням 2 машин типу А и 7 машин типу В; при цьому незайнята площа приміщення складе 19 кв. м, залишки коштів з виділених дорівнюють 0, у резерві для покупки 1 машина типу В (шостий компонент змістовного смислу не має).

Приклад 3.2. Є досить велика кількість колод довжиною 3 м. Колоди варто розпиляти на заготовки двох видів: довжиною 1,2 м і довжиною 0,9 м, причому заготовок кожного виду повинно бути отримано не менш 50 шт. і 81 шт. відповідно. Кожну колоду можна розпиляти на зазначені заготовки декількома способами: 1) на 2 заготівки по 1,2 м; 2) на 1 заготівку по 1,2 м і 2 заготівки по 0,9 м; 3) на 3 заготівки по 0,9 м. Знайти число колод, що розпилюються кожним способом, для того щоб заготовки будь-якого виду було отримано з найменшого числа колод.

Розв'язання. Позначимо через x_1, x_2, x_3 число колод, що розпилюються відповідно 1, 2 і 3-м способами. З них можна одержати $2x_1 + x_2$ заготовок по 1,2 м і $2x_1 + 3x_2$ заготовок по 0,9 м. Загальну кількість колод позначимо *Z*. Тоді математична модель задачі прийме вид:

$$Z = x_1 + x_2 + x_3 \to \min \tag{3.1''}$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 50, \\ 2x_2 + 3x_3 \geq 81, \end{cases} \tag{3.2''}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3 \tag{3.3''}$$

$$x_j - \textit{цілі числа.} \tag{3.4''}$$

Вводячи додаткові змінні $x_4 \geq 0, \; x_5 \geq 0,$ приведемо систему нерівностей до рівносильної системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 = 50, \\ 2x_2 + 3x_3 - x_5 = 81, \end{cases} \quad x_j \geq 0, \; j = 1,2,...,5. \tag{3.5''}$$

Розв'язуючи отриману канонічну задачу (без умови цілочисловості) симплексним методом, на останньому, III кроці розв'язання знайдемо наступні вирази основних змінних і лінійної функції мети через неосновні змінні (рекомендуємо одержати їх самостійно).

III крок. Основні змінні x_1, x_2; неосновні змінні x_3, x_4, x_5.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 = 4\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\boldsymbol{x}_3 + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_4 - \frac{1}{4}\boldsymbol{x}_5, \\ \boldsymbol{x}_2 = 40\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\boldsymbol{x}_3 \qquad + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_5, \end{cases}$$

$$\boldsymbol{Z} = 45\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\boldsymbol{x}_3 + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_4 + \frac{1}{4}\boldsymbol{x}_5,$$

тобто $Z_{\min} = 45\frac{1}{4}$ при оптимальному розв'язку $\boldsymbol{X}_3 = \left(4\frac{3}{4};\ 40\frac{1}{2};\ 0;\ 0;\ 0\right)$.

Одержали, що два компоненти оптимального розв'язку $x_1 = 4\frac{3}{4}$ і $x_2 = 40\frac{1}{2}$ не задовільняють умові цілочисловості (3.4''), причому велику частину має компонента x_2. Відповідно до п.2 алгоритму розв'язку задачі цілочислового програмування (див. с.156) по другому рівнянню, що містить цю змінну x_2, складаємо додаткове обмеження (3.6):

$$\left\{40\frac{1}{2}\right\} - \left\{\frac{3}{2}\right\}x_3 - \left\{-\frac{1}{2}\right\}x_5 \le 0.$$

Знайдемо дробові частини $\left\{40\frac{1}{2}\right\} = \left\{40 + \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}, \left\{\frac{3}{2}\right\} = \left\{1 + \frac{1}{2}\right\} = \left\{\frac{1}{2}\right\},$

$\left\{-\frac{1}{2}\right\} = \left\{-\frac{1}{2} - (-1)\right\} = \frac{1}{2}$ і запишемо останню нерівність у виді

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5 \le 0. \qquad (3.6'')$$

Ввівши додаткову змінну $x_6 \geq 0$, одержимо рівносильне нерівності (6.6’’) рівняння

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_5+x_6=0. \qquad (3.7'')$$

Виразимо з (6.7’’) додаткову змінну x_6 і отримане рівняння введемо в систему обмежень, що ми мали на останньому, III кроці, розв’язку задачі (3.1’’)-(3.3’’) (без умови цілочисловості).

IV крок. Основні *змінні* x_1, x_2, x_6; неосновні змінні x_3, x_4, x_5.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 = 4\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\boldsymbol{x}_3+\frac{1}{2}\boldsymbol{x}_4-\frac{1}{4}\boldsymbol{x}_5, \\ \boldsymbol{x}_2 = 40\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\boldsymbol{x}_3 \qquad +\frac{1}{2}\boldsymbol{x}_5, \\ \boldsymbol{x}_6 = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\boldsymbol{x}_3 \qquad +\frac{1}{2}\boldsymbol{x}_5, \end{cases}$$

$$\boldsymbol{Z} = 45\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\boldsymbol{x}_3+\frac{1}{2}\boldsymbol{x}_4+\frac{1}{4}\boldsymbol{x}_5.$$

Розв’язуючи цю розширену задачу симплексним методом (пропонуємо студентам виконати самостійно), одержимо наступне.

V крок. Основні змінні x_1, x_2, x_3;

неосновні змінні x_4, x_5, x_6.

$$\begin{cases} x_1 = 5\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_4 - x_5 + \frac{3}{2}x_6, \\ x_2 = 39 \qquad\quad + 2x_5 - 3x_6, \\ x_3 = \;\; 1 \qquad\quad\;\; - x_5 + 2x_6, \end{cases}$$

$$Z = 45\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_6,$$

тобто $Z_{\min} = 45\frac{1}{2}$ при оптимальному розв'язку $\boldsymbol{X}_5 = \left(5\frac{1}{2}; 39; 1; 0; 0; 0\right)$.

Отриманий оптимальний розв'язок розширеної задачі (3.1'')-(3.3''), (3.6'') знову не задовільняє умові цілочисловості) (3.4''). По першому рівнянню із змінною x_1, що одержала цілочислові) значення в оптимальному розв'язку $\left(5\frac{1}{2}\right)$, складаємо друге додаткове обмеження (3.6):

$$\left\{5\frac{1}{2}\right\} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}x_4 - \{1\}x_5 - \left\{-\frac{3}{2}\right\}x_6 \le 0,$$

яке приводимо до виду $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_6 \le 0.$

За допомогою додаткової змінної $x_7 \ge 0$ приводимо цю нерівність до рівносильного рівняння, яке включаємо в систему обмежень, отриману на останньому, V кроці, розв'язку розширеної задачі (3.1'')-(6.3''), (3.6'') симплексним методом.

VI крок. Основні перемінні x_1, x_2, x_3, x_7; неосновні перемінні x_4, x_5, x_6.

$$\begin{cases} x_1 = 5\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_4 - x_5 + \frac{3}{2}x_6, \\ x_2 = 39 \qquad\quad + 2x_5 - 3x_6, \\ x_3 = \ \ 1 \qquad\quad - x_5 + 2x_6, \\ x_7 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_4 \qquad\quad + \frac{1}{2}x_6, \end{cases}$$

$$Z = 45\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_6.$$

Випускаючи подальше розв'язання задачі симплексним методом (пропонуємо зробити це самим студентам), одержимо на заключному, VII кроці, наступне.

VII крок. Основні змінні x_1, x_2, x_3, x_4;

неосновні змінні x_5, x_6, x_7.

$$\begin{cases} x_1 = 6 - x_5 - x_6 - x_7, \\ x_2 = 39 + 2x_5 - 3x_6, \\ x_3 = 1 - x_5 + 2x_6, \\ x_4 = 1 - x_6 + 2x_7, \end{cases}$$

$$Z = 46 + x_7,$$

тобто $\qquad Z_7 = 46$ при $X_7 = (6;39;1;1;0;0;0)$.

Тому що у виразі лінійної функції мети немає неосновних змінних з негативними коефіцієнтами, X_7 – оптимальний цілочисловий розв'язок вихідної задачі.

Варто звернути увагу на те, що в отриманому виразі лінійної функції мети Z відсутні неосновні змінні x_5 і x_6. Це означає, що існує нескінченна безліч оптимальних розв'язків (будь-яких, не обов'язково цілочислових), при яких $Z^* = Z_{\min} = 46$. Ці розв'язки виходять при значенні неосновної змінної x_7 (що входить у вираз для Z), яка дорівнює нулеві (тобто при $x_7 = 0$), і при будь-яких значеннях неосновних змінних x_5 і x_6 (які не вхідять у вираз для Z), які «дозволяє» прийняти система обмежень: $0 \le x_5 \le \min\{6;39/2;1;\infty\} = 1$ і $0 \le x_6 \le \min\{\infty;13;\infty;1\} = 1,$ тобто при $0 \le x_5 \le 1$ й $0 \le x_6 \le 1.$ Але в силу умови цілочисловості змінні x_5 і x_6 можуть прийняти тільки значення 0 або 1.Тому задача буде мати чотири цілочислових оптимальних розв'язки, коли x_5 і x_6 у будь-якій комбінації приймають значення 0 або 1, а $x_7 = 0$. Підставляючи ці значення в систему обмежень на VII кроці, знайдемо ці оптимальні розв'язки:

$$\boldsymbol{X}_7^{(1)} = (6;\ 39;\ 1;\ 1;\ 0;\ 0;\ 0), \qquad \boldsymbol{X}_7^{(2)} = (7;\ 36;\ 3;\ 0;\ 0;\ 1),$$
$$\boldsymbol{X}_7^{(3)} = (5;\ 41;\ 0;\ 1;\ 1;\ 0;\ 0), \qquad \boldsymbol{X}_7^{(4)} = (6;\ 38;\ 2;\ 0;\ 1;\ 1;\ 0).$$

Наявність альтернативних оптимальних цілочислових розв'язків дозволяє здійснити вибір одного з них, керуючись додатковими критеріями, що не враховуються в математичній моделі задачі. Наприклад, з умови даної задачі випливає, що розпилювання колод не дає відходів лише по третьому способі, тому природно при виборі одного з чотирьох оптимальних розв'язків віддати перевагу розв'язку $X_7^{(3)}$, при якому максимальне число колод ($x_2 = 41$) розпилюється без відходів.

Отже, $Z_{\min} = 46$ при оптимальних цілочислових розв'язках (5;41;0), (6;39;1), (7;36;3), (6;38;2). (При записі оптимальних розв'язків ми залишили лише перші три компоненти, що виражають число колод, що розпилюються відповідно першим, другим і третім способами, і виключили останні чотири компоненти, що не мають смислового значення).

Недоліком методу Гоморі є вимога цілочисловості для всіх змінних – як основних (які виражають, наприклад, у задачі про використання ресурсів одиниці продукції), так і додаткових змінних (які виражають величину невикористаних ресурсів, що можуть бути і дробовими).

3.5. Метод гілок та меж – представник комбінаторних методів

В основі комбінаторних методів є перебір можливих варіантів розв'язків поставленої задачі. Кожен з них характеризується певною послідовністю перебору варіантів та правилами виключення, що дають змогу ще в процесі розв'язування задачі виявити неоптимальні варіанти без попередньої їх перевірки. Відносна ефективність різних методів залежить від того, наскільки кожен з них уможливлює скорочення необхідного процесу перебору варіантів у результаті застосування правила виключення.

Розглянемо один із комбінаторних методів. Для розв'язування задач цілочислового програмування ефективнішим за метод Гоморі є метод гілок і меж. Спочатку, як і в разі методу Гоморі, симплексним методом розв'язується послаблена (без умов цілочисловості) задача. Потім вводиться правило перебору.

Нехай потрібно знайти цілочислову змінну x_j, значення якої $x_j = x'_j$ в оптимальному плані послабленої задачі є дробовим. Очевидно, що в деякому околі даної точки також не існує цілочислових значень, тому відповідний проміжок можна виключити із множини допустимих планів задачі в подальшому розгляді. Таким проміжком є інтервал між найближчими до x'_j цілочисловими значениями. Можна стверджувати, що на інтервалі $[x'_j]$; $[x'_j]+1$[цілих значень немає ($[x'_j]$ - ціла частина x'_j).

Наприклад, якщо $x'_j = 2{,}7$ дістаємо інтервал]2;3[, де, очевидно, немає x_j, яке набуває цілого значення і оптимальний розв'язок буде знаходитися або в інтервалі $x_j \le 2$, або $x_j \ge 3$. Виключення проміжку]2;3[з множини допустимих планів здійснюється введенням до системи обмежень початкової задачі додаткових нерівностей. Тобто допустиме ціле значення x_j має задовільняти одну з нерівностей виду:

$$x_j \le \lfloor x'_j \rfloor \text{ або } x_j \ge \lfloor x'_j \rfloor + 1.$$

Дописавши кожну з цих умов до задачі з послабленими обмеженнями, дістанемо дві, не пов'язані між собою, задачі. Тобто, початкову задачу цілочислового програмування (3.1)—(3.4) поділимо на дві задачі з урахуванням умов цілочисловості змінних, значення яких в оптимальному плані послабленої задачі є дробовими. Це означає, що симплекс-методом розв'язуватимемо дві такі задачі:

перша задача:
$$\max\ (\min)\ \boldsymbol{Z} = \sum_{\boldsymbol{j}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{c}_j \boldsymbol{x}_j \tag{3.14}$$

за умов:
$$\begin{gathered}\sum_{\boldsymbol{j}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{c}_j \boldsymbol{x}_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} \boldsymbol{b}_i \quad (\boldsymbol{i} = \overline{1, \boldsymbol{m}}); \\ (\boldsymbol{x}_j \ge 0 \quad (\boldsymbol{j} = \overline{1, \boldsymbol{n}}); \\ \boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{цілі\ \ числа}, \quad \boldsymbol{j} = \overline{1, \boldsymbol{n}}; \\ \boldsymbol{x}_j \le \left[\boldsymbol{x}'_j\right],\end{gathered} \tag{3.15)-(3.18}$$

друга задача:
$$\max\ (\min)\ \boldsymbol{Z} = \sum_{\boldsymbol{j}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{c}_j \boldsymbol{x}_j \tag{3.19}$$

за умов:

$$\begin{gathered}\sum_{\boldsymbol{j}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{c}_j \boldsymbol{x}_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} \boldsymbol{b}_i \quad (\boldsymbol{i} = \overline{1, \boldsymbol{m}}); \\ (\boldsymbol{x}_j \ge 0 \quad (\boldsymbol{j} = \overline{1, \boldsymbol{n}}); \\ \boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{цілі\ \ числа}, \quad \boldsymbol{j} = \overline{1, \boldsymbol{n}}; \\ \boldsymbol{x}_j \ge \left[\boldsymbol{x}'_j\right] + 1,\end{gathered} \tag{3.20)-(3.23}$$

де x'_j –дробова компонента розв’язку задачі (6.1) – (6.4).

Наведені задачі (3.14)—(3.18) і (3.19)—(3.23) спочатку послаблюємо, тобто розв'язуємо з відкиданням обмежень (3.17) і (3.22). Якщо знайдені оптимальні плани задовільняють умови цілочисловості, то ці плани є розв'язками задачі (3.1)—(3.4). Інакше пошук розв'язку задачі триває. Для дальшого розгалуження вибираємо розв'язок задачі з більшим значенням цільової функції, якщо йдеться про максимізацію, і навпаки — з меншим значенням цільової функції в разі її мінімізації. Подальше розгалуження виконується доти, доки не буде встановлено неможливість поліпшення розв'язку. Здобутий останній план — оптимальний.

Розв'язування цілочислових задач методом гілок і меж можна значно прискорити. Очевидно, що кожна наступна задача, яку отримують в процесі розв'язування відрізняється від попередньої лише одним обмеженням. Тому за послідовного розв'язування задач немає сенсу розв'язувати їх симплексним методом спочатку. Досить буде почергово приєднати нові обмеження виду (3.18) і (3.23) до останньої симплекс-таблиці попередньої задачі та вилучити (в разі необхідності) непотрібні «старі» обмеження.

Геометрично введення додаткових лінійних обмежень виду (3.18) та (3.23) в систему обмежень початкової задачі означає проведення гіперплощин (прямих), що розтинають багатогранник (багатокутник) допустимих планів відповідної задачі лінійного програмування у такий спосіб, що уможливлюється включення в план найближчої цілої точки цього багатокутника (рис. 3.4). Допустимо, що A — точка максимуму, тоді за методом гілок та меж багатокутник допустимих планів задачі ABCOD поділяється на дві частини прямими $x_j \le \lfloor x'_j \rfloor$ та $x_j \ge \lfloor x'_j \rfloor + 1$, що виключає з розгляду точку A, координата якої x'_j є не цілим числом.

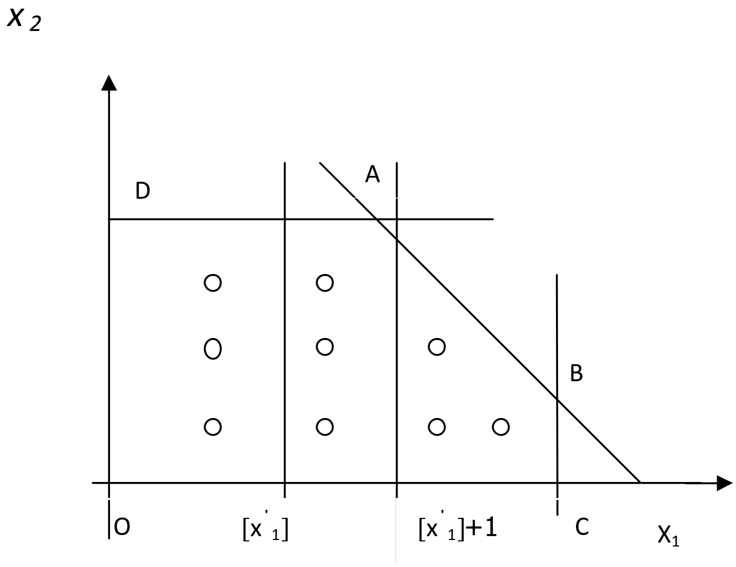


Рис.3.1 Графічне пояснення методу гілок та меж

Опишемо алгоритм методу гілок та меж:

1. Симплексним методом розв'язують задачу (3.1)—(3.3) (без вимог цілочисловості змінних). Якщо серед елементів умовно- оптимального плану немае дробових чисел, то розв'язок є оптимальним планом задачі цілочислового програмування (3.1)— (3.4).

Якщо задача (3.1)—(3.3) не має розв'язку (цільова функція необмежена, або система обмежень несумісна), то задача (3.1)-(3.4) також не має розв'язку.

2. Коли в умовно-оптимальному плані є дробові значення, то вибирають одну з нецілочислових змінних x'_j і визначають її цілу частину $[x'_j]$.

3. Записують два обмеження, що відтинають нецілочислові розв'язки:

$$x_1 \le [x'_1],$$
$$x_1 \ge [x'_1] + 1$$

4. Кожну з одержаних нерівностей приєднують до обмежень початкової задачі. В результаті отримують дві нові цілочислові задачі лінійного програмування.

5. У будь-якій послідовності розв'язують обидві задачі. У разі, коли

отримано цілочисловий розв'язок хоча б однієї із задач, значення цільової функції цієї задачі зіставляють з початковим значенням. Якщо різниця не більша від заданого числа ε, то процес розв'язування може бути закінчено. У разі, коли цілочисловий розв'язок одержано в обох задачах, то з розв'язком початкової зіставляється той, який дає краще значення цільової функції. Якщо ж в обох задачах одержано нецілочислові розв'язки, то для дальшого гілкування вибирають ту задачу, для якої здобуто краще значення цільової функції і здійснюють перехід до кроку 2.

Приклад 3.2. Сільськогосподарське підприємство планує відкрити сушильний цех на виробничій площі 190 м^2, маючи для цього 100 тис. грн. і можливість придбати устаткування двох типів А і В. Техніко – економічну інформацію стосовно одиниці кожного виду устаткування подано в табл.3.1:

Таблиця 3.1

Показник	Устаткування		Ресурс
	А	В	
Вартість, тис. грн.	25	10	100
Необхідна виробнича площа, м^2	40	20	190
Потужність, тис. грн. / рік	350	150	_

Розв'язання. Позначимо x_1 і x_2 - кількість комплектів устаткування відповідно типу А і В.

Запишемо економіко – математичну модель задачі:

$$\max \boldsymbol{Z} = 350\boldsymbol{x}_1 + 150\boldsymbol{x}_2,$$
$$25\boldsymbol{x}_1 + 10\boldsymbol{x}_2 \le 100;$$
$$40\boldsymbol{x}_1 + 20\boldsymbol{x}_2 \le 190;$$
$$\boldsymbol{x}_1 \ge 0, \boldsymbol{x}_2 \ge 0,$$
$$\boldsymbol{x}_1 \ \boldsymbol{\textit{і}} \ \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{\textit{цілі числа}}.$$

Відкинувши умову цілочисловості, дістанемо розв'язок: $x_1 = 1$,

$x_2 = 7\frac{1}{2}$. Отже, допустиме ціле значення x_2 має задовільняти одну з нерівностей $x_2 \le \left[7\frac{1}{2}\right] = 7,$ або $x_2 \ge \left[7\frac{1}{2}\right] + 1 = 8.$ Приєднуємо до початкової задачі окремо кожне з обмежень, нехтуючи умовою цілочисловості, і розв'язуємо по черзі обидві утворені задачі:

Задача1

$$\max Z = 350x_1 + 150x_2,$$
$$25x_1 + 10x_2 \le 100;$$
$$40x_1 + 20x_2 \le 190;$$
$$x_2 \le 7;$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$$
$$x_1 \text{ і } x_2 - \text{цілі числа}$$

Задача2

$$\max Z = 350x_1 + 150x_2,$$
$$25x_1 + 10x_2 \le 100;$$
$$40x_1 + 20x_2 \le 190;$$
$$x_2 \ge 8;$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$$
$$x_1 \text{ і } x_2 - \text{цілі числа}$$

Для задачі 1(з обмеженням $x_2 \le 7$) оптимальним буде розв’язок $X' = (x_1 = 1{,}2; x_2 = 7),\ Z'_{\max} = 1470$, а для задачі 2 (з обмеженням $x_2 \ge 8$) — розв'язок $X'' = (x_1 = 0{,}75; x_2 = 8),\ Z''_{\max} = 142{,}5$. Оскільки цілочислового плану не знайдено, процес необхідно продовжити, узявши для дальшого розгалуження першу задачу, оптимальний план якої дає більше значення функціонала. Розв'язуємо задачу 1, окремо приєднуючи до неї обмеження: $x_1 \le 1$ і $x_1 \ge 2$. Отримуємо такі дві задачі:

Задача 3	Задача 4
$\max Z = 350x_1 + 150x_2,$	$\max Z = 350x_1 + 150x_2,$
$25x_1 + 10x_2 \le 100$;	$25x_1 + 10x_2 \le 100$;
$40x_1 + 20x_2 \le 190$;	$40x_1 + 20x_2 \le 190$;
$x_2 \le 7$;	$x_2 \le 7$;

$x_1 \le 1$;	$x_1 \ge 2$;
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$;	$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$;
x_1 і x_2 - цілі числа.	x_1 і x_2 - цілі числа.

Розв'язком задачі 3 є план $X''' = (x_1 = 1; x_2 = 7),\ Z'''_{max} = 1400$, а задачі 4 план $X''' = (x_1 = 2; x_2 = 5),\ Z'''_{max} = 1450$. Обидва розв'язки є цілочисловими, проте краще значення цільової функції забезпечує розв'язок задачі 4. Тому оптимальним планом початкової цілочислової задачі буде:

$$X^* = (x_1 = 2; x_2 = 5),\ Z^* = 1450.$$

Схема процесу розв'язування задачі з прикладу 6.2 (рис. 6.5) досить наочно пояснює назву методу гілок та меж. Початкова задача розділяється (гілкується) на дві простіші, і, якщо серед них не існує задачі з цілочисловим оптимальним розв'язком, то процес гілкування продовжується. Отже, всі розглянуті дії можна зобразити у вигляді «дерева».

Кожен елемент такого «дерева» — це певна задача, що має відповідний оптимальний план. Після одержання нецілочислового розв'язку послабленої (тобто без умови цілочисловості) початкової задачі ми перетворили її на дві інші з додатковими умовами. З них кращим виявився розв'язок задачі I, однак оскільки він був не цілочисловим, то ми продовжили процес гілкування. Задачу I введенням додаткових обмежень перетворили в задачу 3 та задачу 4.

Оптимальні плани обох цих задач цілочислові, але план задачі 4 дає більше значення функціонала, тому цілочисловим оптимальним планом початкової задачі є розв'язок задачі 4.

Зауваження 1. Неважко бачити, що кожна наступна задача, що складається в процесі застосування методу гілок і меж, відрізняється від попередньої лише однією нерівністю – обмеженням. Тому при розв’язанні кожної наступної задачі немає рації вирішувати її симплексним методом із самого початку (з 1 кроку). А доцільніше почати розв’язок з останнього кроку (ітерації) попередньої задачі, із системи обмежень якої виключити «старі» (одне або два) рівняння – обмеження і ввести в цю систему «нові» рівняння – обмеження.

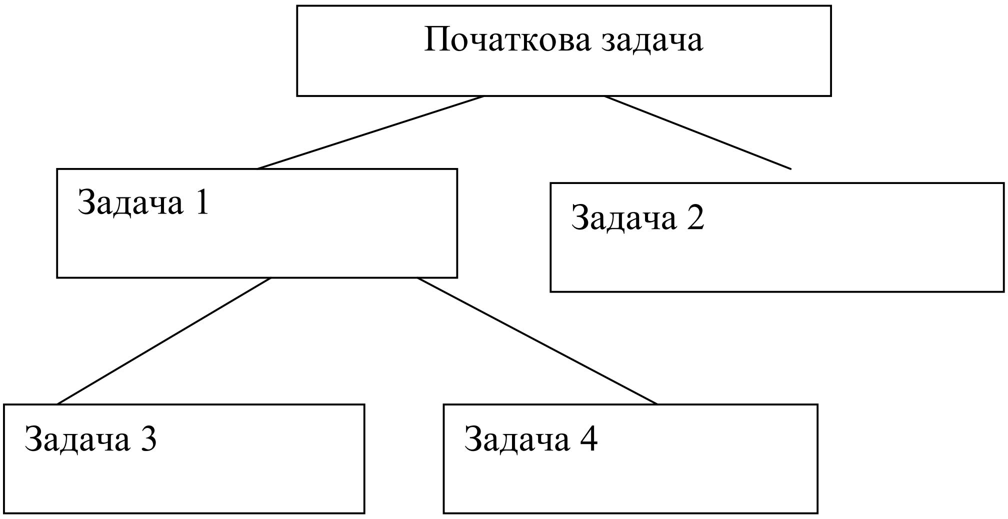


Рис. 6.5Граф Розвязання задачі за методом гілок та меж

3.6. Приклади та завдання для самостійної роботи

У задачах 3.1-3.7 методом Гоморі (або методом гілок і меж) знайти оптимальні розв’язки задач цілочиселового лінійного програмування. Дати геометричну інтерпретацію процесу розв’язків задач.

3.1. $Z = 3x_1 + x_2 \to \max$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 13, \\ x_1 - x_2 \le 6, \\ -3x_1 + x_2 \le 9, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$

$$x_1, x_2 - \textit{цілі числа}.$$

3.2. $Z = 5x_1 + 7x_2 \to \min$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \le 78, \\ 5x_1 - 6x_2 \le 26, \\ x_1 + 4x_2 \ge 25, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$

$$x_1, x_2 - \textit{цілі числа}.$$

3.3. $Z = 2x_1 + x_2 \to \max$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \geq 24, \\ -3x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ -x_1 + 3x_2 \geq 3, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,$$

$$x_1, x_2 - \textit{цілі числа.}$$

3.4. $Z = 6x_1 + x_2 \to \min$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 9, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 50, \\ -x_1 + 4x_2 \geq 18, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,$$

$$x_1, x_2 - \textit{цілі числа.}$$

3.5. Розв'яжіть задачі цілочислового програмування методом Гоморі.

1)

$$Z = x_1 \to \max$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_4 = 24, \\ x_j \geq 0, \quad x_j - \textit{цілі}, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

2)

$$Z = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 \to \max$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_4 + x_5 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad x_j - \textit{цілі числа}, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

3.6. Розв'яжіть задачі цілочислового програмування методом «гілок та меж»:

$$Z = 2x_1 + x_2 \to \max$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 16, \\ 6x_1 + 5x_2 \leq 30, \\ x_j \geq 0, \quad x_j - \textit{цілі числа}, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

3.7. Питання для самоперевірки

1. Яка задача цілочислового програмування називається цілочисловою?

2. Наведіть приклади економічних задач, що належать до цілочислових.

3. Як геометрично можна інтерпретувати розв'язок задачі цілочислового програмування?

4. Охарактеризуйте головні групи методів розв'язання задач цілочислового програмування.

5. Опишіть алгоритм методу Гоморі.

6. Що означає правильне відтинання?

7. Опишіть алгоритм методу гілок та меж.

РОЗДІЛ 4

ТЕОРІЯ ДВОЇСТОСТІ. АНАЛІЗ ОПТИМАЛЬНИХ РОЗВЯЗКІВ

4.1. Економічна інтерпретації прямої та двоїстої задачі

Теорія двоїстості є потужним математичним апаратом обґрунтування структури виробництва в передплановому періоді. Вона дає змогу насамперед визначити статус ресурсів та інтервали стійкості двоїстих оцінок відносно зміни запасів дефіцитних ресурсів. В умовах ринкової економіки ціни на ресурси можуть змінюватися в доволі широких межах. Крім цього, постачальники не за своєю волею можуть не виконати попередніх домовленостей. Тому аналіз ринку ресурсів у передплановому періоді має суттєве значення. Важливою є проблема заміни даного дефіцитного ресурсу іншим, більш дорогим.

Використання двоїстих оцінок дає можливість визначити рентабельність кожного виду продукції, яка виробляється підприємством. При цьому можна оцінити інтервали можливої зміни цін одиниці кожного виду продукції, що дуже важливо в умовах ринку.

Отже, аналіз лінійної економіко-математичної моделі на чутливість дає широкий спектр динамічної інформації про визначений оптимальний план і змогу дослідити вплив можливих змін на результати господарської діяльності.

Розроблена економіко-математична модель може бути використана для машинної імітації процесу виробництва. Це дає можливість перевірити:

1) за яких умов оптимальний план є стійким;

2) чи є вигідним додаткове залучення ресурсів;

3) як зміниться ефективність виробництва в разі загострення конкуренції на ринку збуту (оцінити виправданість у цій ситуації зниження цін на продукцію);

4) доцільність виробництва нової продукції;

5) як вплине на ефективність діяльності підприємства порушення споживачами продукції попередніх угод — відмова від частини або всієї продукції. Як має виробник у цій ситуації змінити план виробництва продукції, щоб уникнути втрат, пов'язаних із надвиробництвом відповідного виду продукції.

Зауважимо, що дослідження планів, здобутих за економіко-математичними моделями, на стійкість, а також оцінювання ситуацій мають виконуватися в передплановому періоді.

Компоненти оптимального розв’язку двоїстої задачі називаються оптимальними (двоїстими) оцінками вихідної задачі. Академік Л.В.Канторович назвав їх об'єктивно обумовленими оцінками.

Економічну інтерпретацію двоїстої задачі розглянемо на прикладі задачі оптимального використання обмежених ресурсів. Для виробництва n видів продукції використовується m видів ресурсів, запаси яких обмежені значеннями $b_1(i=\overline{1,m})$. Норма витрат кожного, ресурсу на одиницю продукції становить $a_{ij}\,(j=\overline{1,n}; i=\overline{1,m})$. Ціна одиниці продукції j-го виду дорівнює $c_j\,(j=\overline{1,n})$. Математична модель задачі має такий вигляд:

$$\max Z = \max \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i (i=\overline{1,m});$$

$$y_i \ge 0 (i=\overline{1,m}).$$

Пряма задача полягає у визначенні такого оптимального плану виробництва продукції $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, який дає найбільший дохід.

Двоїста задача до поставленої прямої буде така:

$$F = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min;$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j (j=\overline{1,n});$$

$$y_i \ge 0 (i=\overline{1,m}).$$

Економічний зміст двоїстої задачі полягає ось у чому. Визначити таку оптимальну систему двоїстих оцінок ресурсів y_i, використовуваних для виробництва продукції, для якої загальна вартість усіх ресурсів буде найменшою. Оскільки змінні двоїстої задачі означають цінність одиниці i-го ресурсу, їх інколи ще називають ***тіньовою ціною відповідного ресурсу***.

За допомогою двоїстих оцінок можна визначити статус кожного ресурсу прямої задачі та рентабельність продукції, що виготовляється.

Ресурси, що використовуються для виробництва продукції, можна умовно поділити на ***дефіцитні*** та ***недефіцитні*** залежно від того, повне чи часткове їх використання передбачене оптимальним планом прямої задачі. Якщо двоїста оцінка y_i в оптимальному плані двоїстої задачі дорівнює нулю, то відповідний i-й ресурс використовується у виробництві продукції не повністю і є ***недефіцитним***. Якщо ж двоїста оцінка y_i>0, то i-й ресурс використовується для оптимального плану виробництва продукції повністю і називається ***дефіцитним***. У цьому разі величина двоїстої оцінки показує, на скільки збільшиться значення цільової функції Z, якщо запас відповідного ресурсу збільшити на одну умовну одиницю.

Аналіз рентабельності продукції, що виготовляється, виконується за допомогою двоїстих оцінок і обмежень двоїстої задачі. Ліва частина кожного обмеження двоїстої задачі є вартістю всіх ресурсів, які використовують для виробництва одиниці j-ї продукції. Якщо ця величина перевищує ціну одиниці продукції (c_j), виготовляти продукцію не вигідно, вона ***нерентабельна*** і в оптимальному плані прямої задачі відповідна $x_j = 0$. Якщо ж загальна оцінка всіх ресурсів дорівнює ціні одиниці продукції, то виготовляти таку продукцію доцільно, вона ***рентабельна*** і в оптимальному плані прямої задачі відповідна змінна $x_j > 0$.

Економічна інтерпретація двоїстих задач та аналіз економіко-математичних моделей на чутливість за допомогою теорії двоїстості дають змогу модифікувати оптимальний план задачі лінійного програмування відповідно до змін умов прямої задачі й дістати при цьому такі результати.

1. Зміна різних коефіцієнтів у прямій математичній моделі може вплинути на оптимальність і допустимість отриманого плану та привести до однієї з таких ситуацій:

• склад змінних та їх значення в оптимальному плані не змінюються;

• склад змінних залишається попереднім, але їх оптимальні значення змінюються;

• змінюються склад змінних та їх значення в оптимальному плані задачі.

2. Уведення додаткового обмеження в математичну модель задачі впливає на допустимість розв'язку і не може вплинути на поліпшення значення цільової функції.

3. Уведення нової змінної в математичну модель задачі впливає на оп-

тимальність попереднього плану і не погіршує значення цільової функції.

4.2. Правила побудови двоїстих задач

Кожній задачі лінійного програмування відповідає ***двоїста***, що формується за допомогою певних правил безпосередньо з умови прямої задачі.

Якщо пряма задача лінійного програмування має вигляд

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n} \ ,$$

то двоїста задача записується так:

$$F = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min$$

за обмежень

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n, \end{cases}$$

$$y_j \ge 0, \quad i = \overline{1, m} \, .$$

Порівнюючи ці дві сформульовані задачі, доходимо висновку, що ***двоїста задача лінійного програмування утворюється з прямої задачі за такими правилами.***

1. Кожному обмеженню прямої задачі відповідає змінна двоїстої задачі. Кількість невідомих двоїстої задачі дорівнює кількості обмежень прямої задачі.

2. Кожній змінній прямої задачі відповідає обмеження двоїстої задачі, причому кількість обмежень дорівнює кількості невідомих прямої задачі.

3. Якщо цільова функція прямої задачі задається на пошук найбільшого значення (max), то цільова функція двоїстої задачі — на визначення найменшого значення (min), і навпаки.

4. Коефіцієнтами при змінних в цільовій функції двоїстої задачі є вільні члени системи обмежень прямої задачі.

5. Правими частинами системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти при змінних в цільовій функції прямої задачі.

6. Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

що складається з коефіцієнтів при змінних у системі обмежень прямої задачі, і матриця коефіцієнтів в системі обмежень двоїстої задачі

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

утворюються одна з одної транспонуванням, тобто заміною рядків стовпчиками, а стовпчиків — рядками.

Двоїсті пари задач лінійного програмування бувають симетричні та несиметричні.

У симетричних задачах обмеження прямої та двоїстої задач є нерівностями, а змінні обох задач можуть набувати лише невід'ємних значень.

У несиметричних задачах обмеження прямої задачі можуть бути записані як рівняння, а двоїстої — лише як нерівності. У цьому разі відповідні змінні двоїстої задачі набувають будь-якого значення, не обмеженого знаком.

Приклад 1. Скласти задачу, яка буде двоїста такій вихідній задачі:

$$F = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 \le 6, \\ 2\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \le 8, \\ -\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \le 1, \\ \quad \boldsymbol{x}_2 \le 2, \\ \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \ge 0. \end{cases}$$

Приклад 2. Скласти задачу, яка буде двоїста такій вихідній задачі:

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 \to \max$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} 2\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \ge 1, \\ -\boldsymbol{x}_1 + 4\boldsymbol{x}_2 \le 24, \\ \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \le 3, \\ \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \ge 5, \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x}_1 \ge 0, \boldsymbol{x}_2 \ge 0.$$

4.3. Основні теореми двоїстості

Між прямою та двоїстою задачами лінійного програмування існує тісний взаємозв’язок, який випливає з наведених далі теорем.

Перша теорема двоїстості. Якщо одна з пари двоїстих задач має оптимальний план, то інша задача також має розв’язок, причому значення цільових функцій для оптимальних планів дорівнюють одне одному, тобто $\max Z = \min F$, і навпаки.

Якщо ж цільова функція однієї з пари двоїстих задач не обмежена, то друга задача взагалі не має розв’язків.

Якщо пряма задача лінійного програмування має оптимальний план X^*, визначений симплекс-методом, то оптимальний план двоїстої задачі Y^* визначається зі співвідношення

$$Y^* = \vec{c}_{\text{баз}} D^{-1},$$

де $\vec{c}_{\text{баз}}$ — вектор-рядок, що складається з коефіцієнтів цільової функції прямої задачі при змінних, які є базисними в оптимальному плані; D^{-1} — матриця, обернена до матриці *D*, складеної з базисних векторів оптимального плану, компоненти яких узято з початкового опорного плану задачі. Обернена матриця D^{-1} завжди міститься в останній симплекс-таблиці в тих стовпчиках, де в першій таблиці містилася одинична матриця.

За допомогою зазначеного співвідношення під час визначення оптимального плану однієї з пари двоїстих задач лінійного програмування знаходять розв’язок іншої задачі.

Друга теорема двоїстості. Якщо в результаті підстановки оптимального плану прямої задачі в систему обмежень цієї задачі *i*-те обмеження виконується як строга нерівність, то відповідний *i*-й компонент оптимального плану двоїстої задачі дорівнює нулю.

Якщо *i*-й компонент оптимального плану двоїстої задачі додатний, то відповідне *i*-те обмеження прямої задачі виконується для оптимального плану як рівняння.

Третя теорема двоїстості. Двоїста оцінка характеризує приріст цільової функції, який зумовлений малими змінами вільного члена відповідного обмеження.

Економічний зміст третьої теореми двоїстості полягає в тому, що відповідна додатна оцінка показує зростання значення цільової функції прямої задачі, якщо запас відповідного дефіцитного ресурсу збільшується на одну одиницю.

4.4. Аналіз звіту про результати, що отримується в надбудові «Пошук розв'язків» електронної таблиці Excel

Приклад звіту за результатами наведений на рис. 4.1. Шапка звіту містить його назву, дату та час створення, метод рішення, використані час та кількість ітерацій, інші характеристики рішення задачі. Перша зверху таблиця містить інформацію про вихідне та результуюче значення ЦФ. Наступна таблиця показує вихідні та результуючі значення КЗ. Результуюче значення ЦФ та КЗ можна також дізнатися із розрахункової таблиці.

Остання, третя таблиця показує результати оптимального рішення для обмежень. В графі «Значення комірки» наводяться значення лівих частин обмежень. В графі «Формула» показано тип обмежень. В графі «Стан» зв'язуючі обмеження характеризуються як «прив'язка», а не зв'язуючі – «без прив'язки». В графі «Допуск» наведена різниця між правою та лівою частиною кожного із обмежень. Якщо економічним сенсом обмеження буде певний ресурс, то у графі «Допуск» вказана залишкова кількість ресурсу, якщо на нього накладено обмеження типу «≤», чи кількість ресурсу на котрий була перевищена мінімально необхідна норма, якщо накладено обмеження «≥».

Ячейка целевой функции (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение
$E$6	ц.ф. ресурсу	0	770000

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное
$B$2	значення x1	0	450	Продолжить
$C$2	значення x2	0	400	Продолжить
$D$2	значення x3	0	0	Продолжить

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние	Допуск
$E$3	обм.1 ресурсу	850	$E$3<=$G$3	Привязка	0
$E$4	обм.2 ресурсу	34500	$E$4<=$G$4	Без привязки	15500
$E$5	обм.3 ресурсу	15000	$E$5<=$G$5	Привязка	0

Рис. 4.1. Звіт за результатами

По ступеню впливу на оптимальне рішення обмеження поділяються на зв'язуючі та незв'язуючі.

Зв'язуючі обмеження – обмеження малі зміни числових характеристик яких призводять до зміни екстремального значення ЦФ. Це пов'язано із тим, що зв'язуючи обмеження безпосередньо визначають оптимальне рішення.

Незв'язуючі обмеження – обмеження малі зміни числових характеристик яких не призводять до зміни екстремального значення ЦФ, тому що вони безпосередньо оптимальне рішення не визначають.

Також в літературі зустрічаються назви жорсткі та нежорсткі обмеження. В термінології звітів надбудови «Пошук рішення» Microsoft

Excel 2010 зв'язуючи обмеження називаються «з прив'язкою», а не зв'язуючи – «без прив'язки».

Незв'язуючи обмеження поділяються на ті, що визначають ОДЗ КЗ та надлишкові – обмеження виключення яких не впливає на ОДЗ КЗ.

Ресурс (запаси сировини, фонд робочого часу обладнання і т.д.), що математично представляється зв'язуючим обмеженням, називають дефіцитним, а ресурс, що представляється незв'язуючим обмеженням, –недефіцитним.

4.5. Аналіз звіту про стійкість, що отримується в надбудові «Пошук розв'язків» електронної таблиці Excel

Більш правильною назвою звіту із стійкості була б назва – звіт із чутливості. Така неточність, скоріше за все, була викликана неоднозначністю перекладу слова «sensitivity». Приклад даного звіту наведений на рис. 4.2.

В графі «Остаточне рішення» наведені значення змінних, що доставляють екстремум ЦФ. Більш правильною назвою наступної графи «Приведена вартість» є назва «нормована вартість». Нормована вартість – показник, що характеризує наскільки зміниться значення ЦФ при примусовому включенні до оптимального плану однієї одиниці змінної, що не увійшла в оптимальне рішення. Включення збиткових змінних в оптимальне рішення буде погіршувати результат, тобто у випадку максимізації ЦФ нормована вартість від'ємна, у випадку мінімізації – позитивна.

Microsoft Excel 14.0 Отчет об устойчивости

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$2	значення x1	450	0	1000	66,66666667	200
$C$2	значення x2	400	0	800	200	50
$D$2	значення x3	0	-400	200	400	1E+30

Ограничения

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Тень Цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$E$3	обм.1 ресурсу	850	200	850	150	100
$E$4	обм.2 ресурсу	34500	0	50000	1E+30	15500
$E$5	обм.3 ресурсу	15000	40	15000	2000	2250

Рис.4.2 – Звіт по стійкості

При рішенні ряду оптимізаційних задач нормована вартість деяких змінних, що не увійшли в оптимальне рішення дорівнює нулю. Така змінна не призводить до погіршення значення ЦФ, вона просто не увійшла в дане оптимальне рішення. Причому в такому випадку оптимізаційна задача має декілька оптимальних рішень. Розглянута змінна може увійти в інші рішення.

В прикладі наведеному на рис. 4.2 нормована вартість змінних x1 та x2 дорівнює 0, оскільки обидві змінні увійшли в оптимальне рішення задачі. нормована вартість змінної x3 дорівнює -400. це позначає, зо якщо вирощувати багаторічні трави на площі 1 га, це зменшить значення цільової функції на 400грошових одиниць.

Вграфі «Цільова функція. Коефіцієнт» наведені ЦК, а поряд допустиме їх збільшення чи зменшення у відповідних графах.

Допустиме збільшення та зменшення у першій таблиці звіту по стійкості показують наскільки може бути збільшений, чи зменшений ЦК, щоб оптимальне значення ЦФ залишилось незмінним, при усіх інших фіксованих числових характеристиках ОМ. Наприклад, значення ЦК c1 при x1 дорівнює 1000.

Його допустиме збільшення складає 66,67, а допустиме зменшення – 200, отже ЦК може змінюватися в межах:

$$(1000 - 200) \le c1 \le (1000 + 66,67)\ .$$

Причому, якщо c1 не виходить за вказані межі та абсолютно усі інші числові характеристики ОМ залишаться зафіксованими, то значення ЦФ не зміниться і буде складати 770000.

Якщо допустимим збільшенням є число типу 1E+30, це говорить про можливість практично безкінечного збільшення відповідного ЦК, тобто до 1×1030. Число типу 1E–16 дорівнює 1×10–16, як правило це похибка обчислень, тобто комірка практично дорівнює нулю.

Наступна таблиця звіту по стійкості містить інформацію про обмеження. В колонці остаточне значення наведені значення лівих частин обмежень.

Тіньова ціна – параметр що розраховується лише для зв’язуючих обмежень, та показує наскільки зминеться екстремальне значення ЦФ при збільшенні правої частини відповідного зв’язуючого обмеження на одиницю.

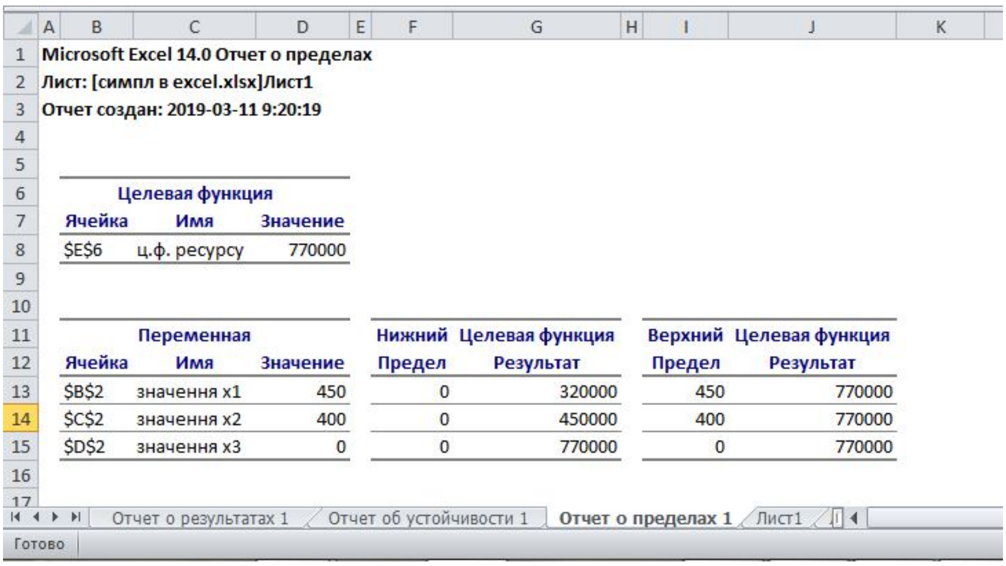
За графою тіньова ціна можна визначити, праву частину якого із зв'язуючих обмежень, при інших рівних економічних умовах, доцільно змінювати перш за все. Так у нашому випадку (рис. 4.2) ресурси рілля, та органічні добрива використовуються повністю. Найбільш дефіцитним є ресурс рілля, тому, що його тіньова ціна дорівнює 200, а тіньова ціна ресурсу добрива 40. Збільшення правої частини обмеження по використаннюріллі на одиницю, дасть приріст максимального значення ЦФ на 200 одиниці. В той же час збільшення на одиницю правої частини обмеження по використанню органічних добрив буде давати приріст ЦФ лише в 40 одиниць. Відповідно маркетинговими засобами найбільш вигідно збільшувати попит на продупосівну площу культур, тим самим збільшуючи праву частину відповідного обмеження.

Далі у другій таблиці звіту по стійкості вказується ПЧО та його допустимі збільшення і зменшення (рис.4.2). Допустиме збільшення та зменшення у другій таблиці звіту по стійкості показують наскільки може бути збільшена, чи зменшена ПЧО, щоб оптимальне значення ЦФ залишилось незмінним, при усіх інших фіксованих числових характеристиках оптимізаційної моделі.

Розрахунок меж в яких можуть змінюватись ПЧО, так що при усіх інших фіксованих числових характеристиках оптимізаційної моделі оптимальне значення ЦФ залишилось незмінним проводиться аналогічно таким розрахункам для ЦК.

4.6. Аналіз звіту про стійкість, що отримується в надбудові «Пошук розв'язків» електронної таблиці Excel

Звіт по межам (рис.4.3) містить дві таблиці, перша із яких несе інформацію про екстремальне значення ЦФ. Друга таблиця містить оптимальні значення КЗ, нижню і верхню межу КЗ та значення ЦФ при КЗ рівним своїй нижній чи верхній межі.



Microsoft Excel 14.0 Отчет о пределах
Лист: [симпл в excel.xlsx]Лист1
Отчет создан: 2019-03-11 9:20:19

Целевая функция		
Ячейка	Имя	Значение
$E$6	ц.ф. ресурсу	770000

Переменная			Нижний	Целевая функция	Верхний	Целевая функция
Ячейка	Имя	Значение	Предел	Результат	Предел	Результат
$B$2	значення x1	450	0	320000	450	770000
$C$2	значення x2	400	0	450000	400	770000
$D$2	значення x3	0	0	770000	0	770000

Рис.4.3 – Звіт по межах

Нижня (верхня) межа – це найменше (найбільше) значення, яке може приймати КЗ за умови, що обмеження ще виконуються, а значення решти змінних фіксовані на рівні оптимальних.

В графах «Цільова функція. Результат» представлено значення ЦФ, коли значення КЗ дорівнює її нижній або верхній межі.

Таким чином звіти надбудови «Пошук рішення» Microsoft Excel є достатньо інформативним засобом аналізу чутливості рішення задач ЛП. Потрібно пам’ятати, що аналіз чутливості ефективний лише при малих змінах числових характеристик оптимізаційної моделі. При суттєвих їх змінах потрібно шукати нове оптимальне рішення задачі ЛП.

4.7. Аналіз оптимальних планів лінійних економіко-математичних моделей

Розглянемо числовий приклад, що підтверджує зроблені висновки.

Приклад. Потрібно визначити оптимальне поєднання посівів трьох культур: капусти, томатів та багаторічних трав на сіно при умові, що господарство має 850га ріллі, 50тис. люд.-днів праці та 15 т. органічних добрив. Витрати цих ресурсів , а також вихід вартості валової продукції в розрахунку на 1 га культур наведено в таблиці.

показники	культури			наявність ресурсу
	капуста	томати	багаторічні трави	
витрати праці, люд.-дні	50	30	15	50000
витрати добрив, т	20	15	10	15000
вартість валової продукції, грош.од.	1000	800	200	

Математична модель задачі.

Позначимо за x1 посівну площу капусти, x2 – томатів, x3– багаторічних трав на сіно.

Цільова функція задачі – вартість валової продукції спрямована на максимум

Система обмежень:

1. По використанню ріллі, га. x1+x2+x3≤850
2. по використанню праці, люд.-год. 50*x1+30*x2+15*x3≤50000
3. по використанню добрив, т. 20*x1+15*x2+10*x3≤15000

x1, x2, x3 ≥0

Виконаємо зазначені далі дії.

1. Сформулювати математичну модель даної задачі лінійного програмування та двоїстої до неї.

2. Записати оптимальні плани прямої та двоїстої задач і зробити їх економічний аналіз.

3. Визначити статус ресурсів прямої задачі та інтервали стійкості двоїстих оцінок відносно зміни запасів дефіцитних ресурсів.

4. Визначити рентабельність кожного виду продукції, що виготовляється на підприємстві.

Розв'язування. **1.** Математичні моделі прямої та двоїстої задачі мають такий вигляд:

пряма задача	двоїста задача
$Z = 1000x_1 + 800x_2 + 200x_3 \to \max;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 850, \\ 50x_1 + 30x_2 + 15x_3 \le 50000, \\ 20x_1 + 15x_2 + 10x_3 \le 15000, \end{cases}$ $x_j \ge 0, j = \overline{1,3};$	$F = 850y_1 + 50000y_2 + 15000y_3 \to \min;$ $\begin{cases} 1y_1 + 50y_2 + 20y_3 \ge 1000, \\ 1y_1 + 30y_2 + 15y_3 \ge 800, \\ 1y_1 + 15y_2 + 10y_3 \ge 200, \end{cases}$ $y_i \ge 0, j = \overline{1,3};$
де x_j — обсяг виробництва продукції j-го виду $(j = 3);$	де y_i — оцінка одиниці i-го виду ресурсу $(i = \overline{1,3}).$

2. При переході до канонічної форми запису вводяться додаткові змінні, які мають такий економічний зміст:

X4 – залишок (резерв) ріллі,

X5– залишок (резерв) трудових ресурсів,

X6– залишок (резерв) добрив.

Перша симплексна таблиця

№	БП	$C_б$	P_o	**1000**	800	200	0	0	0	Q
				x1	x2	x3	x4	x5	x6	
1	x4	0	850	**1**	1	1	1	0	0	850
2	x5	0	50000	**50**	30	15	0	1	0	1000
3	**x6**	**0**	**15000**	**20**	**15**	**10**	**0**	**0**	**1**	**750**
m+1	Δ_j		0	**-1000**	-800	-200	0	0	0	

Остання симплексна таблиця

№	БП	$C_б$	P_o	1000	800	200	0	0	0	
				x1	x2	x3	x4	x5	x6	
1	x2	800	400	0	1	2	4	0	-0,2	
2	x5	0	15500	0	0	5	30	1	-4	
3	x1	1000	450	1	0	-1	-3	0	0,2	
m+1	Δ_j		770000	0	0	400	200	0	40	

З наведеної симплекс-таблиці маємо:

$$X^* = (400;450;0;0;15500,0), \max Z = 770000;$$

$$Y^* = (800;0;1000) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -0,2 \\ 30 & 1 & -4 \\ -3 & 0 & 0,2 \end{pmatrix} = (200;0;40);$$

$$\min F = 850 * 200 + 0 * 0 + 150000 * 40 = 770000 = \max Z.$$

Оптимальний план прямої задачі передбачає виробництво лише двох видів культур капусти та томатів на площі відповідно 400 та 450 га. Вирощування багаторічних трав економічно не вигідно. (x_3= 0). Додаткові змінні x_4, x_5, x_6 характеризують залишок (невикористану частину) ресурсів відповідно 1, 2 та 3. Оскільки x_5 = 155500, другий ресурс використовується у процесі виробництва не повністю, а перший та третій ресурси — повністю ($x_4 = x_6 = 0$). За такого оптимального плану виробництва продукції та використання ресурсів підприємство отримує найбільшу вартість валової продукції у розмірі 770000 ум. од.

План двоїстої задачі дає оптимальну систему оцінок ресурсів, що використовуються у виробництві. Так, y_1 =200 та y_3 =40 відмінні від нуля, а ресурси 1 та 2 використовуються повністю. Двоїста оцінка $y_2 = 0$ і відповідний вид ресурсу не повністю використовується при оптимальному плані виробництва продукції. Це підтверджується також попереднім аналізом додаткових змінних оптимального плану прямої задачі. Така оптимальна система оцінок дає найменшу загальну вартість усіх ресурсів, що використовуються на підприємстві: $\min F$ =770000 ум. од.

3. Статус ресурсів прямої задачі можна визначити трьома способами. Перший — підстановкою X^* у систему обмежень прямої задачі. Якщо обмеження виконується як рівняння, то відповідний ресурс дефіцитний, у противному разі — недефіцитний.

Другий спосіб — за допомогою додаткових змінних прямої задачі. Якщо додаткова змінна в оптимальному плані дорівнює нулю, то відповідний ресурс дефіцитний, а якщо відмінна від нуля — ресурс недефіцитний.

Третій спосіб — за допомогою двоїстих оцінок. Якщо $y \neq 0$, то зміна (збільшення або зменшення) обсягів i-го ресурсу приводить до відповідної зміни доходу підприємства, і тому такий ресурс є дефіцитним. Якщо $y_i = 0$, то i-й ресурс недефіцитний. Так,

$y_1 = 200$(ресурс 1 дефіцитний);

$y_2 = 0$ (ресурс 2 недефіцитний);

$y_3 = 40$ (ресурс 3 дефіцитний).

Отже, якщо запас першого дефіцитного ресурсу збільшити на одну умовну одиницю (b_1 =850 + 1 = 851), то цільова функція max Z збільшиться за інших однакових умов на y_1 =200 ум. од. і становитиме max Z = 770000+200=770200 ум. од.

За рахунок яких змін в оптимальному плані виробництва продукції збільшиться дохід підприємства? Інформацію про це дають елементи стовпчика

«x_4» останньої симплекс-таблиці, який відповідає двоїстій оцінці y_1 =200.

У новому оптимальному плані значення базисної змінної x_2^* збільшиться на 4, змінної x_5^* — збільшиться на 30, *а* x_1^* — зменшиться на 3. При цьому структура плану не зміниться, а нові оптимальні значення змінних будуть такими:

$$X^* = (450\text{-}3,\ 400+4,\ 0,\ 0,\ 15500+30,\ 0).$$

Отже, збільшення запасу першого дефіцитного ресурсу ріллі за інших однакових умов приводить до зростання площі посіву томатів та зменшення площі посіву капусти, а обсяг використання трудових ресурсів збільшується на 30 люд.-год. За такого плану виробництва максимальний дохід підприємства буде max Z = 1000 •447 + 800 • 440 + 200 • 0 = 770200, тобто зросте на y_1 =200.

Проаналізуємо, як зміниться оптимальний план виробництва продукції, якщо запас дефіцитного ресурсу 2 добрива за інших однакових умов збільшити на одну умовну одиницю (b_3 =15000 + 1 =15001). Аналогічно попереднім міркуванням, скориставшись .елементами стовпчика «x_6» останньої симплекс-таблиці, що відповідає двоїстій оцінці y_3 = 40, можна записати новий оптимальний план:

$$X^* = (450+0{,}2;\ 400\text{-}0{,}2;0{,}0,\ 15500\text{-}4;\ 0).$$

$$\max Z = 1000 \bullet 450{,}2 + 800 \bullet 399{,}8 + 200 \bullet 0 = 770040.$$

Отже, дохід підприємства збільшиться на 40 умовні одиниці за рахунок збільшення площі посіву капусти на 0,2га та зменшення площі посіву томатів на 0,2га. При цьому обсяг використання трудових ресурсів зменшиться на 4люд.год.

Після проведеного аналізу постає логічне запитання: а чи зберігатимуться встановлені пропорції, якщо запас дефіцитного ресурсу змінити не на одиницю, а наприклад, на 10 ум. од.? Щоб однозначно відповісти на поставлене запитання, необхідно розрахувати інтервали можливої зміни обсягів дефіцитних ресурсів, у межах яких двоїсті оцінки y, залишаються на рівні оптимальних значень.

Приріст (зміну) запасу ресурсу 1 позначимо Δb_1 . Тоді, якщо $b_1^{'} = b_1 + \Delta b_1$, то новий оптимальний план.

$$X^* = (450\text{-}3*\Delta b_1, 400+4*\Delta b_1, 0, 0, 15500+30*\Delta b_1, 0).$$

Єдина вимога, яку можна поставити до можливих нових оптимальних значень, — це умова невід'ємності, тобто

$$\begin{cases} 450 - 3\Delta b_1 \geq 0; \\ 400 + 4\Delta b_1 \geq 0; \\ 15500 + 30\Delta b_1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta b_1 \leq 150; \\ \Delta b_1 \geq -100; \\ \Delta b_1 \geq -516{,}67; \end{cases}$$

$$-100 \leq \Delta b_1 \leq 150.$$

Це означає, що коли запас ресурсу 1 збільшиться на 150 ум. од. або зменшиться на 100 ум. од., то оптимальною двоїстою оцінкою ресурсу 1 залишиться $y_1 = 200$. Отже, запас ресурсу 1 може змінюватись у межах

$$850 - 100 \leq b_1 \leq 850 + 150,$$

$$750 \leq b_1 \leq 1000.$$

Згідно з цим максимально можливий дохід підприємства перебуватиме в межах

$$770000 - 100 * \cdot 200 \leq Z_{\max} \leq 770000 + 150 * 200,$$

$$750000 \leq Z_{\max} \leq 80000,$$

а оптимальний план виробництва продукції

$$(450\text{-}3*(-100), 400+4*(-100), 0, 0, 15500+30*(-100), 0) \leq X^* \leq (450\text{-}3*150, 400+4*150, 0, 0, 15500+30*150, 0)$$

$$(750;0:0;\ 0;12500;\ 0) \leq \mathbf{X}^* \leq (0;\ 1000;\ 0;\ 0;2000;\ 0).$$

Аналогічно розраховується інтервал стійкості двоїстої оцінки $y_3 = 40$ дефіцитного ресурсу 3:

$$\begin{cases} 400 - 0.2\Delta b_3 \ge 0; \\ 15500 - 4\Delta b_3 \ge 0; \\ 450 + 0.2\Delta b_3 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta b_3 \le 2000; \\ \Delta b_3 \le 3875; \\ \Delta b_3 \ge -2250. \end{cases}$$

$$-2250 \le \Delta b_3 \le 2000,$$
$$612750 \le b_3 \le 17000.$$

Отже, якщо запас ресурсу 3 збільшиться на 2000 ум. од. або зменшиться на 2250 ум. од., то двоїста оцінка $y_3 = 40$ цього ресурсу залишиться оптимальною. Згідно із цим можливий дохід підприємства та оптимальний план виробництва продукції перебуватимуть у межах

$$769960 \le \max Z \le 770040;$$

$$(450\text{-}0.2*2250;400+0.2*2250;\ 0;0;15500\text{-}4*2250;\ 0) \le X^* \le (450\text{-}0.2*2000;400+0.2*2000;\ 0;0;15500\text{-}4*2000;\ 0).$$

$$(0;400+850;\ 0;0;6500;\ 0) \le X^* \le (50;800;\ 0;0;7500;\ 0).$$

Зауважимо, що визначені інтервали стосуються лише випадків, коли змінюється тільки один ресурс, а запаси всіх інших фіксовані, тобто за інших однакових умов. У разі одночасної зміни обсягів усіх або кількох ресурсів підхід до визначення нового оптимального плану дещо інший.

4. Оцінка рентабельності продукції, що виготовляється на підприємстві, виконується за допомогою двоїстих оцінок та обмежень двоїстої задачі, які характеризують кожний вид продукції.

Підставимо Y^* у систему обмежень двоїстої задачі. Якщо вартість ресурсів на одиницю продукції (ліва частина) перевищує ціну цієї продукції (права частина), то виробництво такої продукції для підприємства недоцільне. Якщо ж співвідношення виконується як рівняння, то продукція рентабельна.

Аналогічні результати можна дістати, проаналізувавши двоїсті оцінки додаткових змінних, значення яких показують, на скільки вартість ресурсів перевищує ціну одиниці відповідної продукції. Тому, якщо додаткова змінна двоїстої задачі дорівнює нулю, то продукція рентабельна. І, навпаки, якщо $y_i \neq 0$, то відповідна продукція нерентабельна.

Додаткові змінні двоїстої задачі розміщуються в оціночному рядку останньої симплекс-таблиці у стовпчиках «x_1»—«x_3». їх оптимальні значення $y_4 = 0; y_5 = 0; y_6 = 400$. Тому вирощувати капусту та томати рентабельно, а багаторічні трави на сіно — нерентабельно.

Виконаний у цій задачі аналіз лінійної моделі на чутливість дає широкий спектр динамічної інформації про визначений оптимальний план і дає змогу дослідити можливі зміни цього оптимального плану в результаті коректування умов прямої задачі.

4.8. Приклади та завдання для самостійної роботи

Наступні задачі розв'язати симплексним методом, розв'язати задачі за допомогою надбудови Поиск решений, скласти задачі, двоїсті даним, і знайти їхні розв'язки, використовуючи теореми двоїстості.

.1 $F = x_1 + x_2 \to \max$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le -2, \\ x_1 - 2x_2 \ge -13, \\ 3x_1 - x_2 \le 6, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

2. $Z = 10y_2 - 3y_3 \to \min$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 - y_3 \ge 1, \\ y_1 + 2y_2 - y_3 \ge 3, \end{cases}$$
$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0.$$

3. $F = x_1 + x_2 \to \max$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 4 \le 0, \\ 3x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 + x_2 - 4 \ge 0, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

4. Для виготовлення чотирьох видів продукції (А, Б, У, Г) використовуються три види ресурсів (I, II, III). Інші умови задачі представлені в таблиці

Ресурси	Запас ресурсів, од.	Норми витрати сировини на одиницю продукції, од.			
		А	Б	У	Г
I	3400	2	1	0,5	4
II	1200	1	5	3	0
III	3000	3	0	6	1
Прибуток від одиниці продукції, грош.. од.		7,5	3	6	12

Необхідно: 1. Визначити план випуску продукції, при якому прибуток від його реалізації буде максимальним.

2. Сформулювати економічно, записати і розв'язати двоїсту задачу. Пояснити економічний зміст отриманих об'єктивно обумовлених оцінок ресурсів.

3. Знайти інтервали стійкості двоїстих оцінок стосовно зміни запасу ресурсів кожного виду.

Визначити зміни максимального прибутку від реалізації продукції при збільшенні запасу ресурсу I на 40 од., ресурсу III – на 50 од. і зменшенні запасу ресурсу II на 30 од. Оцінити роздільний вплив цих змін і сумарний вплив.

5. Визначити норми заміни ресурсів.

6. Порівняти оцінку витрат і прибутку за оптимальним планом і кожним видом продукції.

7. За роботою надбудови Поиск решений Охарактеризувати звіти про результати, стійкість та межі.

4.9. Контрольні питання

1. У чому сутність теорії двоїстості у лінійному програмуванні?

2. Побудуйте просту економіко – математичну модель. Запишіть до неї двоїсту. Дайте економічну інтерпретацію двоїстих оцінок.

3. Які взаємо спряжені задачі називаються симетричними, а які - несиметричними? Чим вони відрізняються?

4. Скільки змінних та обмежень має двоїста задача по відношенню до прямої?

5. Сформулюйте першу теорему двоїстості та дайте її економічне тлумачення.

6. Сформулюйте другу теорему двоїстості та дайте її економічне тлумачення.

7. Сформулюйте третю теорему двоїстості та дайте її економічне тлумачення.

8. Сформулюйте правила побудови двоїстих задач.

9. Як за розв’язком прямої задачі знайти розв’язок двоїстої задачі?

10. Запишіть усі можливі види прямих і двоїстих задач.

11. Які види звітів дає робота надбудови Поиск решений

12. Що таке нормована вартість?

13. Як за роботою надбудови визначити, чи рентабельна продукція?

14. Як за роботою надбудови визначити, який ресурс є більш дефіцитним?

15. Охарактеризуйте Звіт за межами?

РОЗДІЛ 5

МЕТОДИ РОЗВЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ТА ДИНАМІЧНИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ

5.1. Постановка задачі нелінійного програмування

Розв'язуючи задачі оптимального управління (планування), доводиться враховувати нелінійний характер взаємозв'язків між економічними показниками. У загальному вигляді нелінійна економіко-математична модель має вигляд:

$$Z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max(\min)$$

за умов

$$q_i(x_1, x_2, ..., x_n) \ \{\le, =, \ge\} b_i$$

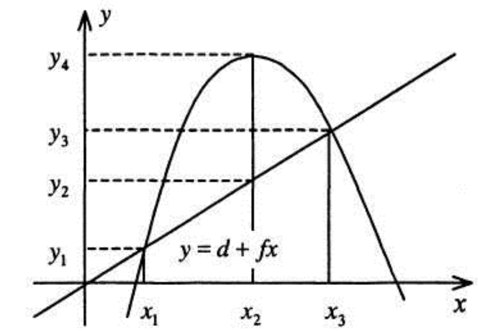
$$(i = \overline{1, m}.)$$

де $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ і $q_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ нелінійні функції.

Труднощі розв'язування задач нелінійного програмування

Задачу нелінійного програмування намагаються звести до лінійного вигляду. Проте в такому разі можливі значні похибки. Нехай, наприклад, собівартість продукції y визначено як функцію $y = a + \frac{b}{x}$, де x — обсяги виробництва. Ввівши заміну $z = \frac{1}{x}$, дістанемо лінійну залежність $y = a + bz$. За такої заміни похибки немає. А коли $y = -ax^2 + bx + c$, то заміна цієї залежності деякою лінійною функцією

$y = d + fx$ призводить до значних похибок, що ілюструє рис.



У точках x_1 і x_3 значення собівартості для обох розглядуваних функцій однакові, але в усіх інших точках ці значення відрізняються, причому в точці x_2 значною мірою:

$$y_4 - y_2 = -ax_2^2 + bx_2 + c - d - fx_2 = ax_2^2 + (b - f)x_2 + (c - d)$$

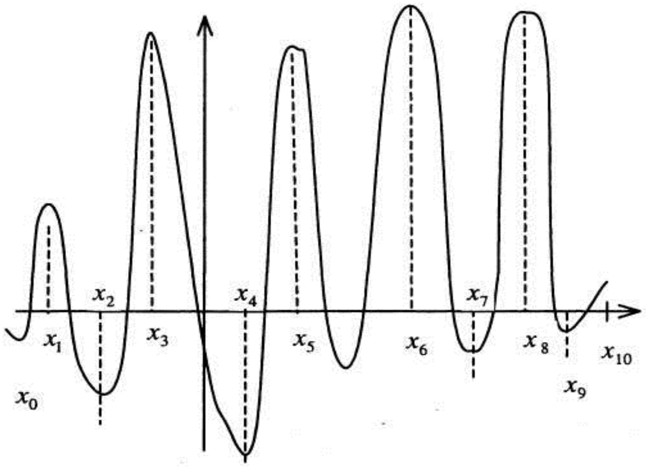
Отже, лінеаризація нелінійних процесів є досить складною математичною задачею.

Для лінійних задач можна завжди знайти оптимальний розв'язок універсальним методом — симплексним. При цьому немає проблеми з доведенням існування такого розв'язку. Адже в результаті розв'язування задачі симплексним методом завжди дістаємо один із варіантів відповіді: 1) знайдено розв'язок; 2) задача суперечлива, тобто її розв'язку не існує; 3) цільова функція необмежена, отже, розв'язку також немає.

Для задач нелінійного програмування не існує універсального методу розв'язування, тому щоразу слід доводити існування розв'язку задачі, а також його єдиність. Це досить складна математична задача.

Відомі точні методи розв'язування нелінійних задач, але при цьому постають труднощі обчислювального характеру. Навіть для сучасних ПЕОМ відповідні алгоритми є доволі трудомісткими.

Для розв'язування нелінійних задач застосовують наближені методи, стикаючись проблемою локальних і глобальних оптимумів. Наприклад, на рис. маємо на відрізку локальні оптимуми в точках $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$, а глобальний — у точці x_4 і x_6.



Більшість наближених методів дають змогу знаходити локальний оптимум. Визначивши всі локальні оптимуми, методом порівняння можна знайти глобальний. Проте для практичних розрахунків такий метод не є ефективним. Часто наближені методи не «вловлюють» глобального оптимуму, зокрема тоді, коли глобальний оптимум лежить досить близько до локального. Якщо відрізок $[x_0, x_{10}]$ розіб'ємо на десять підвідрізків і глобальний оптимум потрапить у відрізок $[x_i, x_{i+1}]$ (див. рис.), а ліворуч від x_i та праворуч від x_{i+1} крива $y = f(x)$ підніматиметься, то глобальний оптимум буде пропущеним. Звернемо увагу ще на один дуже важливий момент. У задачах лінійного програмування точка оптимуму завжди була граничною. Для нелінійних задач точка, яка є оптимальним планом, може бути граничною або такою, що міститься всередині допустимої області розв'язків (планів).

5.2. Метод множників Лагранжа

Для розв'язування задач нелінійного програмування не існує, як уже зазначалося, універсального методу, а тому доводиться застосовувати багато методів і обчислювальних алгоритмів, які ґрунтуються, здебільшого, на теорії диференціального числення, і вибір їх залежить від конкретної постановки задачі та форми економіко-математичної моделі.

Методи нелінійного програмування бувають прямі та непрямі. Прямими методами оптимальні розв'язки відшукують у напрямку найшвидшого збільшення (зменшення) цільової функції. Типовими для цієї групи методів є градієнтні. Непрямі методи полягають у зведенні задачі до такої, знаходження оптимуму якої вдається спростити. До них належать, насамперед, найбільш розроблені методи квадратичного та сепарабельного програмування.

Оптимізаційні задачі, на змінні яких не накладаються обмеження, розв'язують методами класичної математики. Оптимізацію з обмеженнями-рівностями виконують методами зведеного градієнта, скажімо методом Якові, та множників Лагранжа. У задачах оптимізації з обмеженнями-нерівностями досліджують необхідні та достатні умови існування екстремуму Куна—Таккера.

Розглянемо метод множників Лагранжа на прикладі такої задачі нелінійного програмування:

$$Z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max(\min) \tag{5.1.}$$

за умов

$$q_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i \tag{5.2.}$$

$$\left(i = \overline{1, m}\right),$$

де функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ і $q_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ диференційовані.

Ідея методу множників Лагранжа полягає в заміні даної задачі простішою: на знаходження екстремуму складнішої функції, але без обмежень. Ця функція називається функцією Лагранжа і подається у вигляді:

$$\begin{aligned} &L(x_1, x_2, ..., x_n; \lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_m) = \\ &= f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(x_1, x_2, ..., x_n)) \end{aligned} \tag{5.3.}$$

де λ_i — не визначені поки що величини, так звані множники Лагранжа.

Знайшовши частинні похідні функції L за всіма змінними і прирівнявши їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \ \left(j = \overline{1,n}\right), \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \ \left(j = \overline{1,m}\right). \end{cases}$$

запишемо систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial q_i(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j} = 0 \ \left(j = \overline{1,n}\right), \\ b_i - q_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \qquad \left(i = \overline{1,m}\right) \end{cases}, \qquad (5.4.)$$

що є, як правило, нелінійною.

Розв'язавши цю систему, знайдемо $X^* = (x_1, x_2, ..., x_n)$ і $\lambda_0 = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ - стаціонарні точки. Оскільки їх визначено з необхідної умови екстремуму, то в них можливий максимум або мінімум. Іноді стаціонарна точка є точкою перегину (сідлова точка). Отже, для визначення достатніх умов екстремуму та діагностування його типу існує спеціальний алгоритм.

Розв'яжемо методом множників Лагранжа наведену далі задачу.

Задача. Акціонерне товариство з обмеженою відповідальністю відвело 1200 га ріллі під основні рослинницькі культури — озиму пшеницю та цукрові буряки.

Техніко-економічні показники вирощування цих культур відбиває таблиця:

Показник	Площа, га, відведена	
	під озиму пшеницю,	під цукровий буряк,
Урожайність, т/га	4	35
Ціна, грн./т	800	300
Собівартість, грн./т	$y_1 = 12{,}5x_1^2 - 200x_1 + 1200$	$y_2 = 12{,}5x_2^2 - 150x_2 + 650$

Знайти оптимальну площу посіву озимої пшениці та цукрових буряків.

Нехай x_1 — площа ріллі, відведена під сотні га озимої пшениці; x_2 — площа ріллі, відведена під цукрові буряки, сотні га.

Зауважимо, що собівартість однієї тони пшениці та цукрових буряків залежить від відповідної площі посіву.

Запишемо економіко-математичну модель. За критерій оптимальності візьмемо максимізацію валового прибутку:

$$f = 4\left(800 - 12{,}5x_1^2 + 200x_1 - 1200\right)x_1 + 35\left(300 - 12{,}5x_2^2 + 150x_2 - 650\right)x_2 =$$
$$= 4\left(-12{,}5x_1^3 + 200x_1^2 - 400x_1\right) + 35\left(-12{,}5x_2^3 + 150x_2^2 - 350x_2\right)$$

за умов

$$x_1 + x_2 = 12$$

Запишемо функцію Лагранжа:

$$L\left(x_1, x_2, \lambda_1\right) = 4\left(-12{,}5x_1^3 + 200x_1^2 - 400x_1\right) +$$
$$+ 35\left(-12{,}5x_2^3 + 150x_2^2 - 350x_2\right) + \lambda_1\left(12 - x_1 - x_2\right) = 0$$

Візьмемо частинні похідні і прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 4\left(-37{,}5x_1^2 + 400x_1 - 400\right) - \lambda_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 35\left(-37{,}5x_2 + 300x_2 - 350\right) - \lambda_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 12 - x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Із цієї системи визначимо сідлову точку. З першої та другої рівностей знайдемо вирази для λ_1 і прирівняємо їх:

$$4\left(-37{,}5x_1^2 + 400x_1 - 400\right) = 35\left(-37{,}5x_2^2 + 300x_2 - 350\right),$$

або

$$-150x_1^2 + 1600x_1 - 1600 = -1312{,}5x_2^2 + 10500x_2 - 12250. \qquad (9.5.)$$

Із останнього рівняння цієї системи маємо:

$$x_1 = 12 - x_2.$$

Підставивши значення x_1 у (9.5.), дістанемо:

$$-150\left(12 - x_2\right)^2 + 1600\left(12 - x_2\right)^2 - 1600 = -1312{,}5x_2^2 + 10500x_2 - 12250,$$

або $1162x_2^2 - 8500x_2 + 11450 = 0$.

Розв'язавши це квадратне рівняння, дістаємо $x_2^{(1)} \approx 1{,}78$ (178 га); $x_2 \approx 5{,}53$

(553 га).

Відповідно дістаємо: $x_1^{(1)} \approx 10,22$ (1022 га); $x_1^2 \approx 6,47$ (647 га);

Тобто сідловими точками є такі:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 10,22 \\ x_2^{(1)} = 1,78 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^{(2)} = 6,47 \\ x_2^{(2)} = 5,53 \end{cases}$$

Обчислимо значення цільової функції у цих точках:

$$f(x_1 = 10,22; x_2 = 1,78) = 4(800 - 1305,61 + 2044 - 1200)1022 + 35(300 -$$
$$- 39,615 + 267 - 650)178 = -236247;$$

$$f(x_1 = 6,47; x_2 = 5,53) = 4(800 - 523,26 + 1294 - 1200)647 + 35(300 -$$
$$- 382,26 + 829,5 - 650)553 = 4625863$$

Отже, цільова функція набуває максимального значення, якщо озима пшениця вирощується на площі 647 га, а цукровий буряк – на площі 553 га.

5.3. Постановка задачі динамічного програмування. Принцип оптимальності.

Усі економічні процеси та явища є динамічними, оскільки функціонують і розвиваються не лише у просторі, а й у часі.

Народне господарство, його галузі, регіони чи окремі підприємства мають розробляти стратегічні і тактичні плани. Перші визначаються з допомогою динамічних моделей, розв'язки яких знаходять методами динамічного програмування. Зауважимо, що сума оптимальних планів на окремих відрізках планового періоду *T* не завжди являє собою план, оптимальний на всьому такому періоді.

Розглянемо задачу оптимального розподілу капітальних вкладень, які можуть бути використані двома способами: з метою розвитку рослинництва або тваринництва. Відомо, що за першого способу отримаємо прибуток $g(x)$, а за другого — $h(y)$.

У такому разі однокрокову задачу можна подати у вигляді:

$$Z = g(x) + h(y) \to \text{miax} \qquad (10.1.)$$

за умов

$$x + y = b, \quad x \ge 0, y \ge 0 \tag{10.2.}$$

Нехай

$$Z = Z_1, \; b = b_1, \; x = x_1, \; y = b_1 - x_1.$$

Тоді дану задачу можна записати так:

$$Z = g(x) + h(b_1 - x_1) \to \max$$

Розглянемо її як задачу оптимального використання капітальних вкладень за окремими інтервалами планового періоду Т, маючи на меті розподілити залишок капітальних вкладень на кінець j-го інтервалу (j= 1, 2, ..., *n*) двома зазначеними способами. При цьому критерій оптимізації не змінюється: максимізуємо обсяг прибутку за весь плановий період *T*.

Якщо на першому інтервалі використано b_1 капітальних вкладень, то на його кінець залишилося їх:

$$b_2 = cx_1 + d(b_1 - x_1)$$

де c, d — коефіцієнти пропорційності, що характеризують використання капітальних вкладень першим і другим способами:

$$\frac{x}{b_1 - x_1} = \frac{c}{d}$$

Задачу для другого інтервалу подамо так:

$$Z_2 = [\;]$$

за умов

$$0 \le x_2 \le b_2.$$

Звідси для будь-якого *j*-го інтервалу маємо:

$$Z_j = \lfloor g(x_j) + h(b_j - x_j) \rfloor \to \max$$

за умов

$$0 \le x_j \le b_j$$

Загальна задача набирає вигляду:

$$Z = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = \sum_{j=1}^{n} \left[g(x_j) + h(b_j - x_j) \right] \to \max \qquad (10.3.)$$

за умов $0 \le x_j \le b_j \ \left(1 = \overline{1,n}\right)$,

$$b_j = cx_{j-1} + d(b_{j-1} - x_{j-1}), \left(j = \overline{1,n}\right)$$

Таку задачу розв'язують спеціальними методами.

5.4. Методика розв’язання задач динамічного програмування

Динамічний процес розбивається на сукупність послідовних етапів, або кроків. Кожний крок оптимізується окремо, а рішення (розв'язок), згідно з яким система переходить із поточного стану до нового, вибирається з урахуванням його майбутніх наслідків і не завжди дає найбільший ефект на даному етапі. На останньому кроці приймається рішення (відшукується розв'язок), яке забезпечує максимальний ефект. З огляду на сказане, оптимізація методом динамічного програмування починається з кінця: насамперед планується останній крок. Спираючись на відому інформацію про закінчення передостаннього кроку, на підставі різних гіпотез щодо його закінчення, вибирають управління на останньому кроці. Таке управління називають ***умовно оптимальним,*** оскільки знаходять його за припущення, що попередній крок було здійснено згідно з однією з можливих гіпотез.

Нехай аналізується деякий керований процес, перебіг якого можна розбити на послідовні етапи (кроки), що задаються. Ефективність всього процесу Z є сумою ефективностей $Z_j \ \left(j = \overline{1,n}\right)$ окремих кроків:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} Z_j \ \text{(адитивний критерій)}$$

або

$$Z = \prod_{j=1}^{n} Z_j \ \text{(мультиплікативний критерій)}$$

З кожним кроком задачі пов'язане прийняття певного рішення, так званого *крокового управління* $X_j = \left(j = \overline{1,n}\right)$, що визначає як ефективність даного етапу, так і всієї операції в цілому.

У задачі динамічного програмування знаходять таке управління $X = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ всією операцією, яке максимізує загальну її ефективність:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} Z_j \to \max$$

Оптимальним розв'язком цієї задачі є управління *X**, що складається із сукупності оптимальних покрокових управлінь

$$X^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$$

і забезпечує максимальну ефективність Z*

$$Z^* = \max_{x \in X}\left\{Z(x)\right\}$$

Усі класи задач динамічного програмування розв'язують, керуючись основнім принципом: яким би не був стан системи *S* перед черговим кроком, управління на цьому кроці слід вибрати так, щоб ефективність розглядуваного кроку плюс оптимальна ефективність на всіх наступних кроках була максимальною.

Отже, маємо алгоритм розв'язування задач динамічного програмування.

1. Специфікуємо стан заданої керованої системи та множину параметрів, що описують цей стан. Стан системи обираємо, маючи на меті забезпечити зв'язок між послідовними етапами перебігу процесу і знайти допустимий розв'язок задачі в цілому як результат оптимізації на кожному кроці окремо. При цьому оптимальні рішення на наступних етапах приймаємо, нехтуючи впливом подальших рішень на прийняті раніше.

2. Розбиваємо динамічний процес (операцію) на кроки, що відповідають, як правило, часовим періодам планування або окремим об'єктам (підприємствам, видам продукції, устаткування і т. ін.), стосовно яких роз-

робляються управлінські рішення.

3. Подаємо перелік управлінських рішень $x_j = (\overline{1,n})$ для кожного кроку і відповідні обмеження щодо них.

4. Визначаємо ефект, що його забезпечує управлінське рішення x_j на j-му кроці, якщо перед тим система була у стані S, як функцію ефективності:

$$Z = [g(x) + h(b_1 - x_1)] \to \max .$$

5. Досліджуємо, як змінюється стан 5 системи під впливом управлінського x_j на j-му кроці, переходячи до нового стану:

$$S' = \varphi_j(s, x_j).$$

6. Будуємо для розглядуваної задачі рекурентну залежність, що визначає умовний оптимальний ефект $Z_j(s)$ починаючи з j-го кроку і до останнього, через вже відому функцію $Z_{j+1}(s')$:

$$Z_j(s) = \max_{X_j}\{f(s, x_j) + Z_{i+1}(s, x_j)\}.$$

Цьому ефекту відповідає умовне оптимальне управління на j-му кроці $(x_j(s))$. Зауважимо, що за аргумент функції $Z_{j+1}(s)$беремо не *s,* а змінений стан системи, тобто $s' = \varphi_j(s, x_j)$.

7. Здійснюємо умовну оптимізацію останнього *n*-го кроку, розглядаючи множину станів *s,* що на один крок віддалені від кінцевого стану, і визначаємо умовний оптимальний ефект на «n-му» кроці:

$$Z_n(s) = \max_{X_n}\{f_n(s, x_n)\}.$$

Далі знаходимо умовне оптимальне управлінське рішення $x_n(s)$*,* завдяки якому цей максимум досягається.

8. Виконуємо умовну оптимізацію $(n-1)$-го, $(n-2)$-го і т. д., тобто всіх попередніх кроків за рекурентними залежностями п. 6,і для кожного кроку знаходимо умовне оптимальне управління:

$$Z^* = Z_1(s_0)$$

9. Здійснюємо безумовну оптимізацію управління у «зворотному» напрямі — від початкового стану s_0 до кінцевого. Для цього з урахуванням визначеного оптимального управління на першому кроці $x_1^* = x_1(s)$ змінюємо стан системи згідно з п. 5. Далі для цього нового стану знаходимо оптимальне управління на другому кроці x_2^* і діємо так до останнього кроку.

5.5. Приклади та завдання для самостійної роботи

Задача 5.1. Попит на продукцію, що виготовляється на двох видах обладнання, становить 120 одиниць. Собівартість, тис. грн., виробництва одиниці продукції на обладнанні кожної групи залежить від обсягу такого виробництва — відповідно x_1 і x_2 — та подається у вигляді для першої групи: $3x_1 + 4x_1^2$; для другої групи: $5x_2^2$.

Знайти оптимальний план виробництва продукції на кожній групі обладнання, який за умови задоволення попиту потребує найменших витрат, пов'язаних із собівартістю продукції.

Задача 5.2. За методом Лагранжа знайти точку умовного екстремуму.

1. $Z = 2x_1^2 + x_2^2,$
$2x_1 + 3x_2 = 5$

2. $Z = x_1^2 - x_2^2,$
$3x_1 + 4x_2 = 12$

3. $Z = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2,$
$2x_1 - x_2 = 5$

4. $Z = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2,$
$x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$

5. $Z = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 5x_2,$
$x_1 + 3x_2 = 6$

6. $Z = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_2,$
$x_1 + 5x_2 = 12$

Задача 5.3. На виробництво трьох видів продукції A, B і C витрачають матеріальні, трудові та фінансові ресурси. Норми витрат на одиницю продукції, сумарний запас, а також розмір прибутку від реалізації одиниці продукції, що залежить від обсягу виробництва (в умовних одиницях), відбиває таблиця:

Ресурси	Продукція			Запас ресурсів
	A	B	c	
Матеріальні	4	5	7	100
Трудові	3	6	8	120
Фінансові	2	1	4	75
Прибуток	$4x_1^2$	$x_2^2+2x_2$	$3x_3^2+6$	
Обсяг виробництва	X_1	X_2	X_3	

Попит на продукцію видів *В* і С відомий і становить 12 і 8 од. Визначити оптимальний план виробництва продукції кожного виду, якщо ресурси потрібно використати повністю. Знайти оцінки ресурсів і подати економічний аналіз оптимального плану.

Задача 5.4. Фірма планує нарощувати виробничі потужності на трьох підприємствах, виділяючи для цього 18 млн. грн. За кожним із підприємств розроблено інвестиційний проект із зазначенням прогнозованих сумарних витрат С та доходів Д що пов'язані з його реалізацією. Розробити план інвестування.

Інвестиційний проект	Підприємство					
	1		2		3	
	Інвестиції, млн. грн.	Прибуток, млн. грн.	Інвестиції, млн. грн.	Прибуток, млн. грн.	Інвестиції, млн. грн.	Прибуток, млн. грн.
1	0	0	0	0	0	0
2	2	6	6	12	7	9
3	4	8	7	14	8	10
4	5	11	9	18	10	14

Задача 5.6. Знайти оптимальний розподіл 6 млрд. грн. між трьома підприємствами галузі. Прибуток, який можна одержати від капіталовкладень певного розміру в кожне з підприємств, відбиває таблиця:

Розмір капіталовкладень, млн. грн.	Прибуток по підприємствах, млн. грн.		
	I	II	III
1	0,27	0,34	0,21
2	0,31	0,44	0,35
3	0,42	0,57	0,46
4	0,65	0,69	0,68
5	0,74	0,87	0,74
6	0,93	0,95	0,85

Задача 5.7. Розв'язати чотириетапну задачу управління запасами за вихідними даними:

Етап	Попит, од.	Витрати на розміщення замовлення, грн.
1	70	100
2	58	115
3	64	98
4	85	86

Відомо, що витрати на зберігання одиниці продукції протягом одного етапу сталі і становлять 2 грн., витрати на придбання одиниці продукції – 3 грн. для всіх етапів. Вихідний запас на початок досліджуваного періоду - 10 од.

Задача 5.8. Розв'язати п'ятиетапну детерміновану задачу управління запасами:

Етап	Попит, од.	Витрати на розміщення замовлення, грн.	Витрати на зберігання, грн.
1	40	40	1
2	70	20	2
3	90	45	2
4	80	37	1
5	115	48	1

Функція витрат на розміщення замовлення визначає питомі витрати: 20 грн. для перших 50 од. та 10 грн. за кожну додаткову одиницю (знижка на кількість).

5.6. Контрорльні питання

1. Запишіть загальну задачу нелінійного програмування
2. В чому полягають труднощі розв’язання задач нелінійного програмування?
3. Функція Лагранжа
4. Метод Лагранжа
5. Яка функція називається опуклою?
6. Сформулюйте необхідні і достатні умови існування сідлової точки для деякої диференційованої функції
7. Сформулюйте здачу динамічного програмування.
8. Методи знаходження розв’язку задачі динамічного програмування.
9. Наведіть приклади реальних задач динамічного програмування.

РОЗДІЛ 6

МЕТОДИ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

6.1. Постановка задачі багатокритеріальної оптимізації

Задачі багатокритеріальної оптимізації зустрічаються в економіці повсюдно. Наведемо лише кілька прикладів:

- вибір транспортного маршруту (критерії - час, вартість),

- розподіл робіт комплексного проекту між окремими виконавцями (критерії - час, вартість та якість виконання проекту),

- планування діяльності фірми (критерії - прибуток та частка сегменту ринку, охопленого послугами або продукцією фірми),

- прийняття рішень щодо інвестування (в умовах ризику основними критеріями виступають очікуваний дохід та дисперсія доходу),

- розробка заходів з ліквідації наслідків надзвичайної ситуації (комплекси критеріїв соціального, екологічного, економічного та фінансового змісту),

- вибір об'єктів капіталовкладень (комплекс критеріїв, які характеризують стан та перспективи розвитку регіону та галузі, рівень виробничих потужностей підприємства, стан основних засобів виробництва, кадровий потенціал, організаційно-управлінський рівень, фінансову стійкість об'єкту інвестування).

У загальному вигляді багатокритеріальну задачу розглядають як задачу одночасної оптимізації декількох цільових функцій на заданій множині допустимих планів.

$$\left.\begin{array}{c} y_k = f_k(x) \to opt, \quad k = \overline{1,p}, \\ x \in X, \end{array}\right\}$$

де p — кількість цільових функцій, що підлягають оптимізації,

f_k - окрема k-та функція з критеріального набору $\left(k=\overline{1,p}\right)$;

X - множина допустимих планів, окремий елемент якої позначено через x.

6.2. Методи розв'язання багатокритеріальних задач

Оскільки не існує єдиного універсального критерію економічної ефективності, то досить часто вдаються до розгляду багатофакторної оптимізації. Хоча задача математичного програмування передбачає одну цільову функцію, розроблено математичні методи, що дають змогу будувати компромісні плани, тобто здійснювати багатокритеріальну оптимізацію.

Найчастіше способи використання багатьох критеріїв у задачах математичного програмування зводяться до штучного об'єднання кількох вибраних показників в один. Наведемо кілька таких способів.

Нехай у задачі обрано m критеріїв оптимальності F_i (i=1,m). Загальний критерій може мати вигляд суми окремих показників ефективності з відповідними коефіцієнтами:

$$F^* = k_1 F_1 + k_2 F_2 + \ldots k_m F_m \qquad (6.1)$$

де $k_1, \ldots k_m$ —додатні чи від'ємні коефіцієнти. Додатні коефіцієнти відповідають тим критеріям, які потрібно максимізувати, а від'ємні — тим, які мінімізуються. Абсолютні значення коефіцієнтів $k_1, \ldots k_m$ відповідають пріоритету (важливості) того чи іншого показника.

Наприклад, якщо розв'язується виробнича задача, то з додатними коефіцієнтами ввійдуть такі величини, як обсяг прибутку, отриманого від реалізації товарів та послуг, з від'ємними - витрати ресурсів (часу, праці), собівартість одиниці продукції.

Узагальнений критерій може подаватись у вигляді дробу, де в чисельнику знаходиться добуток показників, які необхідно максимізувати, припустимо $F_1,...F_n$ а в знаменнику - добуток тих, які потрібно мінімізувати $F_{n+1},...F_m$:

$$F^* = \frac{\prod_{i=1}^{n} F_i}{\prod_{i=n+1}^{m} F_i}, \qquad (6.2)$$

Загальним недоліком критеріїв (1), (2) є те, що існує можливість недостатню ефективність одного критерію компенсувати іншим. Наприклад, зниження значення виконання попередніх замовлень (в (2) буде в чисельнику) може компенсуватися зменшенням використання ресурсів (знаменник дробу (2)). Оскільки окремі величини в чисельнику та знаменнику пропорційно зменшилися, то значення дробу не змінюється, проте складені на основі таких розрахунків плани можуть призвести до негативних наслідків.

Отже, до використання зазначених способів формування цільових функцій необхідно підходити зважено та продумано.

Ще один метод запропонував І. Никовський. Оптимальний план знаходять окремо за кожним з вибраних критеріїв, після чого отримують множину значень цільової функції $F_i^*\left(i=\overline{1,m}\right)$.

На останньому етапі розв'язується початкова задача з одним критерієм виду:

$$\min F = \left|\frac{F_1^* - \overline{F_1}}{F_1^*}\right| + \left|\frac{F_2^* - \overline{F_2}}{F_2^*}\right| + \ldots + \left|\frac{F_m^* - \overline{F_m}}{F_m^*}\right|, \qquad (6.3)$$

де $\overline{F_i}\left(i=\overline{1,m}\right)$ - значення *i-го* критерію оптимальності в оптимальному компромісному плані. За такого підходу розв'язок задачі визначається за критерієм, що дорівнює мінімальному значенню модулів часток відхилень значень кожної цільової функції у компромісному плані від їх оптимальних значень у їх же оптимальних значеннях, що робить всі критерії однаково важливими. Для врахування переваг одних критеріїв над іншими доцільно застосовувати узагальнений критерій такого виду:

$$\min F = k_1\left|\frac{F_1^* - \overline{F_1}}{F_1^*}\right| + k_2\left|\frac{F_2^* - \overline{F_2}}{F_2^*}\right| + ... + k_m\left|\frac{F_m^* - \overline{F_m}}{F_m^*}\right|, \qquad (6.4)$$

Недоліками цих двох способів є, по-перше, жорстке співвідношення між значеннями відхилень критеріїв оптимальності, що значно звужує множину допустимих планів; по-друге, одному Значенню деякого критерію може відповідати множина інших, причому таких, за яких оптимальний план з економічного погляду ефективніший; по-третє, відсутня методика об'єктивного визначення коефіцієнтів $k_1,...,k_m$.

Зведення багатокритеріальної задачі до задачі з одним критерієм може також здійснюватися через виділення з вибраного набору показників одного, який вважають найважливішим - F_k і намагаються досягти його максимального значення (якщо необхідно знайти мінімум, то досить змінити знак показника). Всі інші показники (критерії) є другорядними, і на них накладаються обмеження виду: $F_i \geq z_i$, де z_i є нижньою межею значення відповідного показника, або $F_i \leq z_i$, якщо необхідно, щоб значення показника не перевищувало z_i. Для виробничих задач можна виділити як найважливіший показник ефективності прибуток і, максимізуючи його величину, додатково вводити обмеження щодо рентабельності виробництва не нижче або собівартості не вище певного рівня. Такі обмеження входять до системи початкових умов задачі.

Розглянемо так званий «метод послідовних поступок». Всі обрані критерії необхідно ранжирувати за спаданням їх важливості: спочатку головний, скажімо F_1, потім менш важливий F_2 і т. д. Вважатимемо, що необхідно досягти максимального значення за всіма критеріями (якщо необхідно знайти мінімум, то змінюють знак показника). Спочатку розв'язується задача з одним головним критерієм (знаходиться значення $\max F_1$), потім призначають деяку невелику за абсолютним значенням «поступку» ΔF_1, на яку можна змінити (зменшити) значення критерію $\max F_1$ задля того, щоб досягти максимального (більшого) значення за наступним критерієм F_2. Величина «поступки» залежить від потрібної точності розрахунків та достовірності початкових даних. Потім до системи початкових обмежень задачі приєднують обмеження, що встановлює рівень можливого відхилення показника: $F_1 \le (\max F_1 - \Delta F_1)$, і розв'язують нову задачу з критерієм оптимальності F_2 і т.д. Процес розв'язання задачі у такий спосіб показує, ціною яких «поступок» досягається результат.

Очевидно, що багатокритеріальні задачі математичного програмування не мають універсального способу розв'язування. Отже, вибір та конкретне застосування будь-якого з наведених етапів залишається за суб'єктом прийняття рішення.

6.3. Функція цінностей альтернатив

Допустимі плани порівнюються співставленням їх оцінок, причому оцінка довільного допустимого плану багатокритеріальної задачі є векторною: $y = (y_1,...,y_p)$. Нагадаємо правила порівняння векторів.

Нехай $a = (a_1,...,a_m) \in R^m$. Цей вектор називають:

1) нульовим $(a = 0)$, якщо $a_i = 0$ для усіх $i = 1,...,m$;

2) ненульовим $(a \ne 0)$, якщо $a_i \ne 0$ для деякого $i \in \{1,...,m\}$;

3) невід'ємним $(a \ge 0)$, якщо $a_i \ge 0$ для усіх $i = 1,...,m$;

4) напівдодатним $(a \ge 0)$, якщо $a \ge 0$ і $a \ne 0$;

5) додатним ($a > 0$), якщо $a_i < 0$ для усіх $i = 1,...,m$.

За аналогією з (3)-(5) визначаються недодатний $(a \le 0)$, напіввід'ємний $(a \le 0)$ і від'ємний ($a < 0$) вектори.

Якщо деякий ненульовий вектор *а* не можна порівняти з нульовим згідно вищенаведених визначень, то так і будемо говорити, що він непорівнянний із нульовим, і записувати: *а*#0. Наприклад, (-6;3)#(0;0).

Якщо $a, b \in R^m \ (m \geq 2)$, то покладають $a = b, a \neq b, a \geq b, a \geq b, a > b, a \leq b, a \leq b, a < b$ *або* $a \equiv b$ в залежності від результатів порівняння різниці (*а* - *б*) з нульовим вектором.

Повернемося тепер до порівняння допустимих планів багатокритеріальної задачі. Для скорочення викладу означень вважатимемо, що кожна з цільових функцій задачі підлягає максимізації. Нехай маємо два допустимих плани x^1 і x^2, векторні оцінки яких , відповідно, y^1 і y^2. Будемо говорити, що:

1) x^1 рівноцінний до x^2 , якщо $y^1 = y^2$;

2) x^2 нерівноцінний до x^2 , якщо $y^1 \neq y^2$;

3) x^1 переважніший, аніж x^2, якщо $y^1 \geq y^2$;

4) x^1 строго переважніший, аніж x^2, якщо $y^1 \geq y^2$;

5) x^1 непорівнянний із x^2, якщо $y^1 \# y^2$.

Зверніть увагу, що правила (1) - (5) порівняння допустимих плаанів є об'єктивними, виходять із постановки багатокритеріальної задачі, не залежать від особливостей системи переважань ОПР.

Допустимий план $\bar{x}$ багатокритеріальної задачі називається:

- неефективним, якщо існує принаймні один такий допустимий план, який був би строго переважнішим від плана $\bar{x}$;

- ефективним, якщо не існує жодного допустимого плану, строго переважнішого від заданого;

- абсолютно-оптимальним, якщо він переважніший (хоча б у нестрогому розумінні) довільного допустимого плану.

Кожна з багато критеріальних задач має свої особливості. Проте всі такі задачі володіють певними спільними властивостями. Окреслимо найважливіші з них.

1). Кожний з допустимих планів задачі є або неефективним (таким, який можна покращити іншим допустимим планом), або ефективним;

2). Множина ефективних планів непорожня;

3). Довільний неефективний план завжди можна покращити хоча б одним з ефективних планів. Тому неефективні плани не можна обирати за розв'язок багатокритеріальної задачі. Вибір розв'язку належить здійснювати лише з множини ефективних планів;

4). Інколи існують плани, які забезпечують одночасне досягнення кожною з цільових функцій свого найкращого значення на множині X (саме вони називаються абсолютно-оптимальними). У таких випадках кожний з абсолютно-оптимальних планів є ефективним, і навпаки - кожний з ефективних планів є абсолютно-оптимальним. Усі абсолютно-оптимальні плани мають однакові оцінки. Довільний з таких планів є розв'язком багатокритеріальної задачі;

5). Коли множина абсолютно-оптимальних планів порожня, то тоді (і тільки тоді) існують непорівняльні між собою ефективні плани. Який би ефективний план ми не обрали, завжди існує інший, непорівняльний з обраним ефективний план. Це означає існування проблеми вибору розв'язку багатокритеріальної задачі. Причому інформації про правило вибору, яке б вирішувало проблему вибору, в межах постановки задачі немає.

6). Джерелом додаткової інформації про правило вибору виступає ОПР. Ефективний план, який буде обрано за розв'язок багатокритеріальної задачі, має бути найпереважнішим серед інших згідно системи переважань ОПР.

7). Адекватно відтворити систему переважань ОПР можна не завжди. До того ж, часто ця система уточнюється або навіть лише формується в процесі розв'язування конкретної задачі. Тому процес пошуку розв'язку багатокритеріальної задачі здійснюється у вигляді діалогу з ОПР, причому ОПР перетворюється на активного учасника цього процесу. ОПР несе повну відповідальність за обране рішення та за його наслідки.

Виявляється, що дослідження багатокритеріальної задачі та опрацювання методики багатокритеріальної оптимізації зручно проводити, якщо поряд з вихідною багатокритеріальною задачею розглядати таку допоміжну однокритеріальну задачу:

$$\left.\begin{array}{c} u = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k f_k(x) \to \max, \\ f_k(x)\{\geq|\leq\}\xi_k,\ k = \overline{1,p}, \\ x \in X. \end{array}\right\}$$

де α_k, ξ_k - деякі дійсні числа, причому знаки перших з них, а також знаки нерівностей у критеріальних обмеженнях узгоджуються з оптимізаційною спрямованістю (до максимуму або, напроти, до мінімуму) відповідних цільових функцій.

6.4. Узагальнена методика багатокритеріальної оптимізації

Узагальнена методика багатокритеріальної оптимізації складається з декількох етапів. Наведемо послідовний опис кожного з них.

Етап 1. Відсів неефективних планів та визначення (або наближене оцінювання) меж варіації кожної з цільових функцій на множині ефективних планів.

Якщо для кожної з цільових функцій її найкраще значення на множині ефективних планів y_k^* збігатиметься з її найгіршим значенням на цій множині $y_k^0 \left(y_k^* = y_k^0 \ \text{для всіх} \ k = \overline{1,p} \right)$, то робимо висновок, що всі ефективні плани рівноцінні. Довільний з них може бути обраним за розв'язок задачі.

У типовому випадку, який і вимагає подальшого опрацювання, принаймні для двох цільових функцій виконуватиметься нерівність $y_k^* \neq y_k^0$. Залишимо у складі критеріальних лише ці функції. Усі інші цільові функції, які мають нульову варіацію на множині ефективних планів, можна відкинути, якщо відкинути разом з ними і ті допустимі плани, які не відповідають найкращому рівню цих цільових функцій (відкидання забезпечується введенням додаткових обмежень типу $f_k(x)=y_k^*$; далі вважатимемо, що ці обмеження вже присутні в описі множини X).

Результат: межі варіації $[y_k^*; y_k^0]$ за кожною з цільових функцій ($k=\overline{1,p}$), де зірочкою позначено найкраще, а нуликом - найгірше значення k-ї цільової функції на множині ефективних планів.

Етап 2. Побудова узагальненої адитивної функції цінності:

$$u=\sum_{k=1}^{p}\alpha_k f_k(x),$$

де вагові коефіцієнти обчислюються або без участі ОПР за формулами

$$\alpha_k=\frac{1}{y_k^*-y_k^0},\ k=\overline{1,p},$$

або, якщо є можливість спілкування з ОПР на цьому етапі, за результатами наступного діалогу:

1). ОПР отримує p профілів типу $\begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^0 \\ \vdots \\ y_p^0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^* \\ \vdots \\ y_p^0 \end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \vdots \\ y_p^* \end{pmatrix}$ та повинна визначити серед них найкращий.

Припустимо, що найкращим є перший профіль: $\begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^0 \\ \vdots \\ y_p^0 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \vdots \\ y_k^* \\ \vdots \\ y_p^0 \end{pmatrix}$

для всіх $k=\overline{2,p}$ (знак відповідає відношенню «не гірше» за системою переважань ОПР).

1). Для кожного з профілів $\begin{pmatrix} y_1^0 \\ \vdots \\ y_k^* \\ \vdots \\ y_p^0 \end{pmatrix}$, $k = \overline{2, p}$, ОПР повинна вказати таке

значення y_1^k першої цільової функції, за якого профілі

$\begin{pmatrix} y_1^k \\ y_2^0 \\ \vdots \\ y_p^0 \end{pmatrix}$ та $\begin{pmatrix} y_1^0 \\ \vdots \\ y_k^* \\ \vdots \\ y_p^0 \end{pmatrix}$ вона вважає рівноцінними. (Очевидно, що

$y_1^k \in [y_1^0; y_1^*]$ для всіх $k = \overline{2, p}$.)

2). На основі відповідей ОПР про значення y_1^k, $k = \overline{2, p}$, складемо систему співвідношень для вагових коефіцієнтів α_k, $k = \overline{1, p}$:

$$\alpha_k = \frac{y_1^k - y_1^0}{y_k^* - y_k^0}\alpha_1, \ k = \overline{2, p}.$$

Покладаємо $\alpha_k = \dfrac{1}{y_k^* - y_1^0}$, після чого остаточно отримуємо:

$$\alpha_k = \frac{y_1^k - y_1^0}{y_1^* - y_1^0} \times \frac{1}{y_k^* - y_k^0}, \ k = \overline{1, p}.$$

Примітка. Якщо вагові коефіцієнти були обчислені без діалогу з ОПР, то це відповідає припущенню, що всі профілі, якби вони порівнювалися, виявилися б рівноцінними, тобто що $y_1^k = y_1^*$ для всіх $k = \overline{2, p}$. До того ж, конкретні значення вагових коефіцієнтів мало впливають на остаточний результат, тому на цьому етапі діалог з ОПР хоч і бажаний, але не обов'язковий.

<u>Результат:</u> узагальнена адитивна функція цінності:

$$u = \sum_{k=1}^{p} \frac{y_1^k - y_1^0}{y_1^* - y_1^0} \times \frac{f_k(x)}{y_k^* - y_k^0} \to \max.$$

<u>Етап 3.</u> розшукується такий допустимий план x^1, який відповідає максимуму

узагальненої адитивної функції цінності:

$$\left.\begin{array}{c} u=\sum_{k=1}^{p}\dfrac{y_1^k-y_1^0}{y_1^*-y_1^0}\times\dfrac{f_k(x)}{y_k^*-y_k^0}\to\max, \\ x\in X. \end{array}\right\}$$

Цей план є ефективним. Його оцінка $y^1=f(x^1)$ разом з межами варіації критеріальних показників передається ОПР.

Результат: Оцінка плану x^1 в межах варіації кожної з цільових функцій на множині ефективних планів.

Етап 4. ОПР або погоджується обрати план x^1 за розв'язок багатокритеріальної задачі, або повинна по кожній з цільових функцій вказати такі припустимі рівні , які вона вважає задовільними.

Примітка. Потрібно попередити ОПР про необхідність дотримуватись вимоги $\xi_k \neq y_k^*$ для всіх $k=\overline{1,p}$. Якщо ОПР деякі з критеріїв $k=\overline{1,p}$ залишає поза увагою, то для них покладають $\xi_k \neq y_k^0$.

Результат, коли необхідно продовжити процес пошуку розв'язку: набір припустимих рівнів $\xi_k \in [y_k^0; y_k^*]$, $k=\overline{1,p}$.

Етап 5. Визначається реальність визначених на етапі 4 припустимих рівнів критеріальних показників та здійснюється їх корекція або в бік покращання, якщо вони є реальними, або в біг послаблення, щоб зробити реальними. Для цього розв'язують таку однокритеріальну задачу:

$$\left.\begin{array}{c} t\to\max, \\ \dfrac{f_k(x)-\xi_k}{y_k^*-\xi_k}\geq t, \quad k=\overline{1,p}, \\ x\in X. \end{array}\right\}$$

Примітка. Для цільових функцій, спрямованих до максимуму, виконується нерівність $y_k^*>\xi_k$, тому критеріальне обмеження набирає вигляду: $y_k^*\geq \xi_k+t(y_k^*-\xi_k)$. Для спрямованих до мінімуму цільових функцій критеріальне обмеження є дещо іншим:

$$f_k(x) \le \xi_k - t(\xi_k - y_k^*).$$

Через відсутність абсолютно-оптимальних планів оптимальне значення t^* параметра t менше 1 . Водночас помічаємо, що $f_k(x) \to y_k^*$ для всіх $k \in \overline{1,p}$ *при* $t^* \to 1$. Випадок $t^* \ge 0$ свідчить про реальність припустимих рівнів, а випадок $t^* < 0$ - про їх нереальність. Реальні припустимі рівні ξ_k^* визначаються шляхом порівняння величин $\xi_k + t^*\left(y_k^* - \xi_k\right)$ *та* y_k^0 і вибору з кожної такої пари найкращої.

<u>Результат:</u> висновок про реальність або нереальність первісних припустимих рівнів (значення t^*) та реальні припустимі рівні $\xi_k \in \left[y_k^0; y_k^*\right]$, $k = \overline{1,p}$.

<u>Етап 6.</u> Розшукується такий ефективний план x^2, який відповідає реальним припустимим рівням усіх критеріальних показників. Він є розв'язком однокритеріальної задачі:

$$\left.\begin{array}{c} u = \sum\limits_{k=1}^{p} \dfrac{y_1^k - y_1^0}{y_1^* - y_1^0} \cdot \dfrac{f_k(x)}{y_k^* - y_k^0} \to \max, \\ \dfrac{f_k(x) - \xi_k}{y_k^* - \xi_k} \ge t^*, \ k = \overline{1,p}, \\ x \in X. \end{array}\right\}$$

<u>Результат:</u> висновок про реальність або нереальність первісних припустимих рівнів (значення t^*), реальні припустимі рівні $\xi_k \in \left[y_k^0; y_k^*\right]$, $k = \overline{1,p}$, а також оцінка $y^2 = f\left(x^2\right)$ з рекомендацією про затвердження плану x^2 як розв'язок багатокритеріальної задачі. Вся ця інформація надсилається ОПР.

<u>Етап 7.</u> Якщо ОПР не погоджується з рекомендацією обрати ефективний план x^2 за розв'язок багатокритеріальної задачі, то вона повинна здійснити корекцію первісних припустимих рівнів цільових функцій ξ_k. Для забезпечення збіжності методу нові рівні ξ_k^1, $k = \overline{1,p}$, повинні бути слабкішими від попередніх.

<u>Результат:</u> або робимо висновок про завершення процесу, або поверта-

ємося до етапу 5, маючи на увазі нові значення припустимих рівнів цільових функцій $\xi_k \in \left[y_k^0; \xi_k\right]$, $k = \overline{1, p}$.

Для прикладу розглянемо задачу визначення транспортного маршруту за критеріями часу та вартості (з оптимізаційною спрямованістю кожного з критеріальних показників до мінімуму). Інформація про 8 альтернативних маршрутів подана у табл. 6.1.

Таблиця 6.1.

Вихідні показники транспортних маршрутів

Маршрут, №	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Час, хвилин	30	40	45	50	55	60	70	80
Вартість, копійок	200	150	120	90	80	60	50	30

Етапи 1-2. Всі маршрути ефективні. Подальші розрахунки етапів 1-2 показано в табл. 6.2.

Таблиця 6.2.

Характеристика множини ефективних маршрутів та вагові коефіцієнти функції цінності

Номер k	**Цільова функція**	**Значення цільової функції на множині ефективних маршрутів**		**Вагові коефіцієнти**
		Найкраще	*Найгірше*	
1.	Час. хв. (до мінімуму)	30^*	80^0	$\alpha_1 = \frac{1}{30-80} = -\frac{1}{50}\left(1/_{хв.}\right)$
2.	Вартість, коп. (до мінімуму)	30^*	200^0	$\alpha_2 = \frac{1}{30-200} = -\frac{1}{170}\left(1/_{коп.}\right)$

Етап 3. Вводимо функцію цінності:

$$u = \frac{Час,\,хв.(x)}{50} + \frac{Вартість,\,коп.(x)}{170} \to \min .$$

Обчислення цінності кожного з маршрутів показано в табл. 6.3.

Таблиця 6.3.

Розрахункові показники транспортних маршрутів

Маршрут, №	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Час / 50	0,6	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,4	1,6
Вартість / 170	1,176	0,882	0,706	0,529	0,471	0,353	0,294	0,176
Всього	**1,776**	**1,682**	**1,606**	**1,529**	**1,571**	**1,553**	**1,694**	**1,776**

Найкращий показник цінності має четвертий маршрут:

$$x^1 = 4, \quad y^1 = f(x^1) = \begin{bmatrix} 50\ \text{хв.} \\ 90\ \text{коп.} \end{bmatrix}.$$

Результати етапів 1-3 надсилаються ОПР.

<u>Етап 4.</u> ОПР не вважає оцінку y^1 маршруту x^1=4 задовільною та вводить припустимі рівні ξ_1=45 *хв.*, ξ_2=50 *коп.*

<u>Етап 5.</u> Визначається реальність припустимих рівнів:

$$\left.\begin{array}{c} t \to \max, \\ \text{Час, хв.}(x) \le 45-(45-30)t, \\ \text{Вартість, коп.}(x) \le 50-(50-30)t, \\ x \in X. \end{array}\right\} \Rightarrow t^* = -1$$

Первісні припустимі рівні нереальні. Реальні рівні, що відповідають первісним, такі:

$$\xi_1^* = 45 - 15\cdot(-1) = 60\,(\text{хв.}),\ \xi_2^* = 50 - 20\cdot(-1) = 70\,(\text{коп.}).$$

<u>Етап 6.</u> Ефективний маршрут, що задовольняє реальним рівням, один - шостий: x^2= 6. Його оцінка $y^2 = f(x^2) = \begin{bmatrix} 60\,\text{хв.} \\ 60\,\text{коп.} \end{bmatrix}$ сповіщається ОПР.

<u>Етап 7.</u> ОПР затверджує шостий маршрут за розв'язок задачі. Кінець. Задачу про визначення найкращого транспортного маршруту розв'язано.

6.5. Завдання для самостійного опрацювання

Задача 1.Визначити оптимальний розв‘язок багатокритеріальної задачі

Критерії оптимальності:

1. максимум валової продукції
2. мінімум витрат трудових ресурсів

Таблиця з розрахунковими даними

Критерій оптимальності	Значення								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
максимум валової продукції	200	150	300	250	600	400	200	150	300
мінімум витрат трудових ресурсів	20	30	40	20	10	25	30	60	25

Задача 2.

Визначити оптимальний розв‘язок багатокритеріальної задачі

Критерії оптимальності:

1. максимум прибутку
2. мінімум середньоквадратичного відхилення

Таблиця з розрахунковими даними

Критерій оптимальності	Значення								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
максимум прибутку	10	20	50	10	30	25	60	40	30
мінімум середньоквадратичного відхилення	10	20	10	5	30	10	20	5	9

6.6. Контрольні запитання

1.Ннаведіть загальну модель багатокритеріальної оптимізації

2. Які Ви знаєте способи поєднання критеріїв оптимальності?

3. В чому полягає метод поступок?

4. Що таке узагальнена функція цінностей альтернатив?

5. Як визначаються коефіцієнти узагальненої функції цінностей альтернатив?

6. Наведіть алгоритм методки багатокритеріальної оптимізації

РОЗДІЛ 7

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ В ЛОГІСТИЦІ

7.1. Економічна та математична постановка транспортної задачі

Транспортна задача є типовою задачею лінійного програмування, тобто, її розв'язок можна отримати звичайним симплексним методом. Однак, у деяких випадках застосування стандартних алгоритмів є нераціональним. Специфічна структура транспортної задачі дає змогу отримати альтернативний метод пошуку оптимального плану за простішою процедурою ніж процедура симплексного методу. Транспортна задача належить до типу розподільчих задач лінійного програмування. Економічний зміст таких задач описує різновид проблематики, яка може не бути пов'язаною із перевезенням вантажів, як, наприклад, задачі оптимального розміщення виробництва, складів, оптимального призначення тощо. Деякі з таких задач розглянемо в цьому розділі.

Класична транспортна задача лінійного програмування формулюється так: деякий однорідний продукт, що знаходиться у m постачальників A_i в обсягах $a_1, a_2, ..., a_m$ одиниць відповідно необхідно перевезти n споживачам

B_j в обсягах $b_1, b_2, ..., b_n$ одиниць. При цьому виконується умова, що загальний наявний обсяг продукції у постачальників дорівнює загальному попиту всіх споживачів. Відомі вартості c_{ij} перевезень одиниці продукції від кожного A_i-го постачальника до кожного B_j-го споживача, що подані як елементи матриці виду:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ . & . & . & . \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Необхідно визначити план перевезень, згідно якого вся продукція була б вивезена від постачальників, повністю задоволені потреби споживачів і загальна вартість всіх перевезень була б мінімальною. У такій постановці задачі ефективність плану перевезень визначається його вартістю і така задача має назву транспортної задачі за критерієм вартості перевезень.

Запишемо її математичну модель. Позначимо через x_{ij} обсяг продукції, що перевозиться від A_i постачальника до B_j споживача $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$. Тоді вигляд задачі зручно подати у вигляді таблиці 7.1.

Таблиця 7.1

Таблична форма транспортної задачі

Споживачі / Постачальники		B_1	B_2	...	B_n
		b_1	b_2	...	b_n
A_1	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}
A_2	a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}
…	…	…	…	...	…
A_m	a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}

Мають виконуватися такі умови:

1) сумарний обсяг продукції, що вивозиться з кожного і-го пункту, має дорівнювати запасу продукції в даному пункті:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1; \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m; \end{cases}$$

2) сумарний обсяг продукції, що ввезений кожному j- му споживачеві, має дорівнювати його потребам:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1; \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = b_2; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_m; \end{cases}$$

3) сумарна вартість всіх перевезень повинна бути мінімальною:

$$\min F = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \cdots + c_{1n}x_{1n} + \ldots + c_{22}x_{22} \ldots + c_{2n}x_{2n} +$$
$$+ c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \cdots + c_{mn}x_{mn}.$$

Очевидно, що $x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1,m}; \quad i = \overline{1,n}.$

У скороченій формі запису математична модель транспортної задачі за критерієм вартості перевезень має такий вигляд:

$$\min F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \qquad (7.1)$$

за обмежень:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1,m}); \qquad (7.2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1,n}); \qquad (7.3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i = \overline{1,m}; \quad i = \overline{1,n}). \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (7.4)$$

У розглянутій задачі має виконуватися умова:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7.5)$$

Транспортну задачу називають збалансованою, або закритою, якщо виконується умова (7.5). Якщо ж така умова не виконується, то транспортну задачу називають незбалансованою, або відкритою.

Домовимося планом транспортної задачі називати будь-який невід'ємний розв'язок системи обмежень (7.2)-(7.4), який позначають матрицею $X = x_{ij} \quad (i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n})$. Значення невідомих величин x_{ij} – обсяги продукції, що мають бути перевезені від i-х постачальників до j-х споживачів, називатимемо перевезеннями.

Оптимальним планом транспортної задачі називають матрицю $X^* = x_{ij}^*$ $(i = \overline{1,m}; \quad i = \overline{1,n})$, яка задовольняє умові задачі, і для якої цільова функція (5.1) набирає найменшого значення.

Умова існування розв'язку транспортної задачі: необхідною і достатньою умовою існування розв'язку транспортної задачі (7.1) - (7.4) є її збалансованість:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Доведення теореми можна знайти, наприклад, в [25].

Якщо при перевірці збалансованості (7.5) виявилося, що транспортна задача є відкритою, то її необхідно звести до закритого типу. Це здійснюється введенням фіктивного (умовного) постачальника A_{m+1} у разі перевищення загального попиту над запасами із обсягом ресурсу $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j = a_{m+1}$.

Якщо ж загальні запаси постачальників перевищують попит споживачів, то до закритого типу задача зводиться введенням фіктивного (умовного) споживача B_{n+1} з потребою $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j = b_{n+1}$.

Вартість перевезення одиниці продукції від фіктивного постачальника A_{m+1} (або фіктивного споживача B_{n+1}) до кожного зі споживачів (виробників) має дорівнювати нулю або бути набагато більшою за реальні витрати c_{ij} $(i = \overline{1,m};\quad i = \overline{1,n})$. Як правило, у такому разі використовують нульові значення вартостей перевезень, що дає змогу спростити обчислення.

Як згадувалося вище, транспортна задача (7.1)–(7.4) є звичайною задачею лінійного програмування і може бути розв'язана симплексним методом, однак особливості побудови математичної моделі транспортної задачі дають змогу розв'язати її простіше. Легко помітити, що всі коефіцієнти при змінних у рівняннях (7.2), (7.3) дорівнюють одиниці, а сама система обмежень (7.2), (7.3) задана в канонічній формі. Крім того, система обмежень (7.2), (7.3) складається з mn невідомих та m + n рівнянь, які пов'язані між собою співвідношенням (7.8). Якщо додати відповідно праві та ліві частини систем рівнянь (7.2) та (7.3), то отримаємо два однакових рівняння:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j;$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

Наявність у системі обмежень двох однакових рівнянь свідчить про її лінійну залежність. Якщо одне з цих рівнянь відкинути, то в загальному випадку система обмежень буде містити $m+n-1$ лінійно незалежне рівняння, отже, їх можна розв'язати відносно $m+n-1$ базисних змінних. Назвемо опорним планом транспортної задачі такий допустимий її план, що містить не більш ніж $m+n-1$ додатних компонент, а всі інші його компоненти дорівнюють нулю. Такий план є невиродженим. Якщо ж кількість базисних змінних менша ніж $m+n-1$, то маємо вироджений опорний план.

7.2. Методи побудови опорного плану транспортної задачі

Якщо умови транспортної задачі і її опорний план записані у вигляді табл. 7.1, то клітини, в яких $x_{ij}>0$ (ненульові значення поставок), називаються заповненими, всі інші – пустими. Заповнені клітини відповідають базисним змінним і для невиродженого плану їх кількість дорівнює $m+n-1$.

Назвемо циклом таку послідовність заповнених клітин табл. 7.1, яка задовільняє умову, що лише дві сусідні клітини містяться або в одному рядку, або в одному стовпці таблиці, причому перша клітина циклу є і його останньою клітиною. Якщо для певного набору заповнених клітин неможливо побудувати цикл, то така послідовність клітин є ациклічною.

Сформулюємо без доведення деякі теореми транспортної задачі.

Лема. Кількість клітин, які утворюють будь-який цикл транспортної задачі, завжди парна.

Теорема 7.1. Щоб деякий план транспортної задачі був опорним, необхідно і достатньо його ациклічності.

Теорема 7.2. Будь –яка сукупність з $m+n$ клітин матриці транспортної задачі утворює цикл.

Теорема 7.3. Якщо всі запаси $a_i (i=\overline{1,m})$ і всі потреби $b_j (j=\overline{1,n})$ є невід'ємними цілими числами, то будь – який опорний план складається із значень, що є цілими числами.

Як і в звичайному симплексному методі, розв'язування транспортної задачі полягає в цілеспрямованому переборі та перевірці на оптимальність опорних планів. Початком такого ітераційного процесу є побудова першого опорного плану.

Перший опорний план транспортної задачі, як і будь-якої задачі лінійного програмування можна побудувати симплексним методом, що призведе до необхідності надто складних розрахунків. Завдяки вищезгаданим особливостям будови математичної моделі транспортної задачі існують кілька простих методів побудови опорного плану. Розглянемо методи північно-західного кута, мінімальної вартості, подвійної переваги та метод апроксимації Фогеля. Побудову опорного плану зручно подавати у вигляді таблиці, в якій постачальники продукції відповідають рядкам, а споживачі – стовпчикам.

Нехай умови конкретної транспортної задач і подані в таблиці 7.2.

Таблиця 7.2

Постачальники	Запаси	Споживачі			
		B 1	B2	B 3	B4
		Потреби			
		b1= 110	b2 = 50	b3 = 60	b4 = 80
A1	a1 = 150	4 110	4 40	2	5
A2	a2 = 60	5	3 10	1 50	2
A3	a3 = 90	2	1	4 10	2 80

Метод північно-західного кута. Ідея методу північно-західного кута полягає в тому, що заповнення таблиці починають, не враховуючи вартостей переведень, з лівого верхнього (північно-західного) кута. У клітину записують менше з двох чисел a_1 та b_1. Далі переходять до наступної клітини в цьому ж рядку або у стовпчику і заповнюють її, і т. д. Закінчують заповнення таблиці у правій нижній клітинці. У такий спосіб значення поставок будуть розташовані по діагоналі таблиці.

Розглянемо цей процес детальніше на прикладі.

Спочатку, не враховуючи вартості перевезень, завжди задовільняють потреби першого споживача B_1, використовуючи запаси першого постачальника A_1. У нашому прикладі (табл. 7.2) потреби споживача B_1 становлять $b_1 = 110$, а запаси постачальника – $a_1 = 150$ одиниць (тобто із запасів першого постачальника можна повністю задовольнити потреби першого споживача), тому в клітинку $A_1 B_1$ записуємо менше із значень a_1, b_1, тобто 110. Тепер потреби першого споживача повністю задоволені, і переходимо до задоволення потреб наступного (другого) споживача В2. Обсяг його потреб $b_2 = 50$. Після задоволення потреб першого споживача залишок запасів першого постачальника становить 150 -110 = 40. Отже, від першого виробника другому споживачеві можна перевезти лише 40 одиниць продукції, тому в клітину $A_1 B_2$ записуємо число 40. Після цього, оскільки запаси першого постачальника повністю вичерпані, переходимо до використання запасів наступного постачальника A_2. Його запаси $a_2 = 60$, а незадоволені потреби другого споживача 50- 40 = 10, тому в клітинку $A_2 B_2$ записуємо число 10, і другий споживач у такий спосіб також повністю отримав необхідну кількість продукції. Переходимо до вдоволення потреб наступного споживача B_3. У результаті часткового використання запасів другого постачальника його залишок продукції становить 60-10 = 50. Отже, від другого виробника до третього споживача можна перевезти 50 одиниць продукції. Клітинка $A_2 B_3$ міститиме зазначене число 50, і цим запаси постачальника A_2 будуть повністю вичерпані. Переходимо до розподілу запасів останнього (третього) постачальника A_2. Залишились незадоволеними потреби третього споживача в обсязі 60-50= 10. Для їх задоволення скористаємося запасами постачальника A_3. У клітинку $A_3 B_3$ записуємо число 10, і потреби споживача B_3 також повністю задоволені. Переходимо до останнього споживача B_4 з потребами $b_4 = 80$, які повністю задовольняються за рахунок залишку запасів третього постачальника: 90 - 10 = 80. Отже, в табл. 7.2 у заповнених клітинках знаходяться числа, що означають можливий план перевезень продукції. Сума чисел (перевезень) по рядках дорівнює обсягам запасів постачальників, а сума чисел по стовпцях – обсягам потреб відповідних споживачів.

Аналогічний результат можна отримати, якщо почати з правого нижнього кута таблиці, рухаючись до лівого верхнього. Процедуру методу можна застосовувати також, починаючи розподіл поставок з лівого нижнього кута і рухаючись до правого верхнього по діагоналі. В такому разі спосіб розподілу перевезень можна було б назвати методом південно-західного кута, тому цей метод ще називають діагональним. Метод північно-західного кута є найпростішим, однак і найменш ефективним. Процес відшукування оптимального плану після початкового опорного, який визначений методом північно-західного кута, пов'язаний зі значним обсягом обчислювальних робіт, тому його реалізують на ЕОМ.

Визначимо загальну вартість перевезень згідно з початковим опорним планом. Від першого постачальника до першого споживача необхідно перевезти 110 одиниць продукції за ціною 4 ум. од. (ціна записана в правому верхньому куті кожної клітини), отже, це коштуватиме 110× 4 = 440 ум. од. Крім того, необхідно перевезти від першого постачальника 40 одиниць продукції до другого споживача за ціною 4 ум. од. і т. д. У такий спосіб визначимо загальну вартість усіх перевезень:

$$F = 110 \cdot 4 + 40 \cdot 4 + 10 \cdot 3 + 50 \cdot 1 + 10 \cdot 4 + 80 \cdot 2 = 880 \text{ (ум. од.)}.$$

Згідно теореми, яку ми приймемо без доведення: опорний план транспортної задачі, який знайдений методом північно-західного кута, завжди ациклічний.

Наведені властивості опорних планів стосуються і тих планів, що отримані розглянутими нижче іншими способами, які певною мірою є модифікаціями методу північно-західного кута. Очевидно, якщо за побудови опорного плану враховувати вартості перевезень, то сумарна вартість всіх постачань може бути зменшена, і отриманий опорний план буде ближчим до оптимального.

Метод мінімальної вартості. Ідея методу мінімальної вартості полягає в тому, що на кожному кроці заповнюють клітинку таблиці, яка має найменшу вартість перевезення одиниці продукції. Такі дії повторюють доти, доки не буде розподілено всю продукцію між постачальниками та споживачами.

Складемо за допомогою цього методу план розглянутої задачі (табл. 7.3). Найменшу вартість мають перевезення, які здійснюються від A_2 до B_3 та від A_3, до B_2 (ціна перевезення одиниці продукції – 1 ум. од.).

Таблиця 7.3

a_i \ b_j	b_1=110	b_2=50	b_3 = 60	b_4=80
a_1 = 150	4 70	4	2	5 80
a_2 = 60	5	3	1 60	2
a_3 = 90	2 40	1 50	4	2

Заповнимо будь-яку з них, наприклад, $A_2 B_3$. Оскільки постачальник має 60 одиниць продукції, а споживач потребує саме такої її кількості, то в клітину $A_2 B_3$ ставимо значення 60. У такий спосіб запаси другого постачальника повністю вичерпані, а потреби третього споживача повністю задоволені. Також мінімальною є вартість перевезень від третього постачальника до другого споживача, тому заповнимо також клітину $A_3 B_2$.

З клітинок таблиці, що залишились незаповненими, вибираємо наступне мінімальне значення вартості перевезень, яке дорівнює 2 ум. од. – для клітин $A_1 B_3$, $A_2 B_4$, $A_3 B_1$ та $A_3 B_4$. Заповнення клітин $A_2 B_4$ та $A_1 B_3$ неможливе, оскільки постачальник A_2 вже повністю вичерпав власний обсяг запасів, задовольняючи потреби споживача B_3 а споживач B_3, повністю задовольнив свої потреби. Отже, можна заповнити тільки клітину $A_3 B_1$ чи $A_3 B_4$. Заповнимо $A_3 B_1$. Обсяг запасів $a_3 = 90$, причому 50 одиниць продукції вже надано другому споживачеві. Отже, маємо залишок 90 - 50 = 40, а потреби $b_1 = 110$, тому від третього постачальника до першого споживача плануємо перевезти 40 одиниць продукції. Тепер у клітину $A_3 B_4$ неможна записати будь-який обсяг постачання, оскільки запаси третього постачальника вже повністю вичерпані.

Знову вибираємо найменшу вартість для клітин таблиці, що залишилися пустими, і продовжуємо процес доти, поки всі запаси не будуть розподілені, а потреби – задоволені. В результаті таких міркувань отримали початковий опорний план, загальна вартість перевезень для якого становить:

$$F = 70 \cdot 4 + 80 \cdot 5 + 60 \cdot 1 + 50 \cdot 1 + 40 \cdot 2 = 870 \text{ (ум. од.)}.$$

Значення цільової функції менше за попередній варіант, значить цей план ближчий до оптимального.

Метод подвійної переваги. Якщо розмірність задачі досить велика, то перебір за методом мінімальної вартості ускладнюється. В такому випадку для спрощення пошуку клітин з найменшими вартостями застосовують метод подвійної переваги. Згідно з процедурою цього методу перед початком заповнення таблиці необхідно позначити будь-якими символами клітинки, які містять найменшу вартість у рядках, а потім – у стовпчиках. Таблицю починають заповнювати з клітинок, позначених двічі (які містять вартості, що є мінімальними і в рядку, і в стовпчику).

Таблиця 7.4

b_j / a_i	$b_1=110$	$b_2=50$	$b_3=60$	$b_4=80$
$a_1=150$	4 110	4	V2	5 40
$a_2=60$	5	3	VV1 60	V2
$a_3=90$	V2	VV1 50	4	V2 40

Далі заповнюють клітинки, позначені один раз (що містять мінімальні вартості або в рядку, або в стовпчику), а вже потім - за методом мінімальної вартості.

$$F = 110 \cdot 4 + 40 \cdot 5 + 60 \cdot 1 + 50 \cdot 1 + 40 \cdot 2 = 830 \text{ (ум. од.)}.$$

Застосування для побудови опорного плану даного методу дає можливість отримання найменшого значення цільової функції в порівнянні з розглянутими вище методами. Отже, такий план є найближчим до оптимального.

Метод апроксимації Фогеля. За цим методом на кожному кроці визначають різницю між двома найменшими вартостями в кожному рядку і стовпчику транспортної таблиці. Ці різниці записують у спеціально відведених місцях таблиці – знизу та справа у кілька рядків та стовпчиків, що відповідають крокам заповнення таблиці. З-поміж усіх різниць вибирають найбільшу і у відповідному рядку чи стовпчику заповнюють клітинку з найменшою вартістю. Якщо ж однакових найбільших різниць кілька, то вибирають будь-який відповідний рядок або стовпчик. Коли залишається незаповненим лише один рядок або стовпчик, то об числення різниць припиняють, а таблицю продовжують заповнювати за методом мінімальної вартості.

Даний метод побудови опорного плану враховує не лише маршрути з мінімальними витратами перевезень продукції, але й співвідношення витрат у рядку чи стовпчику, тобто розраховується наскільки може збільшитися вартість постачання на наступних кроках процедури, якщо не здійснити на поточному кроці постачання в клітину з мінімальною вартістю.

Метод апроксимації Фогеля дає змогу особливо для задач великих розмірностей скласти найкращий опорний план (табл. 7.5).

Таблиця 7.5

bj / ai	b1 =110	b2 = 50	b3=60	b4=80	Різниці по рядках		
a 1= 150	4 110	4 40	2	5	2	2	0
a2=60	5	3	1 60	2	1	2	
a 3 = 90	2	1 10	4	2 80	1	1	1
Різниці по стовпцях	2	2	1	3			
	2	2	1				
	2	3					

У таблиці 7.5. навпроти кожного рядка і стовпчика записані величини, які знайдені як різниці між мінімальним значенням вартості та наступним за ним по рівню. Максимальне значення такої різниці на першому кроці відповідає четвертому стовпчику і означає, що у разі, коли не буде задоволена потреба четвертого споживача перевезенням продукції від третього постачальника за ціною 2 ум. од. за одиницю, то на наступних кроках вартість перевезення може бути на 3 ум. од. більшою. Тобто інакше може статися, що потребу четвертого споживача необхідно буде задовольняти перевезенням продукції від першого постачальника, що призведе до збільшення вартості цього перевезення в 2,5 рази. Водночас для всіх інших споживачів та постачальників такі різниці є меншими. Отже, найдоцільніше на першому кроці заповнити клітину $A_3 B_4$. Після цього потреби B_4 повністю задоволені, і всі клітини четвертого стовпчика виключаються з наступного розрахунку різниць по рядках і стовпцях.

На другому кроці максимальна різниця дорівнює 2 і відповідає першому і другому рядкам та першому і другому стовпчикам, тому можна заповнювати будь-яку їх клітину з мінімальною вартістю, наприклад, $A_2 B_3$. Після цього з розгляду виключаються одразу всі клітини другого рядка та третього стовпця, оскільки потреби третього споживача повністю задоволені, а запаси другого постачальника вичерпані.

Останній розрахунок різниць (найбільше значення 3 відповідає другому стовпчику) свідчить про доцільність введення поставки від третього постачальника до другого споживача. Решту клітин заповнимо методом мінімальної вартості та визначимо загальну вартість перевезень:

$$F = 110\text{-}4 + 40\text{-}4 + 60\text{-}1 + 10\text{-}1 + 80\text{-}2 = 830 \text{ (ум. од.)}.$$

Результат збігся із значенням цільової функції для опорного плану, що складений за попереднім методом. Ефективність методу апроксимації Фогеля, як вже згадувалось, є очевидною для задач більшої розмірності.

Зазначимо, що ефективність наведених методів можна оцінювати лише в середньому, оскільки можлива ситуація, що методом мінімальної вартості отримано опорний план транспортної задачі кращий, ніж методом подвійної переваги.

7.3. Метод потенціалів

Метод потенціалів є варіантом симплекс-методу пристосованого для розв’язку транспортної задачі. Початковий опорний план, отриманий за методом північно-західного кута, дорівнює розв’язку системи обмежень відносно базисних змінних. Тому, підставляючи значення базисних змінних в лінійну форму цільової функції отримуємо її нову форму:

$$Z_{min} + \sum_{i,j} s_{ij} \times x_{ij} \qquad (7.6)$$

де і, j приймають значення вільних клітин (x_{ij} – вільні змінні).

Коефіцієнти s_{ij} визначаються наступним чином. Для кожного постачальника A_i введемо деяку величину α_i "потенціал α_i", а для споживача B_j введемо деяку величину β_j "потенціал β_j". Ці величини пов'язані між собою: для кожної базисної змінної (заповненої клітини) x_{ij} складемо рівняння:

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij} \qquad (7.7)$$

де c_{ij} – вартість перевезення одиниці вантажу із пункту A_i в пункт B_j.

Кількість невідомих α_i та β_j. дорівнює m+n, а кількість рівнянь – числу базисних змінних x_{ij}. Для того, щоб отримати розв'язок системи рівнянь (7.7) необхідно визначити одну змінну самостійно, тоді інші змінні знаходять із системи однозначно.

Припустимо, що (α_1,α_2,.... α_m; β_1, β_2, β_3,….. β_n) – деякий існуючий розв'язок рівнянь (7.7). Для кожної вільної змінної (вільної клітини) x_{ij} обраховуємо суму $\alpha_i + \beta_j$ і позначаємо її c_{ij}', тобто:

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij}' \qquad (7.8)$$

де c_{ij}' – побічна вартість.

Тоді у рівнянні $Z_{min} + \sum_{i,j} s_{ij} \times x_{ij}$ всі коефіцієнти при вільних змінних задаються формулою:

$$s_{ij} = c_{ij} - c_{ij}' \qquad (7.9)$$

Якщо всі змінні визначені на підставі (7.8) додатні ($s_{ij} \geq 0$), то початкове опорне рішення є оптимальним. Якщо серед них є від'ємні значення, тоді початкове опорне рішення не оптимальне. У разі не оптимальності опорного плану необхідно перейти до нового базису і продовжити ітерації розрахунків. Якщо декілька змінних будуть від'ємними, тоді необхідно в базис включити ту змінну, якій відповідає мінімальне значення величини sij.

Алгоритм розв'язку транспортної задачі наступний:

1. на основі методу північно-західного кута шукають 1-й опорний план або перший базисний розв'язок;
2. розраховують потенціали постачальників та споживачів;
3. розраховують побічні вартості для незаповнених клітин;
4. перевіряють оцінки $s_{ij} = c_{ij} - c_{ij}'$, якщо вони всі додатні, тоді отриманий план є оптимальним, якщо ж хоча б одна оцінка є від'ємною $s_{ij} = c_{ij} - c_{ij}' \le 0$, тоді вводиться змінна x_{kl}, для якої ця різниця є найменшою і отримують наступний план. Дані розрахунки проводять до тих пір, поки всі різниці не будуть додатними $s_{ij} = c_{ij} - c_{ij}' \ge 0$.

Приклад. Матриця відвантаження молочної продукції молокозаводом із пунктів приймання А1,А2,А3 в пункти переробки молокозаводу задана таблицею 6.7. В таблиці наведено транспортні витрати в розрахунку на 100 л молока. Необхідно визначити оптимальний план перевезень для молокозаводу, який буде мінімізувати транспортні витрати на перевезення молока від пунктів прийому до самих переробних цехів.

Розв'язок. 1. Перевіримо чи є задача відкритою. Задана задача є закритою оскільки виконується умова $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, тобто $220 = 220$.

2. Знайдемо оптимальний план за методом північно-західного кута. Для цього запишемо транспортну задачу у табличному вигляді (таблиця 7.6). Перевіримо її на збалансованість. У разі наявності незбалансованої задачі, її необхідно привести до закритого типу (збалансувати по кількості ресурсів).

Таблиця 7.6

Постачальник	Пункти переробки та їх потреба в продукті				Пункти перевезень
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	$c_{11}=2$ x_{11}	$c_{12}=5$ x_{12}	$c_{13}=1$ x_{13}	$c_{14}=5$ x_{14}	40
A_2	$c_{21}=3$ x_{21}	$c_{22}=4$ x_{22}	$c_{23}=5$ x_{23}	$c_{24}=4$ x_{24}	80
A_3	$c_{31}=4$ x_{31}	$c_{32}=6$ x_{32}	$c_{33}=7$ x_{33}	$c_{34}=3$ x_{34}	100
Сума	20	40	80	80	220

Як видно із таблиці 7.7 опорний план є невиродженим. Введемо потенціали і розрахуємо їх.

Таблиця 7.7

Постачальник	Пункти переробки та їх потреба в продукті				Пункти перевезень	Потенціали
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	$c_{11}=2$ $x_{11}=20$	$c_{12}=5$ $x_{12}=20$	$c_{13}=1$ x_{13}	$c_{14}=5$ x_{14}	40	α1
A_2	$c_{21}=3$ x_{21}	$c_{22}=4$ $x_{22}=20$	$c_{23}=5$ $x_{23}=60$	$c_{24}=4$ x_{24}	80	α2
A_3	$c_{31}=4$ x_{31}	$c_{32}=6$ x_{32}	$c_{33}=7$ $x_{33}=20$	$c_{34}=3$ $x_{34}=80$	100	α3
Сума	20	40	80	80	220	X
Потенціали	β1	β2	β3	β4	X	X

Система рівнянь для визначення потенціалів наступна:

$$\begin{cases} \alpha 1+\beta 1=2 \\ \alpha 1+\beta 2=5 \\ \alpha 2+\beta 2=4 \\ \alpha 2+\beta 3=5 \\ \alpha 3+\beta 3=7 \\ \alpha 3+\beta 4=3 \end{cases}$$

Знайдемо потенціали для зайнятих клітин: $\alpha_1 = 0$ (припустимо самостійно); $\beta_1 = 2$; $\alpha_2 = -1$; $\beta_2 = 5$; $\alpha_3 = 1$; $\beta_3 = 6$; $\beta_4 = 2$. Знайдемо побічні вартості:

$c_{13}' = \alpha 1 + \beta 3 = 6$; $c_{21}' = \alpha 2 + \beta 1 = 1$; $c_{31}' = \alpha 3 + \beta 1 = 3$; $c_{14}' = \alpha 1 + \beta 4 = 2$;

$c_{24}' = \alpha 2 + \beta 4 = 1$; $c_{32}' = \alpha 3 + \beta 2 = 6$.

Обчислюємо оцінку для вільних клітин:

$s_{13} = c_{13} - c_{13}' = 1 - 6 = -5$; $s_{14} = c_{14} - c_{14}' = 5 - 2 = 3$;

$s_{21} = c_{21} - c_{21}' = 3 - 1 = 2$; $s_{24} = c_{24} - c_{24}' = 4 - 1 = 3$;

$s_{31} = c_{31} - c_{31}' = 4 - 3 = 1$; $s_{32} = c_{32} - c_{32}' = 6 - 6 = 0$.

Оцінка $s_{13} = -5 \leq 0$, тому отриманий план є неоптимальним.

Для перерозподілу вантажу вибираємо клітину з найменшою від'ємною оцінкою. В нашому випадку вона одна – x_{13}. В цю клітину переміщуємо вантаж із клітини x_{33}. Для цього утворюємо цикл. Цикл це ломана лінія, яка лежить впродовж стовпчиків та рядків таблиці і відповідає умовам:

1. ломана повинна бути зв'язаною лінією;

2. в кожній вершині ломаної зустрічаються дві ланки, одна із яких пролягає вздовж рядка, а друга – вдзовж стовпчика.

Цикл який визначений, має в усіх вершинах конкретний знак "+" або "-", кількість яких однакова. Початкова вершина приймається із знаком "+". Цикл переходів зображено в таблиці 7.8.

Таблиця 7.8

Постачальник	Пункти переробки та їх потреба в продукті				Пункти перевезень	Потенціали
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	$c_{11}=2$ $x_{11}=20$ −	$c_{12}=5$ $x_{12}=20$	$c_{13}=1$ x_{13} +	$c_{14}=5$ x_{14}	40	α1
A_2	$c_{21}=3$ x_{21} +	$c_{22}=4$ $x_{22}=20$ −	$c_{23}=5$ $x_{23}=60$	$c_{24}=4$ x_{24}	80	α2
A_3	$c_{31}=4$ x_{31}	$c_{32}=6$ x_{32} +	$c_{33}=7$ − $=20$	$c_{34}=3$ $x_{34}=80$	100	α3
Сума	20	40	80	80	220	X
Потенціали	β1	β2	β3	β4	X	X

У відповідності зі знаками будемо перерозподіляти клітину x_{33}=20. В клітини, які є точками циклу із знаком "+" додамо 20. Із клітини, яка є точками циклу зі знаком "–" заберемо 20. Отримуємо перерозподіл в таблиці 7.9. Розраховуємо потенціали для заповнених клітин: α1=0; α2=4; α3=1; β1=-1; β2=5; β3 = 1; β4 = 2. Знайдемо побічні вартості: $c_{11}'=-1$; $c_{14}'=2$; $c_{22}'=9$; $c_{24}'=6$; $c_{31}'=0$; $c_{33}'=2$. Обчислимо оцінки вартості для вільних клітин: $s_{11}=2-(-1)=3$; $s_{14}=5-2=3$; $s_{22}=4-9=-5$; $s_{24}=4-6=-2$; $s_{24}=4-6=-2$; $s_{31}=4-0=4$; $s_{33}=7-2=5$.

Для рішення існують від’ємні оцінки. Візьмемо знову клітину з найменшою від’ємною оцінкою x22 і будемо переміщати в неї 20 одиниць вантажу із клітини x12 (таблиця 7.10), отримуємо таблицю 7.10.

Таблиця 7.9

Постачальник	Пункти переробки та їх потреба в продукті				Пункти перевезень	Потенціали
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	$c_{11}=2$ $x_{11}=0$	$c_{12}=5$ - $x_{12}=20$	$c_{13}=1$ + $x_{13}=20$	$c_{14}=5$ x_{14}	40	$\alpha1$
A_2	$c_{21}=3$ $x_{21}=20$	$c_{22}=4$ + $x_{22}=0$	$c_{23}=5$ $x_{23}=60$ -	$c_{24}=4$ x_{24}	80	$\alpha2$
A_3	$c_{31}=4$ x_{31}	$c_{32}=6$ $x_{32}=20$	$c_{33}=7$ $x_{33}=0$	$c_{34}=3$ $x_{34}=80$	100	$\alpha3$
Сума	20	40	80	80	220	Х
Потенціали	$\beta1$	$\beta2$	$\beta3$	$\beta4$	Х	Х

Таблиця 7.10

Постачальник	Пункти переробки та їх потреба в продукті				Пункти перевезень	Потенціали
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	$c_{11}=2$ $x_{11}=0$	$c_{12}=5$ $x_{12}=0$	$c_{13}=1$ $x_{13}=40$	$c_{14}=5$ x_{14}	40	$\alpha1$
A_2	$c_{21}=3$ $x_{21}=20$	$c_{22}=4$ $x_{22}=20$	$c_{23}=5$ $x_{23}=40$	$c_{24}=4$ x_{24}	80	$\alpha2$
A_3	$c_{31}=4$ x_{31}	$c_{32}=6$ $x_{32}=20$	$c_{33}=7$ $x_{33}=0$	$c_{34}=3$ $x_{34}=80$	100	$\alpha3$
Сума	20	40	80	80	220	Х
Потенціали	$\beta1$	$\beta2$	$\beta3$	$\beta4$	Х	Х

Для рішення існують від’ємні оцінки. Візьмемо знову клітину з найменшою від’ємною оцінкою x_{22} і будемо переміщати в неї 20 одиниць вантажу із клітини x_{12} (таблиця 7.9), отримуємо таблицю 7.10.

Розраховуємо потенціали для заповнених клітин: $\alpha_1=0$; $\alpha_2=2$; $\alpha_3=4$;

β_1=1; β_2=2; β_3=1; β_4=-1. Знайдемо побічні вартості для незаповнених клітин: $c_{11}'=1$; $c_{12}'=2$; $c_{14}'=-1$; $c_{24}'=1$; $c_{31}'=3$; $c_{33}'=5$ Обчислимо оцінки вартості для вільних клітин: $s_{11}=1$; $s_{12}=3$;$s_{14}=5$;$s_{24}=3$;$s_{31}=1$; $s_{33}=2$. Всі оцінки є додатними. Отриманий план є оптимальним. Значення критерію ефективності (мінімальне значення транспортних витрат) дорівнюватиме:

Z_{min} = 40×1+20×3+20×4+40×5+20×6+80×3 = 740 грн.

7.4. Транспортна задача з додатковими умовами

На практиці в задачах, що пов'язані з перевезеннями, часто доводиться враховувати додаткові умови: неможливість здійснення перевезень за окремими маршрутами; необхідність перевезень неоднорідної продукції тощо. Такі умови ускладнюють математичну постановку транспортної задачі та вимагають особливих підходів до її розв'язання.

Розглянемо кілька особливостей відкритих транспортних задач з додатковими умовами.

1. Додаткова умова заборони перевезень від певного постачальника до певного споживача. В такому разі в оптимальному плані відповідні клітини обов'язково мають бути вільними ($x_{ij}=0$).

Розв'язуючи транспортну задачу з додатковою умовою на заборону окремих постачань, необхідно у відповідних клітинах замінити значення вартостей перевезень одиниці продукції на деяке велике число (ставиться досить велике число *M*). Оскільки розглянуті вище методи розв'язання транспортних задач уможливлюють організацію перевезень у такий спосіб, що мінімізується загальна вартість витрат на транспортування, то це зумовить виключення з розгляду перевезень з надто великими вартостями, що і забезпечить виконання такої додаткової умови.

2. Додаткова умова перевезення за окремими маршрутами строго визначеного обсягу продукції, тобто виконання обов'язкових постачань. В оп-

тимальному плані відкритої транспортної задачі з такою додатковою умовою клітини відповідних фіктивно введених постачальників чи споживачів мають бути вільними.

Розв'язуючи такого типу транспортну задачу, необхідно у відповідних клітинах також збільшити значення вартостей перевезень (ставиться досить велике число *M*).

3. Додаткова умова необхідності перевезення від i-го постачальника j-му споживачеві не менше k_{ij} одиниць продукції, тобто вводиться додаткове обмеження виду: $x_{ij} \geq k_{ij}$.

Розв'язуючи транспортну задачу з такою додатковою умовою, необхідно змінити початкові умови: обсяг постачання k_{ij} відняти від обсягу запасу i-го постачальника ($a'_i = a_i - k_{ij}$) та від потреби j-го споживача $(b'_j = b_j - k_{ij})$. Знайдений оптимальний план транспортної задачі зі зміненими умовами (де використані значення a'_i, b'_j) коригується, враховуючи обмеження $x_{ij} \geq k_{ij}$.

4. Додаткова умова необхідності перевезення від i-го постачальника j-му споживачеві не більше k_{ij} одиниць продукції, тобто вводиться додаткове обмеження виду: $x_{ij} \leq k_{ij}$.

Для виконання такої додаткової умови необхідно в транспортну таблицю j-го споживача записати двічі. Один раз його потреби визначатимуться величиною k_{ij}, а другий раз – різницею $b_j - k_{ij} = b'_j$. Витрати на перевезення одиниці продукції в обох стовпцях повинні бути однаковими за винятком клітини на перетині i-го постачальника і j-го споживача з потребою b'_j. У цій клітині ставиться досить велике число M. В такій постановці задача розв'язується відомими методами.

5. На практиці часто потрібно визначити оптимальний план перевезень неоднорідної продукції, тобто розв'язати багатопродуктову задачу. Її математична модель має такий вигляд:

$$\min F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} c_{ijk} x_{ijk}; \qquad (7.10)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} = a_{ik},\ i = \overline{1,m};\ k = \overline{1,l}; \qquad (7.11)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijk} = b_{jk},\ j = \overline{1,n};\ k = \overline{1,l}; \qquad (7.12)$$

$$x_{ijk} \geq 0, i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n};\ k = \overline{1,l}, \qquad (7.13)$$

де k – індекс виду продукції, що необхідно перевезти.

Розв'язуючи багатопродуктову транспортну задачу, потрібно заблокувати ті клітини, які зв'язують постачальників і споживачів щодо постачань різної продукції. Таке блокування здійснюється введенням досить високих вартостей перевезень одиниці продукції (великого числа M), але слід зауважити, що наявність заблокованих клітин може призвести до неможливості розв'язання задачі. Тому в такому разі необхідно перевіряти, чи є достатня кількість незаблокованих перевезень для побудови опорного плану задачі, який повинен містити $m+n-1$ додатну змінну.

Приклад. Три переробних заводи A_1, A_2 та A_3 із максимальною щоденною продуктивністю відповідно 30, 20 і 15 тис. т фруктового концентрату забезпечують чотири склади B_1, B_2, B_3, B_4, щоденна потреба яких становить відповідно 10, 20, 25 та 20 тис. т. продукції. Фруктовий концентрат постачається до складів автомобільним транспортом. Вартість перевезення 1000 т концентрату від заводів до складів (в умовних одиницях) наведена в таблиці 7.11.

Сформулювати та розв'язати відповідну транспорту задачу з неодмінним виконанням таких умов:

1) повністю задовольнити потребу складу B_4;

2) за недопостачання концентрату до складу B_2 згідно з договором пе-

редбачені штрафні санкції: 5 ум. од. за кожні 1000 т концентрату;

3) у зв'язку з виконанням ремонтних робіт на дорозі постачання концентрату із заводу A_1 до складу B_1 тимчасово неможливе.

Таблиця 7.11

Завод	Вартість постачання 1000 т концентрату до складу, ум. од.			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	5	3	7
A_2	7	6	2	5
A_3	1	3	9	8

Розв'язок. Визначаємо тип транспортної задачі (закрита чи відкрита):

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 30 + 20 + 15 = 65, \quad \sum_{j=1}^{4} b_j = 10 + 20 + 25 + 20 = 75.$$

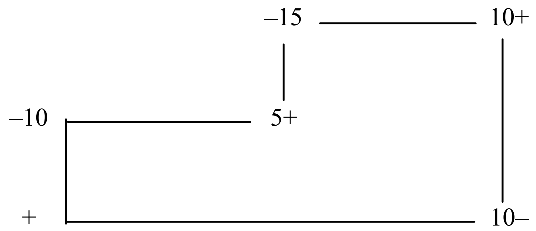
Транспортна задача є відкритою, незбалансованою. Зведення її до закритого типу потребує введення додаткового фіктивного постачальника A_4 з продуктивністю $a_4 = 75 - 65 = 10$ (тисяч тонн). Кількість концентрату, що «відправляється» фіктивним заводом до складів, в оптимальному плані означатиме обсяг незадоволеного попиту в цьому пункті призначення. Тому для виконання першої додаткової вимоги задачі необхідно заблокувати клітинку фіктивного постачальника A_4 та споживача B_4, записавши в ній досить високу вартість перевезення M. Тоді можна бути впевненим, що в оптимальному плані транспортної задачі ця клітинка обов'язково буде незаповненою.

Виконання другої умови задачі забезпечується тим, що в рядку фіктивного постачальника у стовпчику B_2 вартість транспортування 1000 т концентрату дорівнюватиме 5 ум. од. замість нуля.

Оскільки неможливо транспортувати продукцію від заводу A_1 до складу B_1, то необхідно також заблокувати маршрут A_1B_1. Для цього в зазначеній клітинці замість $C_{11} = 4$ записуємо величину M.

З урахуванням вищезазначеного, перший планом транспортної задачі матиме вигляд наведений у таблиці 7.12 (початковий опорний план побудовано методом апроксимації Фогеля).

Перший опорний план задачі неоптимальний. Найбільше порушення умови оптимальності відповідає порожнім клітинкам A_4B_1 та A_4B_3 таблиці. Оскільки обидві вони мають однакові коефіцієнти $C_{41} = C_{43} = 0$, то для заповнення можна вибрати будь-яку з них, наприклад, A_4B_1. Перехід до другого плану виконується за таким циклом:



Після цього кроку заблокована клітинка A_4B_4 стає порожньою.

Таблиця 7.12

A_i	B_j					Різниці для рядків		
	$b_1 = 10$	$b_2 = 20$	$b_3 = 25$	$b_4 = 20$	u_i			
$a_1 = 30$	M	5 15	3 – 5	7 10 +	$u_1 = 0$	2	2	2
$a_2 = 20$	7	6	2 20	5 1	$u_2 = -1$	3	3	3
$a_3 = 15$	-1 10	3 5	9	8	$u_3 = -2$	2	5	
$a_4 = 10$	0 + $M - 4$	5 $M - 7$	0 $M - 4$	M 10	$u_4 = M - 7$			
v_j	$v_1 = 3$	$v_2 = 5$	$v_3 = 3$	$v_4 = 7$				
Різниці для стовпчиків	6	2 2 1	1 1 1	2 2 2				

Дальше розв’язування задачі подано у вигляді таблиці 7.13 та таблиці 7.14.

Таблиця 7.13

A_i	B_j				u_i
	$B_1 = 10$	$B_2 = 20$	$B_3 = 25$	$B_4 = 20$	
$A_1 = 30$	M	5 5	+ 3 5	− 7 20	$u_1 = 0$
$A_2 = 20$	7	6	− 2 20	+ 5	$u_2 = -1$
$A_3 = 15$	1 0	3 15	9	8	$u_3 = -2$
$A_4 = 10$	0 10	5	0		$u_4 = -3$
v_j	$v_1 = 3$	$v_2 = 5$	$v_3 = 3$	$v_4 = 7$	

Таблиця 7.14

A_j	B_j				u_i
	$B_1 = 10$	$B_2 = 20$	$B_3 = 25$	$B_4 = 20$	
$A_1 = 30$	M	5 5	3 25	7	$u_1 = 0$
$A_2 = 20$	7	6	2 0	5 20	$u_2 = -1$
$A_3 = 15$	1 0	3 15	9	8	$u_3 = -2$
$A_4 = 10$	0 10	5	0	M	$u_4 = -3$
v_j	$v_1 = 3$	$v_2 = 5$	$v_3 = 3$	$v_4 = 6$	

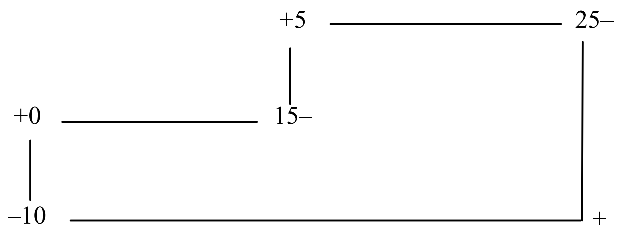
В табл. 7.14 маємо оптимальний план транспортної задачі, де:

$$X_1^* = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$Z_{min} = 5 \cdot 5 + 3 \cdot 25 + 5 \cdot 20 + 3 \cdot 15 = 245$ ум. од.

Через незбалансованість цієї транспортної задачі спостерігатиметься недопостачання концентрату до першого складу в обсязі 10000 т. Загальні витрати на транспортування за такого плану будуть найменшими і становитимуть 245 ум. од.

Альтернативний оптимальний план дістанемо, заповнивши клітинку A_4B_3 (для неї $u_4 + v_3 = c_{43}$) згідно з таким циклом:



Тоді можна записати:

$$X_2^* = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \\ 10 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

$Z_{min} = 5 \cdot 15 + 3 \cdot 15 + 5 \cdot 20 + 1 \cdot 10 + 3 \cdot 5 = 245$ ум. од.

Мінімальні загальні витрати на транспортування обсягом 245 ум. од. відповідають і третьому оптимальному плану задачі, згідно з яким третій склад отримає на 10000 т концентрату менше, ніж потребує.

Існування двох альтернативних оптимальних планів розглянутої транспортної задачі розширює можливості стосовно остаточного прийняття рішення.

7.5. Двохетапна транспортна задача

У класичній постановці транспортної задачі допускається, що вантаж перевозиться безпосередньо від постачальників до споживачів. Але на практиці досить часто зустрічається випадок, коли певна частина продукції спочатку перевозиться до посередницьких фірм (сховищ), а потім споживачам. У такому разі розв'язання задачі поділяють на два етапи: спочатку знаходять оптимальний план перевезень від постачальників до посередників, а потім — від посередників до споживачів. Така задача має назву двохетапної транспортної задачі.

Нехай в m пунктах постачання A_1, A_2, …, A_m є відповідно $a_1, a_2, ..., a_m$ одиниць продукції, яку необхідно перевезти до l посередницьких фірм $D_1, D_2, ..., D_l$, місткості сховищ яких становлять $d_1, d_2, ..., d_l$, а потім доставити її споживачам $B_1, B_2, ..., B_n$, потреби яких становлять $b_1, b_2, ..., b_n$. Відомі також витрати на перевезення одиниці продукції від кожного постачальника до посередницьких фірм — c_{ik} та від посередників до споживачів — c_{kj}. Потрібно визначити оптимальну схему перевезень продукції з мінімальними сумарними витратами. Якщо обсяг продукції, що перевозиться від i-го постачальника до k-ої фірми, позначити через x_{ik}, а обсяг вантажу, що перевозиться від k-ої фірми j-му споживачеві — через x_{kj}, то математична модель задачі матиме вигляд:

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} c_{ik}x_{ik} + \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_{kj} \qquad (7.14)$$

за умов:

$$\sum_{k=1}^{l} x_{ik} = a_i,\ i = \overline{1,m}; \qquad (7.15)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} \le d_k,\ k = \overline{1,l}; \qquad (7.16)$$

$$\sum_{k=1}^{l} x_{kj} = b_j,\ j = \overline{1,n}; \qquad (7.17)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{kj} \le d_k,\ k = \overline{1,l}; \qquad (7.18)$$

$$x_{ik} \geq 0, x_{kj} \geq 0,\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n};\ k = \overline{1,l}. \qquad (7.19)$$

Зазначимо, що коли загальний обсяг вантажу $\sum_{i=1}^{m} a_i$ дорівнює місткості всіх складів і баз $\sum_{k=1}^{l} d_k$, а також сумарній потребі всіх споживачів $\sum_{j=1}^{n} b_j$, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{k=1}^{l} d_k = \sum_{j=1}^{n} b_j$, то така двохетапна транспортна задача може бути розв'язана як дві одноетапні. В іншому разі окремі оптимальні плани двох задач не збігатимуться з оптимальним планом загальної задачі.

Метод розв'язування двохетапної транспортної задачі, розроблений Орденом-Маршем, полягає у врахуванні місткостей посередників двічі — як постачальників і як споживачів. Умови задачі подаються у вигляді таблиці, в рядках якої записують дані про постачальників, а також про посередницькі фірми, а в стовпцях – знову дані про посередників та споживачів. У клітинах, які розміщені на перетині рядків-постачальників та стовпців-споживачів, фіксують реальні затрати на перевезення одиниці продукції. В діагональних клітинах на перетині рядків і стовпців, які відповідають посередницьким фірмам, ставлять нульові величини затрат. Решту клітин таблиці блокують, тобто вартості перевезень прирівнюють до деякого досить великого числа *M*. У процесі розв'язування задачі в цих клітинах не будуть передбачатися перевезення продукції, що відповідає умовам двохетапної транспортної задачі.

Приклад. Виробниче об'єднання складається з трьох філіалів: A_1, A_2, A_3, які виготовляють однорідну продукцію в обсягах відповідно 1000, 1500 та 1200 одиниць на місяць. Ця продукція відправляється на два склади D_1 і D_2 місткістю відповідно 2500 та 1200 од., а потім — до п'яти споживачів B_1, B_2, …, B_5, попит яких становить відповідно 900, 700, 1000, 500 і 600 од. Вартості перевезень одиниці продукції (в умовних одиницях) від виробників на склади, а потім – зі складів до споживачів наведені в таблицях 7.15 і 7.16.

Таблиця 7.15

Виробник	Вартість перевезення 1000 т бензину від виробника на склад, ум. од.	
	D_1	D_2
A_1	2	8
A_2	3	5
A_3	1	4

Таблиця 7.16

Склад	Вартість перевезення 1000 т бензину до споживачів, ум. од.				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
D_1	1	3	8	5	4
D_2	2	4	5	3	1

Крім того, за індивідуальними контрактами можливі також безпосередні поставки продукції з першого філіалу до другого споживача, а також з третього філіалу – до четвертого споживача. Вартість транспортування одиниці продукції та транзитним маршрутом A_1B_2 дорівнює 3 ум. од., а за маршрутом A_3B_4 – 4 ум. од. Перевезення продукції зі складу на склад недопустимі.

Сформулювати поставлену задачу як транспортну з проміжними пунктами (двохетапну) та визначити її оптимальний план.

Розв'язання. У поставленій задачі кожний склад можна подати як вихідний пункт відправлення продукції і як пункт призначення. Тому в транспортній таблиці вони гратимуть роль і постачальника продукції, і її споживача.

Перевезення продукції безпосередньо від філіалів до споживачів (крім випадків, визначених в умові задачі), а також зі складу на склад блокується введенням у відповідні клітини досить великих вартостей перевезення одиниці продукції – M.

Побудовану з урахуванням цього транспортну таблицю двохетапної задачі наведено нижче (табл. 7.16).

Таблиця 7.16

A_i, D_k	D_K, B_J							u_i
	$d_1 =$ 2500	$d_2 =$ 1200	$b_1 =$ 900	$b_2 =$ 700	$b_3 =$ 1000	$b_4 =$ 500	$b_5 =$ 600	
$a_1 =$ 1000	2 − 1000	8	M	3 + 0	*M*	*M*	*M*	*u1 = 0*
a2 = 1500	3 300	5 1200	*M*	*M*	*M*	*M*	*M*	*u2 = 1*
a3 = 1200	1 1200	4	*M*	*M*	*M*	4 1	M	*u3 = –1*
d1 = 2500	0 2 +	M	1 900	3 700 −	8 900	5 1	4	*u4 = 0*
d2 = 1200	M	0 1	2	4	5 100	3 500	1 600	*u5 = –3*
v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 4$	$v_3 = 1$	$v_4 = 3$	$v_5 = 8$	$v_6 = 6$	$v_7 = 4$	

В клітинках D_1D_1 і D_2D_2 розміщується нульова вартість перевезення продукції. Це допускає неповне використання ємностей сховищ у зв'язку з можливим транзитним транспортуванням продукції.

Ця транспортна задача є збалансованою, оскільки:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 1000 + 1500 + 1200 = 3700 \text{ од.},$$

а також
$$\sum_{j=1}^{5} b_j = 900 + 700 + 1000 + 500 + 600 = 3700 \text{ од.},$$

тому немає потреби вводити в транспорту таблицю фіктивного постачальника або споживача.

Перший опорний план транспортної задачі побудовано методом мінімальної вартості. Розрахуємо загальну вартість перевезень, що відповідає цьому плану:

$$Z_1 = 2 \cdot 1000 + 3 \cdot 300 + 5 \cdot 1200 + 1 \cdot 1200 + 1 \cdot 900 + 3 \cdot 700 +$$
$$+ 8 \cdot 900 + 5 \cdot 100 + 3 \cdot 500 + 1 \cdot 600 = 22\,900 \text{ (ум. од.)}.$$

Цей опорний план задачі неоптимальний. Перехід від нього до другого плану виконуємо, заповнюючи порожню клітинку D_1D_1 згідно з побудованим циклом (табл. 7.17).

Таблиця 7.17

A_i, D_k	D_k, B_j							u_i
	$d_1 =$ 2500	$d_2 =$ 1200	$b_1 =$ 900	$b_2 =$ 700	$b_3 =$ 1000	$b_4 =$ 500	$b_5 =$ 600	
$a_1 = 1000$	2 300	8	M	3 700	M	M	M	$u_1 = 0$
$a_2 = 1500$	3 300	5 1200	M	M	M	M	M	$u_2 = 1$
$a_3 = 1200$	1 1200	4	M	M	M	4 1	M	$u_3 = -1$
$d_1 = 2500$	0 700	M	1 900	3	8 900	5 1	4	$u_4 = 0$
$d_2 = 1200$	M	0	2	4	5 100	3 500	1 600	$u_5 = -3$
v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 4$	$v_3 = 1$	$v_4 = 3$	$v_5 = 8$	$v_6 = 6$	$v_7 = 4$	

Визначимо вартість перевезень згідно з другим опорним планом:

$$Z_2 = 2 \cdot 300 + 3 \cdot 700 + 3 \cdot 300 + 5 \cdot 1200 + 1 \cdot 1200 +$$
$$+ 1 \cdot 900 + 8 \cdot 900 + 5 \cdot 100 + 3 \cdot 500 + 1 \cdot 600 = 21\,500 \text{ (ум. од.)}.$$

Таблиця, що відповідає третьому опорному плану задачі, має такий вигляд:

Таблиця 7.18

A_i, D_k	D_k, B_j							u_i
	d_1 = 2500	d_2 = 1200	b_1 = 900	b_2 = 700	b_3 = 1000	b_4 = 500	b_5 = 600	
a_1 = 1000	2 300	8	M	3 700	M	M	M	$u_1 = 0$
a_2 = 1500	3 300	5 1200	M	M	M	M	M	$u_2 = 1$
a_3 = 1200	1 700	4	M	M	M	4 500	M	$u_3 = -1$
d_1 = 2500	0 1200	M	1 900	3	8 400	5	4	$u_4 = 0$
d_2 = 1200	M	0	2	4	5 600	3	1 600	$u_5 = -3$
v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 4$	$v_3 = 1$	$v_4 = 3$	$v_5 = 8$	$v_6 = 6$	$v_7 = 4$	

В таблиці 7.18 маємо оптимальний план транспортної задачі:

$$Z_{\min} = 2 \cdot 300 + 3 \cdot 700 + 3 \cdot 300 + 5 \cdot 1200 + 1 \cdot 700 + 4 \cdot 500 +$$
$$+ 1 \cdot 900 + 8 \cdot 400 + 5 \cdot 600 + 1 \cdot 600 = 20\,000 \text{ (ум. од.)}.$$

Для більшої наочності оптимальний план перевезень продукції двохетапної транспортної задачі подамо у вигляді схеми зображеної на рис. 7.1. На схемі показано, що на перший склад надходить лише 300 + 300 + 700 = 1300 од. продукції, тобто його місткість використовується не повністю (D_1D_1 = 1200 од.). Це зумовлено прямими поставками продукції за маршрутами A_1B_2 у обсязі 700 од. і A_3B_4 – у обсязі 500 од.

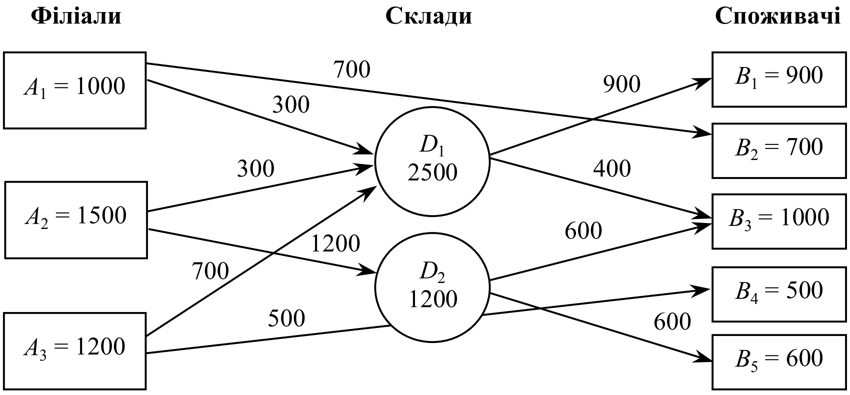


Рис. 7.1. Оптимальний план перевезень продукції

Розглянута транспортна задача має ще один альтернативний оптимальний план, який відрізняється від першого лише перевезеннями продукції зі складів до третього та п'ятого споживачів.

Крім розглянутої у транспортних задачах із проміжними пунктами можуть зустрічатися і такі ситуації:

1. Незбалансованість транспортної задачі ($\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$). У цьому разі необхідно ввести або фіктивного постачальника, або фіктивного споживача, звівши у такий спосіб задачу до закритого типу.

2. Місткість проміжних пунктів не дорівнює загальному обсягу продукції постачальників: а) коли $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{k} d_j$ (у цьому разі потрібно або ввести фіктивний проміжний пункт, і обсяг продукції, що «перевозитиметься» до нього, має дорівнювати невивезеній частині продукції відповідного постачальника, або дозволити транзитні перевезення за обсягом не менш як $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{k} d_j$ (од.)); б) коли $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{k} d_j$ (у цьому разі немає потреби вводити фіктивного постачальника і, зрозуміло, що місткість проміжних пунктів повністю не використовуватиметься).

3. Місткість проміжних пунктів не відповідає загальній потребі спожи-

вачів: а) $\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{k} d_j$ (у цьому разі потрібно або ввести фіктивний проміжний пункт, і обсяг продукції, що «перевозитиметься» від нього до споживача B_j, має означати незадоволений попит відповідного споживача, або дозволити пряме перевезення продукції від постачальників до споживачів за обсягом не менш як $\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{k} d_i$ (од.)); б) $\sum_{j=1}^{n} b_j < \sum_{i=1}^{k} d_i$.

7.5. Транспортна задача за критерієм часу

За деяких умов, наприклад, при перевезенні продукції, що швидко псується; матеріалів для аварійних та рятівних робіт тощо вартість перевезень має другорядне значення, а на перше місце виходить завдання мінімізації того часу, протягом якого здійснюються всі перевезення. Так виникає транспортна задача за критерієм часу.

Нехай задано m пунктів постачання A_1, A_2,…, A_m з відповідними запасами $a_1, a_2, ..., a_m$ одиниць продукції та n споживачів $B_1, B_2, ..., B_n$, потреби яких становлять відповідно $b_1, b_2, ..., b_n$, причому $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Позначимо через x_{ij} — обсяг продукції, що перевозиться від i-го постачальника j-му споживачеві.

Задано також витрати часу t_{ij} на здійснення перевезень від кожного постачальника A_i до кожного споживача B_j, і допускається, що вони не залежать від обсягів перевезень x_{ij}.

Необхідно знайти оптимальний план перевезень $X^* = (x_{ij})$, що задовольняє умови:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,m}; \qquad (7.20)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1,n}. \qquad (7.21)$$

Крім того, час T, який витрачатиметься на всі перевезення, був би мінімальним.

Так як всі перевезення закінчуються в той момент, коли закінчується найдовше з них, то *T* є максимальною величиною з усіх можливих значень t_{ij}, що відповідають ненульовим перевезенням ($x_{ij} > 0$): $T = \max\limits_{x_{ij}>0} t_{ij}$.

Отже, критерієм оптимальності плану є мінімальна тривалість здійснення всіх перевезень, що формально записують так:

$$\min T = \max_{x_{ij}>0} t_{ij}. \qquad (7.22)$$

Зауважимо, що ця задача не є задачею лінійного програмування, оскільки її цільова функція (7.22) не є лінійною функцією від змінних x_{ij}. Однак для розв’язування транспортної задачі за критерієм часу можна застосовувати ті самі методи розв’язання, що були розглянуті для транспортної задачі лінійного програмування.

Розглянемо алгоритм розв’язання сформульованої задачі, що ґрунтується на послідовному розв’язуванні ряду допоміжних задач, розглянутих в угорському методі.

1. Знаходять мінімальний елемент матриці тривалостей перевезень *T*. Позначимо мінімальний елемент, знайдений на першому кроці, через t_1. Клітини транспортної таблиці, які відповідають мінімальному елементу, тобто де $t_{ij} = t_1$, вважаються відкритими для перевезень, тоді як усі інші, де $t_{ij} > t_1$, вважаються для них забороненими.

2. Розв’язують додаткову задачу з визначеною множиною заборонених для перевезень клітин Ω_1. Якщо після цього кроку задовольняються умови задачі (7.20), (7.21), то оптимальний план знайдено і $T = t_1$, а якщо ні, то переходять до третього кроку.

3. Аналогічно першому кроку знову знаходять мінімальний елемент серед тих елементів t_{ij} матриці тривалостей перевезень *T*, які відповідають клітинам, забороненим для перевезень. Нехай ним буде елемент величиною t_2.

Тоді всі ті клітини, для яких $t_{ij}=t_2$, приєднують до клітин, відкритих для перевезень.

4. Аналогічно другому кроку розв'язують нову допоміжну задачу з іншою множиною клітин, заборонених для перевезень $\Omega_2 (\Omega_1 \subset \Omega_2)$ і перевіряють, чи виконуються умови (7.20), (7.21). Якщо вони задовольняються, то знайдений план оптимальний і $T = t_2$. Якщо ж ні, то дії, аналогічні до описаних, повторюють, поки не буде знайдено оптимальний план.

Алгоритм скінченний, оскільки за умови балансу $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ таблиця перевезень без заборонених клітин завжди може бути заповнена, а алгоритм забезпечує в разі потреби звільнення всіх клітин від заборони на перевезення.

Приклад. Умови транспортної задачі задано таблицею (табл. 7.19):

Таблиця 7.19

A_i	B_j			
	$b_1 = 8$	$b_2 = 12$	$b_3 = 16$	$b_4 = 14$
$a_1 = 10$	1	3	4	5
$a_2 = 11$	2	5	1	3
$a_3 = 20$	3	2	8	4
$a_4 = 9$	1	4	3	2

1. Знаходимо мінімальний елемент з t_{ij}. Це 1, позначимо його через $t_1 = 1$.

2. Розв'язуємо допоміжну задачу, де забороненими для перевезень є всі клітини, для яких $t_{ij} > t_1$ (у табл. 7.20 сірим кольором виділені заборонені клітини).

Таблиця 7.20

A_i	B_j			
	$b_1 = 8$	$b_2 = 12$	$b_3 = 16$	$b_4 = 14$
$a_1 = 10$	1 8	3	4	5
$a_2 = 11$	2	5	1 16	3
$a_3 = 20$	3	2	8	4
$a_4 = 9$	1 —	4	3	2

Задача розв’язана, проте план не оптимальный.

3. Знаходимо мінімальний елемент серед клітин, що є забороненими для перевезень. Наступний мінімальний елемент дорівнює двом. Отже, $t_2 = 2$.

4. Приєднуємо до відкритих для перевезень клітин ті, для яких $t_{ij} = 2$, і знову розв’язуємо допоміжну задачу.

Таблиця 7.21

A_i	B_j			
	$b_1 = 8$	$b_2 = 12$	$b_3 = 16$	$b_4 = 14$
$a_1 = 10$	1 8	3	4	5
$a_2 = 11$	2	5	1 11	3
$a_3 = 20$	3	2 12	8	4
$a_4 = 9$	1	4	3	2 9

Отриманий розв’язок (табл. 7.21) також не оптимальний.

5. Вибираємо наступний мінімальний елемент: $t_3 = 3$.

6. Розв’язуємо наступну допоміжну задачу:

Таблиця 7.22

A_i	B_j			
	$b_1 = 8$	$b_2 = 12$	$b_3 = 16$	$b_4 = 14$
$a_1 = 10$	1 8	3 2	4	5
$a_2 = 11$	2	5	1 11	3
$a_3 = 20$	3	2 10	8	4
$a_4 = 9$	1	4	3	2 9

Це також не дає оптимального розв'язку (табл. 7.22).

7. Вибираємо мінімальний елемент $t_4 = 4$.

8. Розв'язуємо задачу:

Таблиця 7.23

A_i	B_j			
	$b_1 = 8$	$b_2 = 12$	$b_3 = 16$	$b_4 = 14$
$a_1 = 10$	1 8	3 2	4	5
$a_2 = 11$	2	5	1 11	3
$a_3 = 20$	3	2 10	8	4 10
$a_4 = 9$	1	4	3 5	2 4

Умови оптимальності в табл. 7.23 виконуються, отже, цей план оптимальний. Звідси $\min T = 4$.

7.7. Сітьова транспортна задача. Основи сіткового планування та управління.

У ряді практичних ситуацій для наочності зручно використовувати схеми, що складаються з об'єктів, які називаються вузлами (вершинами, англ. - *node*) і позначаються кружками, і лініями, які називаються дугами (гілками, ребрами, англ.- *arc*), що з'єднують визначені пари вузлів, указуючи на зв'язок між ними (вигляд лінії – пряма чи непряма – не має значення). Подібна схема використовується для наочного представлення класичної транспортної задачі з вузлами-постачальниками і вузлами-споживачами, де стрілки між ними визначають маршрути перевезень.

Схеми, що складаються з вузлів, зв'язаних між собою дугами, називаються графами.

У математиці граф – це сукупність вузлів і дуг, яка у наочній формі зображує об'єкт дослідження.

Інтерес до теорії графів і методам рішення відповідних задач різко зріс у зв'язку з постановкою складних технічних, логічних, управлінських і наукових задач, серед них задачі дослідження операцій, де у вигляді графа відображаються певні організаційні структури. Вузлами графа можуть бути люди, виробничі операції, бази чи підприємства, військові з'єднання, засоби технічного й іншого забезпечення, а дуги відображають відповідну взаємодію між ними.

Граф G=(N,A) задається сукупністю N вузлів (позначених, наприклад, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, усього їх n) і сукупністю A дуг у виді упорядкованих пар (x_i, x_j), усього їх m. Граф може бути орієнтованим, якщо дуги мають напрямок, неорієнтованим чи змішаним. Наявність дуги на графі свідчить лише про зв'язок між вузлами.

Прикладами об'єктів, представлених у виді графів, можуть служити транспортні (гідравлічні, продуктові, енергетичні, теплові) мережі, структурні формули молекул, плани приміщень, географічні карти, схеми взаємодії людей (родинні зв'язки, сімейні відносини) чи устаткування і т.п.

Орієнтований граф називають сіткою (*network*), де вказується:

- зовнішній вузол-джерело, що має тільки вихідні дуги (позначається буквою s - джерело)
- зовнішній вузол-стік, що має тільки вхідні дуги (позначається буквою t– кінцевий пункт, стік)
- всі інші вузли – внутрішні (проміжні, транзитні), у яких є і вхідні, і вихідні дуги.

На відміну від графа (де достатньо використовувати 0 чи 1 для наявності і позначення дуг), у сітці з кожною дугою зіставляється одне чи кілька чисел, що грають роль вагових коефіцієнтів (параметрів). Наприклад, параметрами дуги можуть бути: пропускна здатність каналу, відстань між парою вузлів, вартість перевезення по маршруту, імовірність проходження сигналу по ланцюгу, кількість необхідних ресурсів для виконання операції тощо. Тоді позначення c(4,9) = 67 може означати, наприклад, що вартість проїзду від 4-го до 9-го пункту складає 67 од., а позначення x (Вінниця, Одеса) = 132 вказує на об'єм перевезення 132 од. між зазначеними містами.

У практичних задачах дослідження операцій моделлю досліджуваної ситуації найчастіше є саме сітка (зважений граф). Оскільки задачі на графах відносяться до оптимізаційних задач, вони складають самостійний і дуже розповсюджений клас сітьових задач оптимізації.

Дуга зі стрілкою визначає універсальне поняття – потік (*flow*), що тече з початкового вузла дуги в кінцевий. Потоками у практичних задачах виступають рідини, вантажі, сигнали зв'язку, темпи виконання операцій із залученням ресурсів, енергія, газ, пасажири, транспортні засоби тощо.

У вузлі-джерелі потік створюється, у вузлі-стоці – споживається, а в проміжних (внутрішніх) вузлах потік або зберігається (аналогічно закону Ломоносова про збереження матерії і руху, тобто, скільки у вузол втекло, стільки і витекло), чи ж цілком чи частково поглинається (якщо є на це потреба, умови і можливість).

Для мережних задач оптимізації фундаментальним є принцип збереження потоку в будь-якому вузлі (економісти назвали б це балансом), а саме, сума потоків на виході вузла мінус сума потоків на його вході дорівнює: загальному потоку v для джерела; -v – для стоку; 0 – для проміжних вузлів. Це правило діє, якщо весь потік витікає з одного джерела і втікає в один стік, запаси чи попит проміжних вузлів = 0. Для сітьової транспортної задачі права частина умови для проміжних вузлів є його запас/попит. Потік у кожному вузлі сітки y – це функція, що задовольняє лінійним рівнянням і нерівностям:

$$\sum_{y \in \text{Вхід}} f(x,y) - \sum_{y \in \text{Вихід}} f(x,y) = \begin{cases} v, x = s \\ 0, x \neq s, t \\ -v, x = t \end{cases} \quad (7.23)$$

$$f(x,y) \leq c(x,y) \text{ для всіх } (x,y) \in A \quad (7.24)$$

де кожній дузі *(x,y)* сітки поставлено у відповідність додатнє число *c(x,y)*, яке є додатковим ваговим коефіцієнтом, наприклад, пропускною здатністю дуги (це – максимальна кількість продукту, що може бути доставлена з вузла *x* у вузол *y* за одиницю часу), відстанню чи вартістю переїзду; *s* – джерело; *t* – стік; *v* – величина потоку з *s* у *t* (для джерела *v* - це пропозиція, для стоку - попит); *Вхід* і *Вихід* – набори дуг, які входять чи виходять з вузла *y*.

Величина потоку f(x,y) по дузі (x,y) не перевищує заданої пропускної здатності цієї дуги c(x,y), для якої:

- *f(x,y)* – потоки по дугах, кінці яких збігаються з *y* (підмножина *Вхід*);
- *f(y,x)* – потоки по дугах, початки яких збігаються з *y* (підмножина *Вихід*)
- *c(x,y)* – параметр дуги (довжина, пропускна здатність).

Ліва сума показує, скільки у вузол *y* втекло, права сума – скільки витекло, їхня різниця різна для джерела, стоку і проміжних вузлів.

Інакше цю систему рівнянь для кожного вузла можна записати балансовим співвідношенням у вигляді:

Всього витекло – Всього втекло = Що залишилося?

Розглянемо розв’язування транспортної задачі на мережі методом потенціалів. Зобразимо задачу у вигляді мережі (рис. 7.2.), де на кожній дузі цифрами у кружечках позначені вартості перевезень одиниці продукції; для спрощення вважатимемо ці вартості однаковими в обох напрямках ребра, а пропускні здатності ребер необмеженими зверху. Зауважимо, що $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 0$.

Пункти відправлення і запаси в них позначимо відповідними цифрами (що дорівнюють запасам) із знаком «плюс», а пункти доставки — цифрами, що дорівнюють потребам, із знаком «мінус» (стоять у дужках).

На першому етапі складаємо початковий план перевезень: напрям вантажопотоків показуємо стрілками, а кількість вантажів — цифрою над (під) відповідною стрілкою.

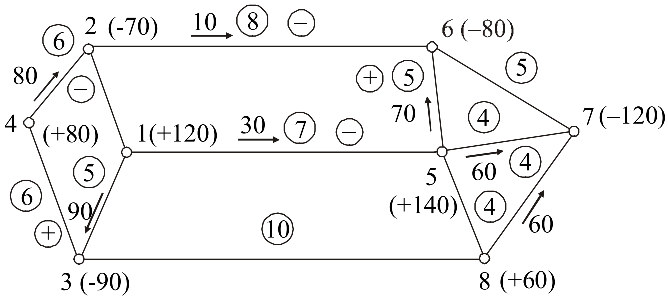


Рис. 7.2

Як видно з рис. 7.2, початковий план утворюють змінні:

$$x_{13} = 90, x_{15} = 30, x_{42} = 80, x_{26} = 10, x_{56} = 70,$$

$$x_{87} = 60, x_{57} = 60, x_{12} = x_{34} = x_{38} = x_{76} = x_{58} = 0.$$

Якщо сіть містить m вершин, то система обмежень складається з m рівнянь, а її ранг має дорівнювати $m-1$. У нашому прикладі план містить рівно $m-1=8-1=7$ відмінних від нуля базисних змінних, отже, він невироджений.

Для того, щоб деяка частина графа відповідала базисним змінним транспортної задачі, необхідно і достатньо, щоб вона була деревом.

У нашому прикладі початковий план не утворює контурів, тобто відповідає множині базисних змінних, отже, є опорним планом задачі.

На другому етапі для кожної вершини визначаємо потенціал. Перший потенціал вибираємо довільно, найчастіше з певних міркувань зручності в дальших обчисленнях пов’язуємо його з довільною вершиною, наприклад, першою. Потенціали інших вершин визначаємо, виходячи з першого потенціалу, а саме: потенціали вершин, з’єднаних дугами з першою, прирівнюємо до різниці першого потенціалу і вартості перевезення від першої вершини до заданої, якщо вантаж іде в цьому напрямі, і, відповідно, сумі потенціалу першої вершини і вартості перевезення з сусідньої вершини в першу, якщо саме в цьому напрямі перевозиться вантаж. Отже, потенціали всіх вершин розглядуваної мережі визначаться такими цифрами:

$$u_1^{(0)} = 10;\ u_5^{(0)} = 3;$$

$$u_2^{(0)} = 6;\ u_6^{(0)} = -2;$$

$$u_3^{(0)} = 5;\ u_7^{(0)} = -1;$$

$$u_4^{(0)} = 12;\ u_8^{(0)} = 3.$$

Третій етап полягає в перевірці плану на оптимальність, причому використовується звичайна ознака оптимальності плану транспортної задачі, яка формулюється в термінах і позначеннях транспортної задачі на мережі. Для ребер мережі, вільних від перевезень, тобто для $x_{ij} = 0$, невід'ємна різниця потенціалів вершин, які їх обмежують (стоять на їх кінцях), має бути меншою від відповідної вартості перевезення або дорівнювати їй. Складаємо відповідні співвідношення:

$$u_4^{(0)} - u_3^{(0)} = 12 - 5 = 7 > 6;$$

$$u_1^{(0)} - u_2^{(0)} = 10 - 6 = 4 < 5;$$

$$u_3^{(0)} - u_8^{(0)} = 5 - 3 = 2 < 10;$$

$$u_5^{(0)} - u_8^{(0)} = 3 - 3 = 0 < 4;$$

$$u_7^{(0)} - u_6^{(0)} = -1 - (-2) = 1 < 3.$$

Для базисних ребер відповідні різниці точно дорівнюють вартостям перевезень, що є однією з умов оптимальності плану транспортної задачі. Отже, умова оптимальності порушена лише один раз на ребрі (4; 3). Якщо таких порушень більше ніж одне, то вибираємо ребро з найбільшим порушенням. Утворимо цикл з базисних ребер і небазисного ребра (4; 3), що проходить через вершини (4, 3, 1, 5, 6, 2, 4). Напрям обходу збігається з напрямом потоку, який планується вести по ланці (4; 3) — від вершини 4 до вершини 3, оскільки маємо нерівність $u_4^{(0)} > u_3^{(0)}$. Отже, обходимо цикл проти руху стрілки годинника. Обмеження (5.42) не будуть порушені, якщо ми, вибравши в цьому циклі найменший зустрічний потік у ланці (2; 6), відніматимемо його величину від зустрічних потоків у ланках циклу і додаватимемо до потоків, напрями яких збігаються з напрямом обходу. Тоді ланка (2; 6) стає вільною від потоку, а ланка (4; 3) — базисною (рис 7.4).

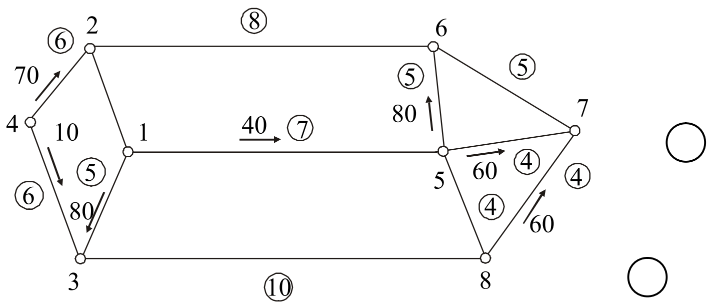


Рис. 7.3.

Перевіримо план на оптимальність. Для цього визначимо нову систему потенціалів, виправивши попередню:

$$u_1^{(1)} = u_1^{(0)} = 10;\ u_5^{(1)} = u_5^{(0)} = 3;$$

$$u_2^{(1)} = 11 - 6 = 5;\ u_6^{(1)} = u_6^{(0)} = -2;$$

$$u_3^{(1)} = 10 - 5 = 5 = u_3^{(0)};\ u_7^{(1)} = u_1^{(0)} = -1;$$

$$u_4^{(1)} = 5 + 6 = 11;\ u_8^{(1)} = u_8^{(0)} = 3\ .$$

Перевірку слід зробити лише для тих вільних ребер, для яких хоча б в одній з вершин змінилося значення потенціалу, а саме – для (1, 2), (2, 6):

$$u_1^{(1)} - u_2^{(1)} = 10 - 5 = 5 = 5\ ;$$

$$u_2^{(1)} - u_6^{(1)} = 5 - (-2) = 7 < 8\ .$$

Отже, всі умови оптимальності задовольняються і оптимальний план знайдено:

$$x_{12}^* = x_{26}^* = x_{38}^* = x_{67}^* = x_{58}^* = 0;\quad x_{13}^* = 80;\ x_{43}^* = 10;$$

$$x_{42}^* = 70,\ x_{15}^* = 40,\ x_{56}^* = 80,\ x_{57}^* = 60,\ x_{87}^* = 60\ .$$

Зауважимо, що при розв'язуванні наведеної сітьової задачі методом потенціалів можуть траплятися випадки виродження. Ознакою виродження є план, що складається з двох або більше окремих дерев базисних ребер, не з'єднаних між собою. Для усунення цього треба ввести в базис вільну ланку, яка з'єднувала б означені дерева базисних ланок між собою.

Отже, методом потенціалів розв'язано сітьову транспортну задачу з проміжними пунктами і заборонами на перевезення між деякими пунктами, тобто відсутністю в мережі відповідних ребер (шляхів). Ми вважали, що пропускні здатності ребер необмежені зверху, тому, зазначений алгоритм придатний лише в тому разі, коли знайдені за оптимальним планом перевезення не перевищують пропускних здатностей реальних ланок транспортної мережі, але вони завжди обмежені зверху.

7.8. Використання ПЕОМ для розв'язку транспортної задачі

Використання ПЕОМ для розв'язку транспортної задачі розглянемо на прикладі економіко-математичної моделі оптимального планування складу машинно-тракторного парку (МТП) та його використання. Постановка задачі полягає в тому, що потрібно визначити оптимальний склад тракторів та сільськогосподарських машин, який забезпечував би виконання запланованих об'ємів всіх видів механізованих робіт у встановлені агротехнічні строки при мінімальних витратах на утримання та експлуатацію даного МТП.

Приклад. У господарстві весняно-польові роботи проводяться в середньому з 25 березня до 28 квітня. В цей період потрібно виконувати роботи в певному обсязі. Для виконання заданого обсягу робіт господарство має машинно-тракторний парк, потужність якого в залежності від кількості тракторів відповідно до їх марок надана в таблиці 14 (ум. ет. га). Собівартість 1 ум. ет. га (грн.) (табл. 7.24). Побудувати економіко-метематичну модель та розв'язати її методом потенціалів.

Заплановані обсяги робіт: закриття вологи- 4400; предпосівна культивація – 4400; сівба зернових – 2800; сівба пропасних – 1000; закоткування –

2100 умовних еталонних гектари. Потужність машинно-тракторного парку: Т-150 – 3800; ДТ-75 – 3500; Т-40 – 900; МТЗ-82 - 6500 умовних еталонних гектари.

Таблиця 7.24

Собівартість 1 умовного еталонного гектара (грн.)

Види робіт	Т-150	ДТ-75	Т-38	МТЗ-82
Закриття вологи	3,3	3,2	-	4,4
Передпосівна культивація	2,6	2,8	2,4	-
Сівба зернових	7,2	5,6	4,4	5,0
Сівба пропасних	6,0	5,6	-	4,6
Закоткування	-	1,5	1,6	2,0

Складемо економіко-математичну модель задачі. Позначимо x_{ij} – об'єм виконання і роботи j маркою трактора, умовні га.

Система обмежень задачі:

I. По виконання плану робіт, ум. га

1. закриття вологи

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 4400$

2. передпосівна культивація

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 4400$

3. сівба зернових

$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 2800$

4. сівба пропашних

$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1000$

5. закоткування

$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} = 2100$

II. По потужності тракторів, ум. га

1. Т-150

$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 3800$

2. ДТ-75

$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 3500$

3. Т-38

$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 900$

4. МТЗ-82

$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 6500$

Цільова функція – мінімум витрат на виконання робіт:

$Z_{min} = 3{,}3x_{11} + 3{,}2x_{12} + 0x_{13} + 4{,}4x_{14} + 2{,}6x_{21} + 2{,}8x_{22} + 2{,}4x_{23} + 0x_{24} + 7{,}2x_{31} + 5{,}6x_{32} + 4{,}4x_{33} + 5{,}0x_{34} + 6{,}0x_{41} + 5{,}6x_{42} + 0x_{43} + 4{,}6x_{44} + 0x_{51} + 1{,}5x_{52} + 1{,}6x_{53} + 2{,}0x_{54}$.

Перевіримо тип задачі – закритий чи відкритий:

4400 + 4400 + 2800 + 1000 + 2100 = 14700

3800 + 3500 + 900 + 6500 = 14700

Розв’язання задачі в електронних таблицях Excel при мінімізації витрат на перевезення. При плануванні значних обсягів перевезень вантажів завжди з’являється задача оптимальної (за певним критерієм) оцінки їх організації. Розглянемо транспортну задачу за критерієм вартості перевезення. Відомі наявності вантажу у постачальників і потреби споживачів. Розташуємо вихідні дані в електронних таблицях, як показано на рис. 7.4.

постачальник	вантаж		споживач	вантаж
1 Закриття вологи	4400		Т-150	3800
2 Передпосівна культивація	4400		ДТ-75	3500
3. Сівба зернових	2800		Т-40	900
4 Сівба пропасних	1000		МТЗ-82	6500
5. Закоткування	2100		Всього	14700
Всього	14700			

Задано тарифи на перевезення 1 т вантажу (грн./т) від кожного постачальника кожному споживачеві

Види робіт	Т-150	ДТ-75	Т-38	МТЗ-82
Закриття вологи	3,3	3,2	-	4,4
Передпосівна культивація	2,6	2,8	2,4	-
Сівба зернових	7,2	5,6	4,4	5
Сівба пропасних	6	5,6	-	4,6
Закоткування	-	1,5	1,6	2

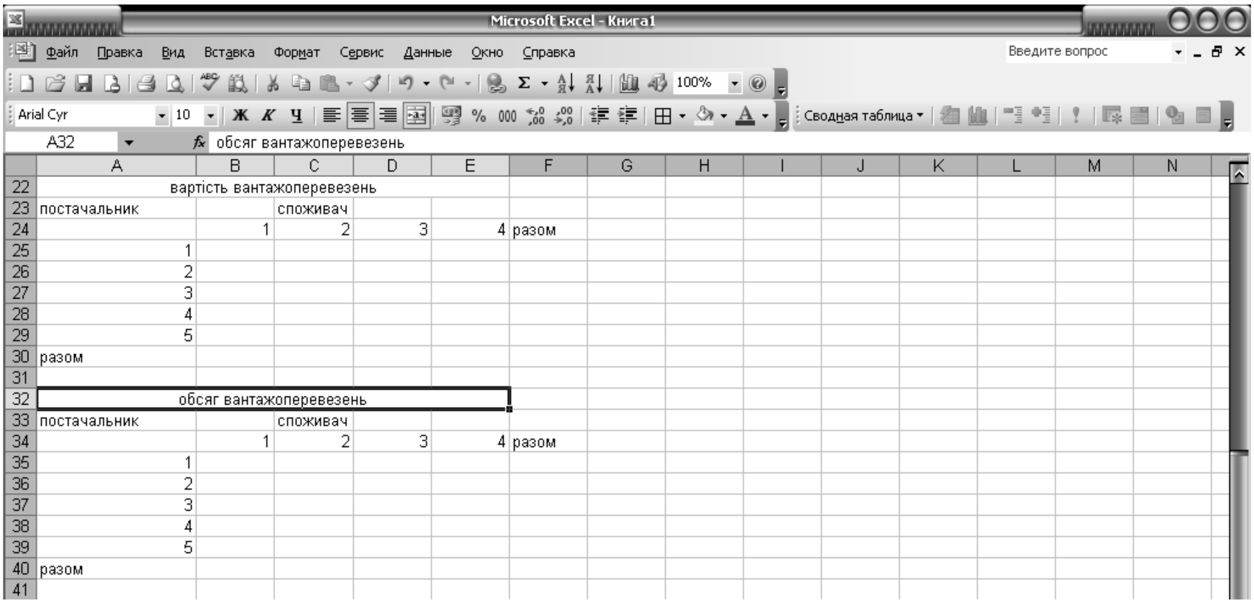
Рис. 7.4. Розташування вихідних даних в електронній таблиці

Для розв’язання задачі необхідно:

- побудувати таблиці для розрахунків, як показано на рис. 7.5;

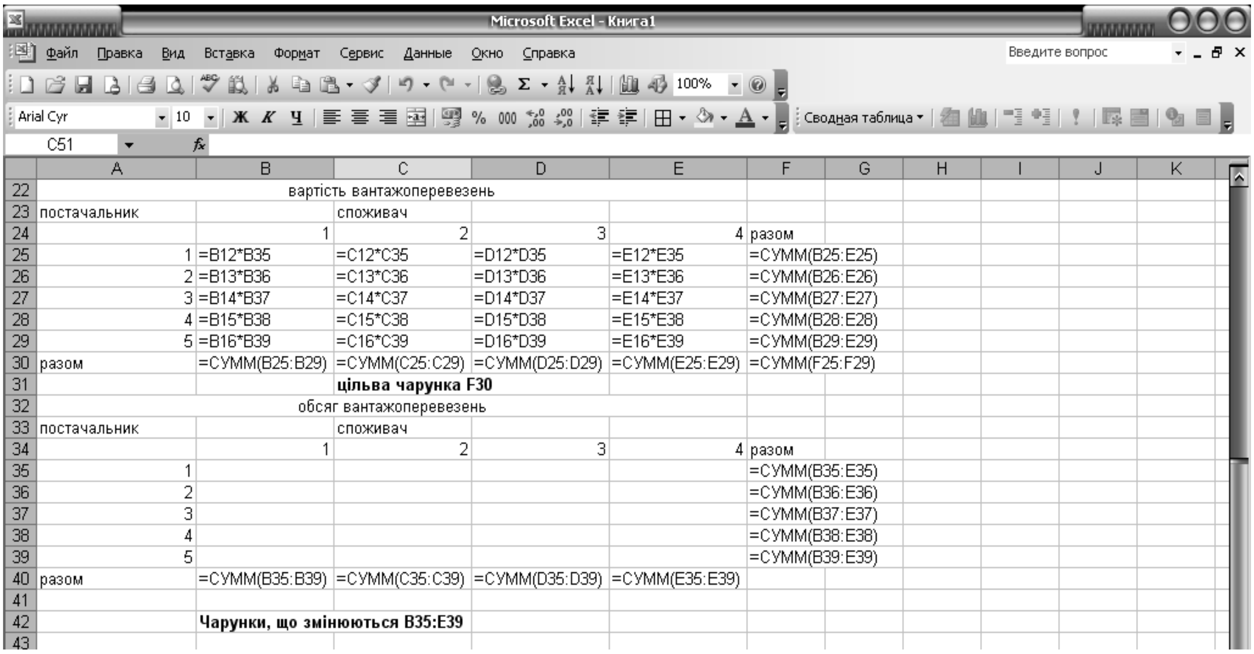
- у чарунку B25 ввести формулу =B12*B35 (вартість перевезення вантажу від першого постачальника до першого споживача) і продублювати цю формулу, як показано на рис. 7.6;

-



	A	B	C	D	E	F
22		вартість вантажоперевезень				
23	постачальник		споживач			
24		1	2	3	4	разом
25	1					
26	2					
27	3					
28	4					
29	5					
30	разом					
31						
32	обсяг вантажоперевезень					
33	постачальник		споживач			
34		1	2	3	4	разом
35	1					
36	2					
37	3					
38	4					
39	5					
40	разом					
41						

Рис. 7.5. Побудова таблиць для розрахунків



	A	B	C	D	E	F
22		вартість вантажоперевезень				
23	постачальник		споживач			
24		1	2	3	4	разом
25	1	=B12*B35	=C12*C35	=D12*D35	=E12*E35	=СУММ(B25:E25)
26	2	=B13*B36	=C13*C36	=D13*D36	=E13*E36	=СУММ(B26:E26)
27	3	=B14*B37	=C14*C37	=D14*D37	=E14*E37	=СУММ(B27:E27)
28	4	=B15*B38	=C15*C38	=D15*D38	=E15*E38	=СУММ(B28:E28)
29	5	=B16*B39	=C16*C39	=D16*D39	=E16*E39	=СУММ(B29:E29)
30	разом	=СУММ(B25:B29)	=СУММ(C25:C29)	=СУММ(D25:D29)	=СУММ(E25:E29)	=СУММ(F25:F29)
31			**цільва чарунка F30**			
32		обсяг вантажоперевезень				
33	постачальник		споживач			
34		1	2	3	4	разом
35	1					=СУММ(B35:E35)
36	2					=СУММ(B36:E36)
37	3					=СУММ(B37:E37)
38	4					=СУММ(B38:E38)
39	5					=СУММ(B39:E39)
40	разом	=СУММ(B35:B39)	=СУММ(C35:C39)	=СУММ(D35:D39)	=СУММ(E35:E39)	
41						
42		**Чарунки, що змінюються B35:E39**				
43						

Рис. 7.6. Введення формул

- загальні витрати, тобто вартість перевезень всього вантажу, обчислити чарунці F30 як загальну суму витрат усіх постачальників (цільова функція повинна мати мінімальне значення);

- вибрати команду **Сервис – Поиск решения**;

- у вікні **Поиск решения** заповнити поля, як показано на рис. 7.7, встановивши обмеження - обсяг вантажу, який перевезений споживачеві, і який повинен дорівнювати його потребам; обсяг вантажу, який перевезений постачальником, і який повинен дорівнювати його можливостям;

- натиснути кнопку **Параметри** та встановити їх значення: модель э лінійною; значення змінних є невід'ємними і натиснути клавішу ОК;

- у вікні **Поиск решения** натиснути кнопку **Выполнить;**

Слід відмітити, що при заповненні таблиць, в чарунках при записуванні формул, після натискування <Enter> будуть записуватися числові значення.

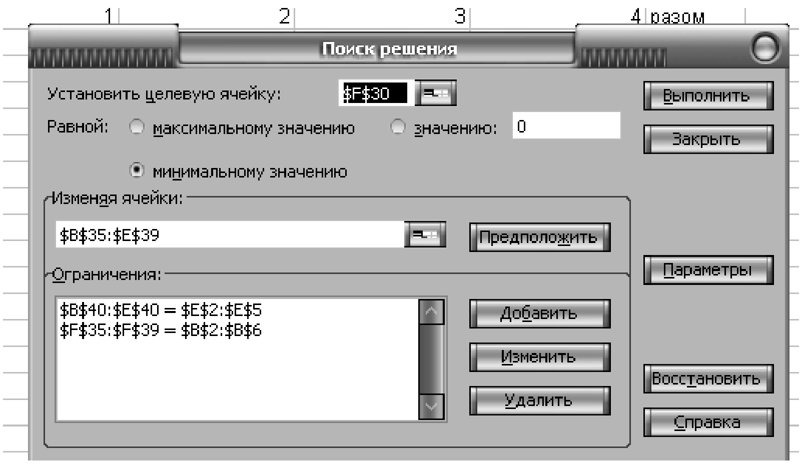
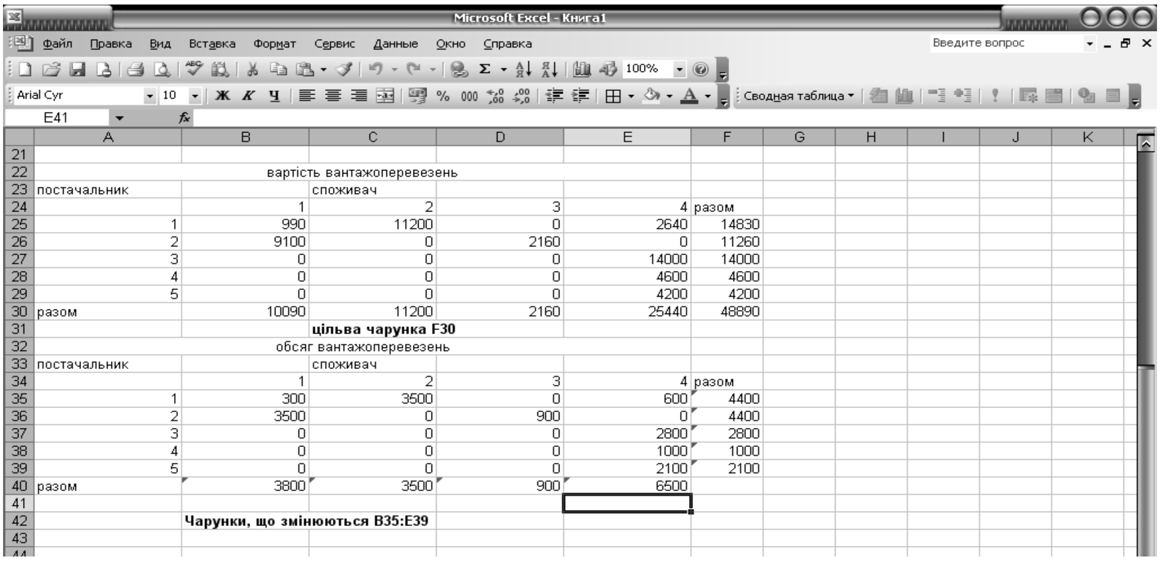


Рис. 7.7. Заповнення вікна "Поиск решений"

План вантажоперевезень, який одержано за допомогою надбудови Excel **Поиск решения** (рис. 7.8), забезпечить мінімальні витрати на виконання робіт в розмірі 48890 грн.



	A	B	C	D	E	F
21						
22		вартість вантажоперевезень				
23	постачальник		споживач			
24		1	2	3	4	разом
25	1	990	11200	0	2640	14830
26	2	9100	0	2160	0	11260
27	3	0	0	0	14000	14000
28	4	0	0	0	4600	4600
29	5	0	0	0	4200	4200
30	разом	10090	11200	2160	25440	48890
31			**цільва чарунка F30**			
32		обсяг вантажоперевезень				
33	постачальник		споживач			
34		1	2	3	4	разом
35	1	300	3500	0	600	4400
36	2	3500	0	900	0	4400
37	3	0	0	0	2800	2800
38	4	0	0	0	1000	1000
39	5	0	0	0	2100	2100
40	разом	3800	3500	900	6500	
41						
42		**Чарунки, що змінюються B35:E39**				
43						

Рис. 7.8. Таблиця, що містить оптимальний розв’язок задачі

7.9. Приклади та завдання для самостійної роботи

Побудувати математичну модель задачі. Визначити її початковий розв’язок. знайти оптимальний розв’язок.

Задача 1.

$$a_i = (8;10;5); \qquad c_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$b_j = (5;5;10);$$

Задача 2.

$$a_i = (8;7;6); \qquad c_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$b_j = (7;10;6);$$

Задача 3.

$$a_i = (15;10;5;20); \qquad c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 5 & 3 & 12 \\ 1 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$b_j = (10;20;15);$$

Задача 4.

$$a_i = (10;20;40);$$

$$b_j = (30;10;60); \qquad c_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

7.10. Контрольні питання

1. Опишіть економічну і математичну постановку класичної транспортної задачі.

2. Чим відрізняється транспортна задача від загальної задачі лінійного програмування?

3. Сформулюйте необхідну і достатню умову існування розв’язку транспортної задачі.

4. Які ви знаєте властивості опорних планів транспортної задачі?

5. Чим відрізняється відкрита транспортна задача від закритої?

6. Як перетворити відкриту транспортну задачу на закриту?

7. Які ви знаєте методи побудови опорного плану?

8. Що означає „виродження” опорного плану? Як його позбутися?

9. Назвіть етапи алгоритму методу потенціалів.

10. Як обчислюють потенціали?

11. Назвіть умови оптимальності транспортної задачі.

РОЗДІЛ 8

ОРГАНІЗАЦІЯ ІНВЕСТИЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ У ПІДПРИЄМНИЦТВІ

8.1. Моделювання прийняття інвестиційних рішень за умов невизначеності

Аналіз та критерії прийняття управлінських рішень в умовах невизначеності розроблена в теорії, однак на практиці ці формалізовані алгоритми використовуються досить рідко. Головна проблема полягає в тому, що неможливо оцінити ймовірності наслідків. основний критерій - максимізація прибутку – тут не спрацьовує, тому слід використовувати інші критерії.

Анализ и принятие управленческих решений в условиях неопределенности. Эта ситуация разработана в теории, однако на практике формализованные алгоритмы анализа применяются достаточно редко. Основная трудность здесь состоит в том , что невозможно оценить вероятности исходов. Основной критерий - максимизация прибыли - здесь не срабатывает, поэтому применяют другие критерии: максимізація мінімального прибутку; мінімізація максимального прибутку; максимізація максимального прибутку.

Розглянемо методи та моделі підтримки прийняття економічних управлінських рішень за умов невизначеності щодо значень некерованих параметрів.

В економічній діяльності завжди мають місце невизначеність та ризик щодо результатів управлінських рішень, особливо щодо майбутнього доходу, витрат або прибутку, які будуть отримані внаслідок ринкової купівлі-продажу ресурсів, продукції та послуг.

Припустимо, що потрібно вибрати найкращу з *m* альтернатив у випадку, коли остаточний результат (цінність) кожної *i*-ї альтернативи ($i = \overline{1,m}$) буде визначатися конкретним станом оточуючого середовища («природи») - j - із деякої скінченої множини можливих станів ($j = \overline{1,n}$). Таким чином, у момент прийняття рішення кожна *i*-та альтернатива характеризується *n*-вимірним вектором:

$$u^{i} = \left(u_{i1,},\ldots,\quad u_{ij},\quad \ldots\quad u_{in}\right),$$

де u_{ij} - цінність цієї альтернативи, якщо природа опиниться у своєму *i*-му стані. Принциповим є те, що в момент прийняття рішення щодо вибору альтернативи конкретний стан, у якому буде знаходитися навколишнє середовище, невідомий, у зв'язку з чим потрібно брати до уваги усю сукупність його можливих станів.

Подібні задачі підрозділяються на два класи. Це, по-перше, задачі прийняття рішень за умов невизначеності, коли немає ніякої інформації про імовірності виникнення кожного з можливих станів природи. По-друге, це задачі прийняття рішень за умов ризику, коли можна дати певну (об'єктивну або суб'єктивну) оцінку імовірнісному розподілу станів природи, тобто коли імовірності виникнення кожного з можливих майбутніх станів оточуючого середовища можна вважати відомими

Теорія прийняття рішень має набір принципів (критеріїв), що можуть бути використані для розв'язування подібних задач. Перед ознайомленням із ними домовимося інформацію про задачу подавати в зручному для дослідження вигляді - за допомогою матриці цінностей альтернатив (табл. 8.1).

Таблиця 8.1.

Загальний вигляд матриці цінностей альтернатив

Номер альтернативи (E_i)	Номер можливого стану природи (F_j)				
	1	...	j	...	n
1	u_{11}	...	uj	...	u_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
i	u_{i1}	...	u_{ij}	...	u_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
m	u_{m1}	...	u_{mj}	...	u_{mn}

Кожний i-й рядок цієї матриці характеризує цінність відповідної i-альтернативи з огляду на множину всіх можливих майбутніх станів оточуючого середовища. З іншого боку, кожний j-й стовпчик матриці цінностей показує цінність усіх альтернатив, якщо природа опиниться саме у своєму j-му стані.

Припустимо, наприклад, що очікуваний квартальний прибуток підприємства за умови продовження ним роботи у традиційному режимі складе 130 тис. грн. - якщо не з'явиться конкурентів, і 90 тис. грн. - якщо конкуренція посилиться, а за умови активізації підприємством рекламної діяльності - 120 тис. грн. без конкурентів і 95 тис. грн. за умов посилення конкуренції. Тоді матрицю цінностей (зараз - матрицю очікуваних прибутків) можна подати за допомогою табл. 8.2.

Таблиця 8.2.

Очікуваний квартальний прибуток підприємства залежно від обраної ним політики рекламної діяльності та рівня конкуренції (тис, грн.)

Альтернативні варіанти політики підприємства	**Можливі стани оточуючого середовища**	
	1. Конкуренція відсутня	**2. Конкуренція посилилася**
1. Продовжувати працювати у традиційному режимі	130	90
2. Посилити рекламну діяльність	120	95

Коли матрицю цінностей альтернатив побудовано, можна починати порівняння альтернатив, з огляду на невизначеність щодо можливих майбутніх станів оточуючого середовища.

Якщо взяти окрему i-ту альтернативу ($i \in \{1,...,m\}$), то в найгіршому для неї випадку її цінність - u_i^0 - буде дорівнювати найменшому з чисел $u_{i1},...,u_{in}$:

$$u_i^0 = \min_j u_{ij}$$

Це – песимістична оцінка i-ї альтернативи. Наприклад, для рішення підприємства посилити рекламну кампанію (його друга альтернатива) песимістична оцінка цього варіанта дій дорівнює 95 тис. грн. очікуваного квартального прибутку, що відповідає випадку, коли конкуренти посилять свою діяльність на ринку.

Навпаки, у найбільш сприятливому для i-ї альтернативи випадку її цінність буде складати розмір u_i^*, який дорівнює найбільшому з чисел $u_{i1},...,u_{in}$:

$$u_i^* = \max_j u_{ij}$$

Це – оптимістична оцінка i–ї альтернативи. Так, якщо підприємство вирішить посилити рекламну кампанію (знову розглядаємо його другу альтернативу), то оптимістична оцінка цього рішення буде дорівнювати 120 тис. грн. очікуваного квартального прибутку; вона досягатиметься за умов, коли рівень діяльності конкурентів на ринку залишиться без змін.

1). Максимінний критерій (критерій Вальда песимістичний). Відповідно до цього критерію рекомендується обирати таку з альтернатив i^*, песимістична оцінка якої є найкращою:

Математична модель, що відповідає критерію Вальда

$$u^* = \max_{i=\overline{1,m}} \min_{j=\overline{1,n}} u_{ij}$$

Такий підхід гарантує, що навіть у найгіршому із станів природи результуюча цінність обраного варіанту дій буде не меншою, аніж $u_{i^*}^0$. За песимістичним критерієм нашому підприємству слід посилити свою рекламну діяльність, оскільки песимістична оцінка першої альтернативи - продовжувати працювати в традиційному режимі - складає: $u_1^0 = \min\{125{,}90\} = 90$, а другої альтернативи - посилити рекламну діяльність-дещо більша: $u_2^0 = \min\{120{,}95\} = 95$.

Правило вибору рішення у відповідності з максимінним критерієм можна інтерпретувати наступним чином:

Матриця рішень доповнюється ще одним стовпчиком з найменших результатів u_{ir}. кожної стрічки. Необхідно вибрати ті варіанти в стрічках, які стоять найбільші значення u_{ir}. цього стовпчика.

Вибрані таким чином варіанти повністю виключають ризик. Це позначає, що ОПР не може прийти до гіршого результату, чим той на який він орієнтується. Це дозволяє вважати ММ-критерій одним з фундаментальних.

Використання ММ-критерію виправдано, якщо ситуація, в якій приймається рішення наступна:

1. Про можливість появлення зовнішніх станів F_j нічого невідомо.
2. Приходиться рахуватися з проявленням різних зовнішніх станів F_j.
3. Рішення реалізується тільки один раз
4. Необхідно виключити будь-який ризик.

Приклад.

Альтернативні варіанти політики підприємства	**Можливі стани оточуючого середовища**		u_{ir}=min u_{ij}(по j)	Max u_{ir} (по i)
	1. Конкуренція відсутня	**2. Конкуренція посилилася**		
1. Продовжувати працювати у традиційному режимі	130	90	90	
2. Посилити рекламну діяльність	120	95	95	95

Висновок – за максимінним критерієм слід посилити рекламну діяльність.

2). Що стосується максимаксного («оптимістичного») критерію, коли буде вибиратися альтернатива з найбільшою оптимістичною оцінкою, то такий принцип практично неможливо захистити від критики, оскільки очікування лише найсприятливіших станів оточуючого середовища часто, як правило, не виправдуються.

Математична модель, що відповідає критерію максимаксному

$$u^* = \max_{i=1,m} \max_{j=1,n} u_{ij}$$

3). Критерій Гурвіца (критерій песимізму-оптимізму). Принцип, що розглядається, являє собою комбінацію позицій крайнього песимізму і крайнього оптимізму. Позначимо через α є [0; 1] число, що характеризує ступінь оптимізму, тобто ступінь очікування найкращого зі станів природи. Рекомендується обирати таку альтернативу, якій відповідає найбільша зважена песимістично-оптимістична оцінка:

Математична модель, що відповідає критерію Гурвіца

$$u^* = \max_{i=1,m}\left((1-\alpha)\min_{j=1,n} u_{ij} + \alpha \max_{j=1,n} u_{ij}\right)$$

Бачимо, що при α=0 принцип Гурвіца перетворюється в песимістичний, а при α=1 - в оптимістичний критерій. Оскільки ОПР, як правило, відмовляється від позицій крайнього песимізму або крайнього оптимізму, то конкретне значення а буде знаходитися десь усередині проміжку [0; 1]. У багатьох випадках значення параметра доцільно брати з проміжку [0.2; 0.7].

Критерій Гурвіца мах $u_{ir}(i)=\{\alpha^*\min u_{ij}(j) +(1-\alpha^*)\max u_{ij}(j)\}$, де α – ваговий коефіцієнт.

Правила вибору формуються наступним чином:

Матриця розв‘язків доповнюється стовпчиком, що містить середні зважені найменшого та найбільшого результатів для кожної стрічки. Обираються тільки ті варіанти , в стрічках яких стоять найбільші елементи e_{ir} для цього стовпчика.

При α=1 критерій Гурвіца перетворюється в ММ критерій, а при α=0 – в критерій "азартного ігрока", тобто ми робимо ставку на те, що "випадає" найвигідніший випадок.

Найчастіше α=0,5.

Критерій Гурвіца використовується коли:

1. Про ймовірності появи станів F_j нічого не відомо,
2. З появою стану F_j необхідно рахуватися,
3. Реалізується тільки мала кількість розв'язків,
4. Допускається деякий ризик

Приклад. Умова та сама. (α=0,4)

Альтернативні варіанти політики підприємства	**Можливі стани оточуючого середовища**		α*min(j)u_{ij}	(1-α)* max(j)u_{ij}	u_{ir}	max u_{ir} (i)
	1. Конкуренція відсутня	**2. Конкуренція посилилася**				
1. Продовжувати працювати у традиційному режимі	130	90	36	78	114	114
2. Посилити рекламну діяльність	120	95	38	72	110	

Висновок – слід продовжувати працювати у традиційному режимі

Особливістю всіх трьох вищенаведених критеріїв є те, що для кожної альтернативи вони враховують або її песимістичну, або оптимістичну, або тільки песимістичну й оптимістичну оцінки. Тобто увага приділяється лише двом оцінкам, у той час коли можливих станів природи і, відповідно, різних за значенням оцінок кожна альтернатива може мати дуже багато. Принципи, що буде наведено далі, враховують усі можливі стани природи.

4) Критерій Севіджа

Формуємо матрицю залишків: $a_{ij} = \max_{i=1,m} u_{ij} - u_{ij}, \quad i = 1,n$

Величину a_{ij} можна трактовати як максимальний додатковий виграш , який досягається, якщо в стані F_j замість варіанту E_i обрати інший, оптимальний для цього зовнішнього стану варіант. Величину a_{ij} можна інтерпретувати і як втрати (штрафи), що виникають в стані F_j при заміні оптимального для нього варіанту E_i на варіант . В останньому випадку u_{ir} є максимально можливі (по всім зовнішнім станам F_j, j=1,n)втрати у випадку вибору варіанту E_i .

Відповідно критерій Севіджа можна визначити так:

Кожен елемент матриці віднімається з найбільшого результату max u_{ij} відповідного стовпчика

Різниці a_{ij} утворюють матрицю залишків. Ця матриця доповнюється стовпчиком найбільших різниць u_{ir}. Обираются ті варіанти, в стрічках яких стоїть найменше для цього стовпчика значеня.

Математична модель, що відповідає критерію Севіджа.

$$u^* = \min_{i-1,m} \max_{j=1,n} a_{ij}$$

Вимоги, що висуваються для ситуації, в який приймається рішення, відповідають з вимогами до ММ критерію.

Приклад: Умова попереднього прикладу.

Складемо таблицю залишків (a_{ij})

Альтернативні варіанти політики підприємства	**Можливі стани оточуючого середовища**		E_{ir}=max uij по J	min e_{ir} по j
	1. Конкуренція відсутня	**2. Конкуренція посилилася**		
1. Продовжувати працювати у традиційному режимі	0	5	5	5
2. Посилити рекламну діяльність	10	0	10	

Рішення – Продовжувати працювати у традиційному режимі

5). Критерій Лапласа.

Коли немає ніяких підстав вважати, що кожний окремий стан природи більш імовірний у порівнянні з іншими, використовують припущення про те, що імовірність виникнення кожного з можливих станів оточуючого середовища однакова. Тоді оцінку середньої цінності кожної альтернативи можна обчислити за формулою звичайного середнього арифметичного всіх її можливих оцінок у різних станах природи:

Математична модель, що відповідає критерію Лапласа

$$u^* = \frac{1}{n} \max_{i=\overline{1,m}} \sum_{j=1}^{n} u_{ij}$$

після чого обирати ту з альтернатив, яка має найбільшу середню оцінку.

Правило вибору за цим критерієм:

Матриця рішень доповнюється ще одним стовпчиком, що містить середнє арифметичне значення кожної зі стрічок. Вибираються ті варіанти рішень, в стрічках яких стоїть найбільше значення u_{ir} цього стовпчика.

При цьому передбачається, що ситуація, в якій приймається рішення, характеризується таким обставинами:

Ймовірності появлення зовнішніх станів F_j відомі і не залежить від часу.

1. Приходиться рахуватися з проявленням різних зовнішніх станів F_j.
2. Рішення реалізується (теоретично) багато разів
3. Для малої кількості реалізацій допускається деякий ризик.

Приклад.

Умова та сама.

Таблиця

Альтернативні варіанти політики підприємства	**Можливі стани оточуючого середовища**		U_{ir} середне	max u_{ir} (i)
	1. Конкуренція відсутня	**2. Конкуренція посилилася**		
1. Продовжувати працювати у традиційному режимі	130	90	110	110
2. Посилити рекламну діяльність	120	95	107,5	

6). <u>Критерій Байєса-Лапласа.</u> Попередній критерій ґрунтувався на принципі недостатньої підстави - не було підстав вважати імовірність виникнення того або іншого стану природи більшою у порівнянні з іншими станами природи. Навпроти, якщо є можливість певним чином оцінити імовірності виникнення кожного з можливих станів оточуючого середовища, то тоді замість простої середньої оцінки цінності кожної альтернативи доцільніше розглядати зважену середню арифметичну оцінку (оцінку Байєса-Лапласа):

Математична модель, що відповідає критерію Байєса-Лапласа

$$u^* = \max_{i=\overline{1,m}} \sum_{j=1}^{n} p_j u_{ij}$$

де p_j - це імовірність того, що природа опиниться саме в її j-му стані ($j = \overline{1,n}$).

Правило вибору за цим критерієм:

Матриця рішень доповнюється ще одним стовпчиком, що містить математичне сподівання значень кожної зі стрічок. Вибираються ті варіанти рішень, в стрічках яких стоїть найбільше значення u_{ir} цього стовпчика.

При цьому передбачається, що ситуація, в якій приймається рішення, характеризується таким обставинами:

Ймовірності появлення зовнішніх станів F_j відомі і не залежить від часу.

4. Приходиться рахуватися з проявленням різних зовнішніх станів F_j.
5. Рішення реалізується (теоретично) багато разів

6. Для малої кількості реалізацій допускається деякий ризик.

При достатньо великої кількості реалізацій середнє значення поступово стабілізується. Тому при повній реалізації будь0який ризик практично виключається.

Таким чином, критерій (B-L– критерій) більш оптимістичний чим ММ критерій, однак він передбачає більшу інформованість і достатньо довгу реалізацію.

Приклад.

Умова та сама. P_1=0.3, p_2=0.7

<table>
<tr><th rowspan="2">Альтернативні варіанти політики підприємства</th><th colspan="2">Можливі стани оточуючого середовища</th><th rowspan="2" colspan="2">P_j*u_{ij}</th><th rowspan="2">u_{ir}</th><th rowspan="2">max u_{ir} (i)</th></tr>
<tr><th>1. Конкуренція відсутня</th><th>2. Конкуренція посилилася</th></tr>
<tr><td>1. Продовжувати працювати у традиційному режимі</td><td>130</td><td>90</td><td>39</td><td>63</td><td>102</td><td></td></tr>
<tr><td>2. Посилити рекламну діяльність</td><td>120</td><td>95</td><td>36</td><td>66.5</td><td>102.5</td><td>102.5</td></tr>
</table>

Принцип Байєса-Лапласа рекомендує обирати ту з альтернатив, оцінка зваженої середньої арифметичної цінності котрої найбільша. Якщо, розглядаючи наш приклад, вважати, що активність конкурентів на ринку посилиться з імовірністю 0.7, то тоді за критерієм Байєса-Лапласа дійдемо висновку про необхідність посилити рекламну діяльність.

7). Критерій Ходжеса-Лемана є комбінацією максимінного критерію і критерію Байєса-Лапласа. Він використовує параметр $p \in [0; 1]$, що характеризує ступінь довіри ОПР до імовірнісного розподілу виникнення можливих станів природи.

Цей критерій спирається одночасно на ММ критерій та на критерій Б-Л. За допомогою параметра р проявляється ступінь довіри до розподілу ймовірностей. Якщо довіра велика, то домінує критерій Б-Л, якщо ні – то ММ критерій. При р=1 (повній довірі ОПР до імовірнісного розподілу можливих станів оточуючого середовища) ми одержуємо принцип Байєса-Лапласа, при p=0 (повна зневага до імовірнісних оцінок) - повертаємося до песимістичного критерію. Оскільки значення параметра β, які дорівнюють 1 або 0, є винятковими, можна припустити, що ОПР частіше буде погоджуватися з вибором параметра β із середини проміжку [0; 1]. Широкого застосування в цьому відношенні знайшов проміжок [0.3; 0.8].

Математична модель, що відповідає критерію Ходжеса-Лемана

$$u^* = \max_{i=1,m}\left(\alpha\sum_{j=1}^{n} p_j u_{ij} + (1-\alpha)\min_{j=1,n} u_{ij}\right)$$

Правило вибору:

Матриця розв‘язків доповнюється стовпчиком, що складений з середніх зважених (з вагою p) математичного сподівання та найменшого результату кожної стрічки. Вибираються ті варіанти рішень, в стрічках яких стоїть найбільше значення цього стовпчика.

При p=1 критерій Ходжа-Лемана переходить в критерій Байеса-Лапласа, а при p=0 становиться максимінним критерієм.

Вибір p суб‘єктивний.

Для використання цього критерію бажано, щоб ситуація характеризувалась наступним чином:

1. Ймовірності появи станів невідомі, але деякі передбачення про розподілення ймовірностей відомі.
2. Прийняте рішення теоретично передбачає багатокількісну реалізацію.
3. При малій кількості реалізації допускається деякий ризик.

Приклад. Умова та сама q1=0.3, q2=0.7:p=0.5

	F1	F2	Σ(j) uij*q_j	Min (J) uij	p* Σ(j) uij*q_j	(1–p)* min (J) uij	e_{ir}	Max(i) e_{ir}
E1	130	90	102	90	51	45	96	
E2	120	95	102.5	95	51.25	47.5	98.75	98.75

8) Критерій Гермейера

Цей критерій орієнтований на величину втрат, тобто на від‘ємні значення всіх uij

При цьому $u^* = \max\limits_{i=1,m} \min\limits_{j=1,n} u_{ij}$

Так як в господарських задачах мають справу з цінами та витратами, умова uij<0 зазвичай виконується. В тих випадках, коли серед величин є додатні, то можна перейти до від‘ємних значень за допомогою перетворення uij–a, при a>0, що обирається довільно.

Правила вибору: Матриця розв‘язків доповнюється це одним стовпчиком, що містить в кожній стрічці майменший добуток результату, що в ній є, на ймовірність відповідного стану. Вибираються ті варіанти, в стрічках яких знаходиться найбільше значення uij цього стовпчика.

В якомусь розумінні критерій Гермейера узагальнює ММ критерій: у випадку рівномірного розподілення q_j=1/n. J=1,n, вони стають ідентичними.

Умови використання:

1. Ймовірності появлення станів невідомі.
2. З появою тих чи інших станів окремо чи в комплексі потрібно рахуватись.
3. Допускається деякий ризик.
4. Рішення може реалізовуватись один чи декілька разів.

Якщо функція розподілення відома, але не надійна, а кількість реалізацій мала, то за цим критерієм отримують невиправдано великий ризик.

Приклад. Умова та сама. Нехай a=130, q_j=0.5

Таблиця

	F1	F2	uij*q_j		u_{ir}=min(j) uij*q_j	Max(i) u_{ir}
E1	0	-40	0	-20	-20	
E2	-10	-35	-5	-17.5	-17.5	-17.5

Порівняння варіантів за допомогою величини u_{ir} показує, що спосіб дій критерію Гермейєра є навіть більш гнучким, чим у ММ критерію.

9) Критерій добутків

$$\max_i \mathrm{u}_{ir} = \max_i \prod_j u_{ij}$$

Правила вибору цього критерію формуються так:

Матриця розв‘язків доповнюється новим стовпчиком, що містить добуток всіх результатів кожної стрічки. Вибираються ті варіанти, в стрічках яких знаходиться найбільше значення цього стовпчика.

Використання цього критерію обумовлено такими ознаками ситуації, в якій приймається рішення:

1. Ймовірність появлення станів F_j невідомі;
2. Необхідно рахуватися з появленням різних станів F_j окремо;
3. Допускається деякий ризик;
4. Критерій використовується і при малій кількості реалізацій.

Критерій добутків пристосований перш за все для випадків, коли всі uij є додатніми. Якщо умова додатності порушується, то слід виконати деякий зсув uij +a з деякою константою

a>ABS(min (ij) uij) +1. Якщо константу підібрати неможливо, то критерій взагалі непридатний.

Приклад. Умова та сама. Таблиця

A=0	F1	F2	e_{ir}=П(J) uij	Max e_{ir} (i)
	uij–a			
E1	130	90	11700	11700
E2	120	95	11400	

Якщо умова uij>0 для даної матриці не виконується, то до елементів матриці додається (довільний вибір) число a. Як висновок – варіант оптимального рішення сильно залежить від значення a.

Помічаємо, що в нашому прикладі критерій Ходжеса-Лемана завжди буде віддавати перевагу другій альтернативі в порівнянні з першою, оскільки друга альтернатива має більшу песимістичну оцінку, а також, коли імовірність посилення діяльності конкурентів дорівнює 0.7, і більшу оцінку Байєса-Лапласа. Водночас, якби посилення конкуренції оцінювалося б менше ймовірним, результати розрахунків за наведеними критеріями могли б дати зовсім інші рекомендації.

Критеріїв (принципів) вибору альтернатив за умов невизначеності і/або ризику, подібних до розглянутих, відомо багато. Зокрема у літературі наведено понад 20 різних принципів. Кожний із критеріїв має як певні переваги, так і окремі хиби. Тому вважаємо за доцільне розвинути узагальнену характеристику задачі прийняття рішень за умов невизначеності і/або ризику, а також обговорити рекомендації щодо використання відповідних принципів (критеріїв) у практичних випадках.

Перший висновок, що випливає з аналізу проведених вище розрахунків, полягає у тому, що рекомендації щодо вибору альтернатив можуть різнитися залежно від критерію, який було використано. Щоб підкреслити, що цей висновок має досить загальний характер, проаналізуємо дані нової задачі, що наведені в табл. 8.3.

Бачимо, що максимінний критерій Вальда призводить до третьої альтернативи, максимаксний - «оптимістичний» - до першої, критерій Гурвіца - знову до третьої, критерій Лапласа - до другої, критерій Байєса-Лапласа - до першої, а критерій Ходжеса-Лемана - повертає до третьої Однозначних рекомендацій для подібних ситуацій не існує. Але, оскільки остаточний вибір здійснює ОПР, то було б корисним ознайомити її з пропозиціями, що відповідають різним критеріям. Водночас застерігаємо проти використання такого нового принципу, за яким перевага віддавалася б тій альтернативі, на яку вказує більшість критеріїв.

Таблиця 8.3.

Матриця цінностей і рекомендації щодо вибору альтернатив за різними критеріями (прибуток, певних грошових одиниць)

Номер альтер-нативи	**Номер стану природи**				**Оцінки альтернатив за різними критеріями**					
	1	**2**	**3**	**4**	u_i^0	u_i^*	$\tilde{u}_i$	$\bar{u}_i$	$\bar{\bar{u}}_i$	$\tilde{u}$
1	100	0	20	0	0	**100**	40	30	**44**	22
2	0	50	60	70	0	70	28	**45**	34	17
3	30	40	30	60	**30**	60	**42**	40	36	**33**
Песимістичний критерій Вальда										
"Оптимістичний" критерій										
Критерій песимізму-оптимізму Гурвіца $(\alpha = 0.4)$										
Критерій Лапласа										
Критерій Байєса-Лапласа $(p_1 = 0.4,\ p_2 = 0.3,\ p_3 = 0.2,\ p_4 = 0.1)$										
Критерій Ходжена-Лемана $(\beta = 0.5)$										

Беззаперечним є лише правило про те, що коли одна альтернатива залишається гіршою від деякої іншої альтернативи у довільному з можливих станів оточуючого середовища, то тоді таку першу альтернативу потрібно відкинути, оскільки вона домінується другою альтернативою. Ретельного аналізу з точки зору ОПР потребують лише ті альтернативи, що не домінуються іншими.

8.2. Методи прийняття рішень в умовах ризику

1. Критерій значення, що очікується

Використання критерію значення, що очікується, обумовлено бажанням максимізувати прибуток, що очікується, (або мінімізувати витрати, що очікуються). Використання величин, що очікуються передбачає можливість багатократного розв'язання однієї і тієї ж задачі, доки не будуть отримані достатньо точні розрахункові формули. Математично це виглядає так: нехай

X – випадкова величина з математичним сподіванням MX та дисперсією DX. Якщо x1, x2, ..., xn – значення випадкової величини (в.в.) X, то середнє арифметичне їх (вибіркове середнє) значень $\bar{x} = \frac{x1 + x2 + ... + xn}{n}$ має дисперсію Dx/n. Таким чином, коли n→∞ Dx/n→0 та $\bar{x} \to Mx$.

Іншими словами при достатньо великому об‘ємі вибірки різниця між середнім арифметичним та математичним сподіванням крокує до нуля (так звана гранична теорема теорії ймовірності). Відповідно до використання критерію значення, що очікується, вірно тільки у випадку, коли одне й те саме рішення приходиться приймати достатньо велику кількість разів. Вірно і навпаки: орієнтація на очікування буде призводити до невірних результатів для рішень, корті приходиться приймати невелику кількість разів.

<u>Приклад 1.</u> Потрібно прийняти рішення про те, коли необхідно проводити профілактичний ремонт ПЕОМ, щоб мінімізувати втрати із-за поломки. У випадку якщо ремонт буде виконуватись досить часто, витрати на обслуговування будуть більшими при малих втратах із-за випадкових помилок.

Так як неможливо передбачити заздалегідь, коли виникне невиправність, необхідно знайти ймовірність того, що ПЕОМ вийде з строю в період часу t. В цьому і полягає елемент ризику.

Математично це виглядає так: ПЕОМ ремонтується індивідуально, якщо вона зупинилась із-за поломки. Через T інтервалів часу виконується профілактичний ремонт всіх n ПЕОМ. Необхідно визначити оптимальне значення T, при якому мінімізуються загальні витрати на ремонт не працюючих ПЕОМ и проведення профілактичного ремонту в розрахунку на один інтервал часу.

Нехай p_t– ймовірність виходу зі строю однієї ПЕОМ і момент часу t , а n_t – випадкова величина, що дорівнює кількості всіх непрацюючих ПЕОМ в той самий момент часу. Нехай далі С1 – витрати на ремонт невиправностей ПЕОМ та C_2 – витрати на проведення профілактичного ремонту однієї машини.

Використання критерію значення, що очікується, в даному випадку виправдано, якщо ПЕОМ працюють на протязі великого проміжку часу. При цьому очікувані витрати на один інтервал складають

$$OB = \frac{c_1 \sum_{t=1}^{T-1} M(n_t) + c_2 n}{T}$$

де $M(n_t)$– математичне сподівання кількості непрацюючих ПЕОМ в момент часу t. так як n_t має біноміальне розподілення з параметрами (n, p_t), то $M(n_t)=np_t$. Таким чином

$$OB = \frac{n(c_1 \sum_{t=1}^{T-1} p_t + c_2)}{T}$$

необхідна умова оптимальності T^* має вигляд:

$OB(T^*-1) \geq OB(T^*)$

$OB(T^*+1) \geq OB(T^*)$

Відповідно, починаючи з малого значення Т, обчислюють ОВ(Т), поки не буде виконана необхідна умова оптимальності.

Нехай C_1=100; C_2=10; n=50. Значення p_t мають вид:

T	P_t	$\sum_{t=1}^{T-1} p_t$	OB(T)
1	0,05	0	50(100*0+10)/1=500
2	0,07	0,05	375
3	0,10	0,12	366,7
4	0,13	0,22	400
5	0,18	0,35	450

$T^* \rightarrow 3$, $OB(T^*) \rightarrow 366{,}7$

Відповідно, профілактичний ремонт необхідно виконувати через Т=3 інтервали часу.

1. Критерій “значення, що очікується – дисперсія”

Критерій значення, що очікується, можна модифікувати таким чином, що його можна буде використовувати і для випадків, що рідко трапляються.

Якщо X- випадкова величина з дисперсією Dx, то середнє арифметичне $\bar{x}$ має дисперсію Dx/n, де n – число доданків в $\bar{x}$. Відповідно, якщо Dx зменшується, а ймовірність того, що n/x наближається до має Mx, збільшується. Відповідно має рацію ввести критерій, в якому максимізація значення прибутку, що очікується, поєднується з мінімізацією її дисперсії.

Приклад 2. Скористаємось критерієм “значення, що очікується, – дисперсія” для даних прикладу 1. Для цього необхідно визначити дисперсію витрат за один інтервал часу, тоб то дисперсію

$$Зt = \frac{C_1 \sum_{t=1}^{T-1} n_t + C_2 n}{T}$$

так, як n_t, t=1,T-1 – в.в., то $З_Т$ також в.в., що має біноміальне розподілення з $M(n_t)=np_t$ та $D(n_t)=np_t(1-p_t)$. відповідно

$$D(З_t) = D(\frac{c_1 \sum_{t=1}^{T-1} n_t + c_2 n}{T}) = (\frac{c_1}{T})^2 D(\sum_{t=1}^{T-1} n_t) = (\frac{c_1}{T})^2 \sum_{t=1}^{T-1} Dn_t = (\frac{c1}{T})^2 \sum_{t=1}^{T-1} np_t(1-p_t) = n(\frac{c_1}{T})^2 \{\sum_{t=1}^{T-1} p_t - \sum_{t=1}^{T-1} p_t^2\}$$

де C_2n=const.

З прикладу 1 маємо, що M(Зт)=M(З(т)).

Звідси шуканим критерієм буде мінімум виразу

M(З(т))+кD(Зт)

Зауваження. Константу “к” можна розглядати як рівень не схильності до ризику, так як “к” визначає “ступінь можливості” дисперсії D(Зт) по відношенню до математичного сподівання. Наприклад, якщо підприємець особо гостро реагує на великі від‘ємні відхилення прибутку донизу від M(З(т)), то він може вибрати “к” багато більшим за 1. це придасть велику вагу дисперсії і приведе до рішення, що зменшує вірогідність великих втрат прибутку.

При к=1 отримаємо задачу:

$$M(З(T))+D(З(T))=n\left\{\left(\frac{c_1}{T}+\frac{c_1^2}{T^2}\right)\sum_{t=1}^{T-1}p_t-\left(\frac{c_1}{T}\right)^2\sum_{t=1}^{T-1}p_t^2+\frac{C^2}{T}\right\}$$

За даними з прикладу 1 можна скласти таку таблицю

T	P_t	P_t^2	Σp_t	ΣP_t^2	M(З(Т))+D(З(Т))
1	0.05	0.0025	0	0	500.00
2	0.07	0.0049	0.05	0.0074	6312.50
3	0.10	0.0100	0.12	0.0074	6622.22
4	0.13	0.0169	0.22	0.0174	6731.25
5	0.18	0.324	0.35	0.0343	6764.00

З таблиці видно, що профілактичний ремонт необхідно виконувати на протязі кожного інтервалу часу Т*=1.

3. Критерій граничного рівня

Критерій граничного рівня не дає оптимального рішення, максимізую чого прибуток чи мінімізую чого витрати. Скориш за все він відповідає визначенню можливого способу дій.

<u>Приклад 3</u>. Нехай величина попиту X в одиницю часу (інтенсивність попиту) на деякий товар задається неперервною функцією f(X). Якщо запаси в початковий момент часу малі, в подальшому можливий дефіцит товару. В іншому випадку на кінець періоду запаси нереалізованого товару можуть бути дуже великими. В обох випадках можливі втрати.

Визначити втрати від дефіциту складно. ОПР може з‘ясувати необхідний рівень запасів таким чином, щоб величина дефіциту, що може виникнути, не перевищувала А1 одиниць, а величина лишків не перевищувала Ф2 одиниць. Іншими словами, нехай Ш – шуканий рівень запасів. Тоді

Дефіцит, що може виникнути, $=\int_{I}^{\infty}$ (x-I)f(x)dx≤A1

Лишки, що можуть виникнути, $=\int_{0}^{I}$ (I-x)f(x)dx≤A2

При довільному виборі A1, A2 зазначені умови можуть виявитися суперечними. В цьому випадку необхідно послабити одне з обмежень.

Нехай

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{20}{x^2}, якщо 10 \le x \le 20 \\ 0, якщо x \le 10 або x \ge 20 \end{cases}$$

$$\int_{1}^{20} (x-I)f(x)dx=\int_{1}^{20} (x-I)20/x^2dx=20(\ln(20/I+I/20-1)$$

$$\int_{10}^{1} (I-x)f(x)dx=\int_{10}^{1} (I-x)20/x^2dx=20(\ln(10/I+I/10-1)$$

Використання критерію граничного рівня призводить до нерівностей

Ln(I)-I/20≥ln(20)-A1/20-1=1.996-A1/20

Ln(I)-I/10≥ln(10)-A2/20-1=1.302-A2/20

Граничні значення A1 та A2 мають бути вибрані таким чином, щоб аби дві нерівності виконувались хоча б для одного значення I.

Наприклад, якщо A1=2 та A2=4, нерівності приймають вигляд

LnI-I/20≥1.896

LnI –I/10≥1.102

Значення I має знаходитись між числами 10 та 20, т.я. саме в цих межах змінюється попит. З таблиці видно, що обидві умови виконуються для I , що належить інтервалу від 13 до 17.

I	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
LnI-I/20	1.8	1.84	1.88	1.91	1.94	1.96	1.97	1.98	1.99	1.99	1.99
LnI-I/10	1.3	1.29	1.28	1.26	1.24	1.21	1.17	1.13	1.09	1.04	0.99

Будь яке з цих значень задовольняє умовам задачі.

8.3. Оцінка інвестиційної привабливості підприємства

Одним з найважливіших критеріїв доцільності вкладання коштів у підприємство є ефективність використання його майна, виразником якої є рівень рентабельності активів. Вона є похідною від оборотності активів і рентабельності реалізації [7; 23].

На рівень і динаміку рентабельності активів різних виробничих підприємств впливають різні чинники. І для того, щоб дати експертну оцінку подальших змін рентабельності активів, необхідно, щоб хоч одна із складових цього показника мала базу для стабільного зростання.

Наприклад, якщо у підприємства є перспективи збільшення обсягів реалізації за рахунок збільшення обсягів виробництва або розширення виробничих площ і без різкого зростання виробничих запасів, то це і є умовою підвищення рентабельності активів. Якщо такої перспективи немає, відсутня можливість підвищення рентабельності активів, а водночас знижується інвестиційна привабливість.

Є й інший спосіб підвищення рентабельності активів: зниження вартості цих активів (скорочення зайвих матеріальних запасів, дебіторської заборгованості і позаоборотних активів). Якщо підприємство використає вказані вище особливості, то його інвестиційна привабливість може зрости.

У випадку оцінки інвестиційної привабливості виробничого підприємства у формі акціонерного товариства, інвестор приймає рішення про доцільність інвестування у підприємство залежно від курсової вартості його акцій і рівнем виплачених дивідендів. Ці два показники визначаються фінансовим станом підприємства.

Розглянемо взаємозв’язок між фінансовим станом підприємства (акціонерного товариства) та курсовою вартістю акцій і рівень виплачуваних на ці акції дивідендів. На рівень дивідендів безпосередньо впливають такі показники:

- сума чистого прибутку;
- частка чистого прибутку, яка може бути направлена на оплату дивідендів;
- питома вага привілейованих акцій у загальній їх кількості;
- рівень дивідендів, оголошений за привілейованими акціями;
- величина статутного капіталу;
- загальна кількість випущених в обіг акцій.

Різкі коливання рівня дивідендів виникають під впливом кожного з перерахованих показників.

У зв'язку з тим, що певний відсоток чистого прибутку використовують для оплати дивідендів за привілейованими і звичайними акціями, то рівень цієї оплати безпосередньо залежить від величини виручки з реалізації, її рентабельності і суми податків з прибутку. А чистий прибуток залежить від:

- рівня зношеності основних засобів і необхідності направлення прибутку на фінансування капітальних вкладень;
- приросту оборотних засобів;
- необхідності створення резервного фонду.

Враховуючи це, потенційний інвестор за станом майна і джерел його покриття може визначити зміну у наступному періоді частки чистого прибутку, який спрямовується на виплату дивідендів. Можна сказати, чим нижче співвідношення чистого прибутку до статутного капіталу, тим менший рівень дивідендів за акціями може виплатити підприємство. Це співвідношення також може служити критерієм інвестиційної привабливості підприємства. На рівень дивідендів впливає також питома вага привілейованих акцій у загальній їх кількості. Чим вища частка привілейованих акцій у загальній їх кількості, тим більша частка чистого прибутку, призначеного на привілейовані акції, і, як наслідок, менша частка залишається на звичайні акції. Це має місце лише в тому випадку, коли рівень дивідендів за привілейованими акціями вищий рівня за звичайними акціями. Якщо рівень однаковий, то частка привілейованих акцій не має жодного значення.

Рівень дивідендів – лише один з критеріїв інвестиційної привабливості. Крім цього, інвестору важливо знати, чи можливий ріст у перспективі і наскільки надійний рівень, оголошений тепер. Гарантії для інвесторів визначають показниками рівня покриття дивідендів за привілейованими акціями і величиною чистого прибутку у розрахунку на звичайну акцію.

Рівень покриття дивідендів за привілейованими акціями допомагає визначити, скільки разів чистим прибутком можна покрити оголошені дивіденди за привілейованими акціями. Чим вищий цей показник, тим більша гарантія виплати акціонерам дивідендів за всіма видами акцій.

Дивіденди за привілейованими акціями повинні виплачуватися у першу чергу, тому у розрахунок беруть весь чистий прибуток, який можна вільно використати. В особливих випадках він може цілком направлятися на виплату дивідендів за привілейованими акціями, але тоді за звичайними акціями дивіденди не виплачуються.

Варто зауважити, що чистий прибуток на звичайну акцію тим менший, чим більша частка привілейованих акцій у загальній їх кількості і чим вищий рівень дивідендів по них і тому при всіх інших рівних умовах інвестор надасть перевагу тому підприємству, в якого частка привілейованих акцій менша.

Для власників акцій важливою є величина коефіцієнта виплати дивідендів, тобто відношення суми дивідендів на звичайну акцію до чистого прибутку на неї. Як ми зауважили раніше, при досить великому чистому прибутку підприємство може виплачувати високі дивіденди, витрачаючи на них значну частину прибутку. У цьому випадку коефіцієнт виплати дивідендів свідчить про високу рентабельність підприємства. Але навіть, якщо рівень дивідендів високий, його треба підвищувати і у перспективі, бо може статися небезпека, що власники звичайних акцій нададуть перевагу акціям інших підприємств, рівень дивідендів яких є нижчим, але постійно зростає. При такій оцінці важливо визначити наслідки спрямування всього, або майже всього, прибутку на виплату дивідендів, чи це не зашкодить подальшій діяльності підприємства. Якщо такий підхід погіршує фінансові показники і в наступні періоди може знизитися прибуток, то не можна оцінювати інвестиційну привабливість за цим коефіцієнтом.

Також важливим показником для потенційних інвесторів є вартість чистих активів з розрахунку на одну акцію. Вона вимірює рівень забезпеченості акцій активами і має практичне значення при ліквідації підприємства.

Чисті активи – це вартість активів без нематеріальних активів і всієї суми боргів. Вартість чистих активів на акцію безпосередньо залежить від рівня платіжної спроможності підприємств, а це залежить, у першу чергу, від співвідношення статутного капіталу і активів.

Не зовсім вірно оцінювати рівень інвестиційної привабливості тільки виходячи з рівня дивідендів. І це, в першу чергу, з таких двох причин:

а) сам рівень дивідендів залежить від частини прибутку, направленого підприємством на виплату дивідендів без шкоди для виробничої діяльності у даній фінансовій ситуації;

б) інвестора більше за рівень дивідендів цікавить курс акцій, який залежить від перспектив діяльності підприємства, його платіжної спроможності і фінансової стабільності.

Важливою є оцінка попиту на продукцію підприємства, перспективи розвитку виробничої діяльності підприємства.

В практиці функціонування розвинутого ринку цінних паперів значний інтерес становить показник відношення курсу акцій до чистого прибутку з розрахунку на одну акцію. Величина цього показника залежить від загального стану підприємств, в тому числі і фінансового.

Проекти можуть бути незалежними чи альтернативними. Якщо вибір одного інвестиційного проекту не впливає на вибір інших проектів, то такі проекти називаються незалежними, але коли вибір одного проекту виключає змогу прийняття інших, то такі проекти називаються альтернативними.

Критерії відбору інвестиційних проектів можуть бути різними і одночасно важливими, наприклад: фінансові, технологічні, організаційні і інші. Але, зазвичай, фінансові аспекти при прийнятті рішень стосовно доцільності вибору того чи іншого інвестиційного проекту домінують над іншими. Доцільність вкладення коштів в проекти ґрунтується на визначенні: обсягу фінансових ресурсів, що є необхідними для реалізації проекту; альтернативних джерел залучення фінансових ресурсів; термінів окупності вкладень; графіків надходжень коштів і т.д. На всі ці питання повинна бути однозначна відповідь на етапі передінвестиційних досліджень, бо це визначає взаємну вигідність і доцільність проекту. Зайвим є наголошення важливості в цьому відношенні вимоги повноти і достовірності такої інформації.

За ініціативою керівництва Агентства з питань запобігання банкрутству підприємств і організацій була в нашій країні розроблена Методика інтегральної оцінки інвестиційної привабливості проектів (зареєстрована в Мін'юсті України 31.03.1998 р).

За цією методикою розраховують інтегральний показник інвестиційної привабливості проектів, стимулювання залучення до розвитку вітчизняної економіки своїх та іноземних інвесторів. Оцінка інвестиційної привабливості проектів враховує значну кількість показників, що випливають з характеристик самого об'єкта інвестування і кожен з них аналізує той чи інший аспект інвестиційного об'єкта. Фінансова оцінка потребує обчислення більше сорока показників, кожний з яких до того ж характеризується ваговим коефіцієнтом. За цією методикою для потенційного інвестора не є вирішальним ступінь розвитку регіону, до якого належить інвестиційний об'єкт [70].

До показників, що характеризують і фінансово обґрунтовують об'єкт інвестування через інтегральну оцінку в першу чергу належать: майновий стан; фінансова стійкість (платоспроможність); ліквідність коштів; прибутковість; ділова активність; ринкова активність. Вагомою інформацією служать показники відповідної бухгалтерської звітності, що встановлені Держкомстатом України: Баланс підприємства (форма №1); Звіт про фінансові результати та їх використання (форма 2); Звіт про фінансово-майновий стан підприємства (форма 3); Звіт про наявність та рух основних фондів, амортизацію (форма №11-ОП) [22; 70]. Числове значення інтегрального показника з конкретної групи показників, що визначає інвестиційну привабливість l-го об'єкта інвестування, можна визначити так:

$$J_l = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ijl}^{(k)} \alpha_{ijl}}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}},$$

де $r_{ijl}^{(k)}$ – коефіцієнт реагування j-го показника i-ої групи l-го об'єкта; α_{ijl} – ваговий коефіцієнт j-го показника i-ої групи l-го об'єкта; α_{ij} – ваговий коефіцієнт j-го показника i-ої групи з врахуванням групової вагомості.

Коефіцієнти реагування розраховують так:

$$r_{ijl}^{(k)} = \frac{\left| F_{ijl} - \beta_{ijl}^{(k)} \right|}{V_{ijl}},$$

де F_{ijl} – фактичне значення j-го показника i-ої групи; $\beta_{ijl}^{(k)}$ – екстремальне значення j-го показника i-ої групи, яка вибирається таким чином: при k=1 вибирається значення $\beta_{ijl}^{1} = \beta_{ijl}^{\min}$, а при k=2 коефіцієнт $\beta_{ijl}^{(2)} = \beta_{ijl}^{\max}$; V_{ijl} – варіація (розкид) j– го показника i-ої групи, що визначається за формулою:

$$V_{ijl} = \frac{\beta_{ijl}^{\max} - \beta_{ijl}^{\min}}{\delta_{ijl}},$$

де δ_{ijl} – число елементів множини значень відповідного показника у множині його значень.

Ваговий коефіцієнт α_{ijl} розраховують таким чином:

$$\alpha_{ijl} = \frac{\alpha_{ijl} \cdot \lambda_i}{100},$$

де λ_i – ваговий коефіцієнт *i*-ої групи показників.

Оскільки оцінка інвестиційної привабливості об’єктів є багатокритеріальною, її розраховують за дещо спрощеною методикою, яка використовує показники чистої поточної вартості, індекс дохідності, термін окупності, внутрішня норма дохідності. При розрахунках шукають максимальне значення цих показників. Якщо проект чи об’єкт характеризується максимальним значенням хоча б одного з цих критеріїв, це є ознакою переваг цього проекту для інвестування. Цю спрощену методику застосовують переважно на передінвестиційному етапі оцінки проекту, оскільки вона не дає повної картини про фінансовий стан об’єкта, наявність у нього матеріальних ресурсів. Відсутня також характеристика виробничих процесів об’єкта інвестування. Вважають за доцільне використовувати дану скорочену методику з методикою інтегральної оцінки інвестиційної привабливості підприємства.

Для вирішення проблеми оцінки інвестиційної привабливості підприємств регіону, як складової перспективного плану розвитку регіону, доцільно, насамперед, здійснити оцінку фінансового стану підприємств і організацій, які функціонують в регіоні, проаналізувати доцільність їх модернізації та реконструкції. Наступним етапом є визначення проектів, що враховують традиції виробництва продукції та її споживання і опираються на місцеві джерела ресурсів та наявність кваліфікованих спеціалістів.

Отже, можна зробити висновок, що для визначення інвестиційної привабливості виробничих підприємств потрібний всебічний аналіз: фінансового стану; причин і чинників, які впливають на рівень чистого прибутку на акцію і на рівень дивідендів; динаміки розвитку підприємства залежно від зміни його фінансового стану.

Інвестиційна діяльність підприємства може розглядатися як реалізація різноманітних інвестиційних проектів, яка пов'язана в основному з оновленням основних фондів, збільшенням обсягів випуску продукції існуючого асортименту, створенням нової продукції. Очевидно, що міра відповідальності за вибір того чи іншого інвестиційного проекту на перший погляд здається неоднаковою. Адже при виборі проекту на оновлення матеріально-технічної бази визначеність є значно вищою порівняно з вибором проекту на освоєння нової продукції. В останньому випадку треба визначитися на ринку товарів, на ринку ресурсів, передбачити конкурентну спроможність цієї нової продукції. Аналогічна ситуація виникає і при виборі обсягів інвестування проектів. В умовах ринкової економіки можливості інвестування виробництва не такі вже й малі. Тому актуальною є проблема оптимізації вибору проектів. Прийняття рішення з цього приводу повинно ґрунтуватися на підставі науково обґрунтованих максимально формалізованих методів.

В загальних рисах постановка задачі оптимізації портфеля проектів виглядає так: підприємство має змогу брати участь у ряді взаємно незалежних проектів шляхом часткового або повного їх інвестування. Загальна сума потрібних інвестицій на ці проекти перевищує наявні у підприємства ресурси. Треба скласти інвестиційний портфель, який максимізує сумарний можливий приріст капіталу.

У випадку можливості часткової участі у реалізації певного проекту, економіко-математична модель цієї задачі має вигляд:

$$\sum_{i=1}^{m} P_i \alpha_i x_i - \sum_{i=1}^{m} (1-P_i) x_i \to \max \qquad (8.1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \le A \qquad (8.2)$$

$$0 \le x_i \le B_i, i = 1..m \qquad (8.3)$$

де A – обсяг інвестиційного ресурсу в підприємства; B_i – необхідний обсяг ресурсу для реалізації i-го проекту; x_i – обсяг ресурсу, вкладеного підприємством у i-ий проект; α_i – величина річного доходу з розрахунку на 1 гривню інвестицій у i-ий проект; P_i – ймовірність успішної реалізації i-го проекту.

Ця ж задача, коли проекти не підлягають подрібненню, має вигляд:

$$\sum_{i=1}^{m} P_i \alpha_i a_i y_i - \sum_{i=1}^{m} (1-P_i) a_i y_i \to \max \qquad (8.4)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i y_i \le A \qquad (8.5)$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \le 1 \qquad (8.6)$$

$$y_i (y_i - 1) = 0, i = 1..m \qquad (8.7)$$

Величина y_l дорівнює 1 або 0 залежно від інвестування підприємством i-го проекту; a_i – повна потреба в інвестиціях для реалізації i-го проекту.

Для вирішення оптимізаційних задач (8.1)–(8.3) і (8.4)–(8.7) є важливим відображення за допомогою математичних залежностей конкретної ситуації, яка склалася при можливості інвестування конкретних проектів, тобто при можливості отримання прибутку від капіталу, яким володіє або може володіти підприємство. Не менш важливим є забезпечення цих задач достовірною інформацією. Зробимо зауваження щодо особливостей кожного з параметрів, які тут використовують.

Обсяг ресурсу A, яким володіє підприємство, може включати не тільки власні ресурси, але й ті, які воно може залучити за відповідну компенсацію. У такому випадку умови (8.2)–(8.5) виглядатимуть так:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \leq A + \sum_{l=1}^{L} z_l \tag{8.8}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i y_i = A + \sum_{l=1}^{L} z_l \tag{8.9}$$

де z_l – величина кредиту l-го виду.

Але тоді в (8.1) і (8.4) повинна бути відображена плата за кредит, сумарна величина якої матиме вигляд:

$$\sum_{l=1}^{L} \beta_l z_l \quad ,$$

де β_l – ставка оплати за кредит l-го виду. Тут під видом оплати за кредит, маємо на увазі як терміни, так і джерела кредитування.

Дохід α_i, тобто поступлення сумарних грошових засобів від інвестування i-го проекту може бути розподілене в часі t=1,2,..,T, тому він може з врахуванням коефіцієнтів дисконтування γ розраховуватись:

$$\alpha_i = \sum_{t=1}^{T} \frac{\alpha_{it}}{(1+\gamma)^t} \tag{8.10}$$

де α_{it} – доход від i-го проекту в період t.

Коефіцієнт дисконтування γ, враховуючи щорічний відсоток повернення, а також ймовірність p_i вибирає аналітик (інвестор), самостійно виходячи з прогнозованих, очікуваних результатів.

В нашому випадку враховують можливість ризику інвестування капіталу, але для цього варто врахувати ймовірності p_i, що є досить важко при проведені попереднього економічного аналізу всієї ситуації з інвестуванням проектів. Можливий також підхід до повернення розрахунків з врахуванням можливості ризику. Для кожного проекту вибирають три можливих варіанти розвитку: песимістичний, найімовірніший, оптимістичний. Їм відповідатимуть сої певні значення $a_{it}^1, a_{it}^2, a_{it}^3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Для кожного з цих варіантів вираховують діапазон варіації чистого ефекту від *i*-го проекту δ_i таким чином:

$$\delta_i = (\sum_{t=1}^{T} \frac{\alpha_{it_3}}{(1+\gamma_3)^t} - \frac{a_{it}}{(1+\gamma_2)^t}) - (\sum_{t=1}^{T} \frac{\alpha_{it_1}}{(1+\gamma_1)^t} - \frac{a_{it}}{(1+\gamma_2)^t}) \quad (8.11)$$

Враховуючи це цільова функція задачі (4.124)–(4.127) виглядатиме так:

$$\sum_{i=1}^{m} \delta_i y_i \to \min \quad (8.12)$$

Такий критерій сприяє вибору проектів для інвестування, які мають найменший діапазон варіації чистого ефекту, тобто такі, які менше підлягають впливу ризику.

8.4. Економіко – математична модель оптимального планування розвитку та розміщення виробництва з оптимальним розподілом інвестиційних ресурсів

Опрацюємо задачу планування розвитку та розміщення виробництва (галузі, корпорації) з оптимальним розподілом інвестиційних ресурсів.

Постановка задачі полягає у наступному. З метою задоволення попиту у продукції слід забезпечити виробництво необхідними виробничими потужностями. Для вирішення цієї проблеми до уваги слід взяти усі можливі варіанти розвитку діючих підприємств, а також наявні проекти уведення в дію нових підприємств. Вибір конкретних варіантів розвитку та розміщення підприємств здійснюється з урахуванням обсягів інвестиційних ресурсів, які можна буде використати для підтримки та нарощування виробничих потужностей. Критерієм оптимальності може слугувати вимога мінімізації необхідних загальних зведених інвестиційних витрат, витрат на виробництво продукції та на її перевезення до споживачів.

Побудуємо економіко-математичну модель цієї задачі.

Для цього, передусім, уведемо такі позначення для відомих величин (некерованих параметрів):

i-номер підприємства, існуючого або запроектованого ($i=\overline{1,m}$),

j-номер варіанта розвитку *i*-го підприємства ($j=\overline{1,n_1}$);

N_{ij} — виробнича потужність *i*-го підприємства за умови його розвитку за j-м варіантом;

I_{ij} - інвестиційні витрати, необхідні для реалізації j-го варіанта розвитку на i-му підприємстві;

R-максимально можливий обсяг інвестиційних витрат, які спрямовуватимуться на забезпечення розвитку усіх підприємств;

е-нормативний коефіцієнт економічної ефективності інвестицій (норма дисконту);

c_{ij} - вартість одиниці продукції, яку буде виготовлено на i-му підприємстві за умови його розвитку за j-м варіантом;

k- номер споживача продукції ($k=\overline{1,p}$);

b_k - попит на продукцію з боку k-го споживача;

d_{ik} - транспортні витрати на перевезення одиниці продукції за маршрутом $i \rightarrow k$.

Невідомими виступають:

x_{ij} - логічна змінна, яка відбиває факт вибору для реалізації j-го варіанта розвитку *i*-го підприємства:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } i - \text{те підприємство буде} \\ \quad \text{розвиватися за } j - \text{м варіантом}, \\ 0, \text{ у супротивному випадку}; \end{cases}$$

y_{ij} — обсяг виробництва продукції на i-му підприємстві згідно j-го варіанта його розвитку;

Z_{ik}- обсяг перевезень продукції за маршрутом $i \rightarrow k$;

ν - загальні зведені витрати на інвестування, виробництво та перевезення продукції.

За наведених позначень <u>економіко-математична модель задачі</u> планування розвитку та розміщення виробництва з оптимальним розподілом інвестиційних ресурсів набирає вигляду:

$$v = e\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} I_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} c_{ij}y_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} d_{ik}z_{ik} \rightarrow \min$$

$$x_{ij} \in \{0; 1\}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n_i}$$

$$\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, m}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} I_{ij}x_{ij} \le R;$$

$$0 \le y_{ij} \le N_{ij}x_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n_i};$$

$$\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} = \sum_{k=1}^{p} z_{ik}, \quad i = \overline{1, m};$$

$$\sum_{i=1}^{m} z_{ik} \ge b_k, \quad k = \overline{1, p};$$

$$z_{ik} \ge 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, p}.$$

<u>Пояснення до моделі:</u>

Цільова функція задачі складається з трьох доданків:

- Перший з них обліковує витрати, що пов‘язані з інвестиційними витратами, необхідними для реалізації розвитку підприємств.
- Другий – рахує витрати, що пов‘язані з вартістю продукції, яку буде виготовлено на підприємствах за умови його розвитку за певним варіа-

нтом.

- Третій – показує витрати перевезення продукції до споживачів.

Перше обмеження свідчить про те, що кожне підприємство може розвиватися за одним варіантом.

Друге обмеження показує витрати інвестиційних ресурсів.

Четверте обмеження – обсяг виробництва продукції на i-му підприємстві згідно j-го варіанта його розвитку не може бути більшим ніж виробнича потужність i-го підприємства за умови його розвитку за j-м варіантом.

П‘яте обмеження – всю продукцію, що виготовили має підприємство перевезти до споживачів.

Та шосте обмеження –задоволення попиту споживачів.

Наведена математична модель являє собою задачу частково цілочислового лінійного програмування з бульовими змінними, її розв'язування доцільно здійснювати з використанням спеціальних приладних програм на ПЕОМ.

За невеликої кількості змінних у нагоді може стати підпрограма «Пошук рішення» пакету Excel.

Вхідною інформацією наведеної моделі є:

1. види підприємств та види продукції, що на них виготовляється
2. можливі нові підприємства та види продукції, що там буде виготовлятися.
3. можливі варіанти розвитку підприємств
4. для кожного варіанту розвитку підприємств необхідно підрахувати Виробничу потужність, тис. од. продукції на рік; Необхідні інвестиційні витрати, млн. грн.; Вартість виробництва одиниці продукції, грн.
5. прогнозне значення перспективного попиту на продукцію

6. кількість споживачів продукції та їх потреби на рік
7. прогнози експертів щодо транспортних витрат на перевезення одиниці продукції від виробників споживачам
8. максимально можливий обсяг залучення інвестицій на розвиток усіх підприємств
9. нормативний коефіцієнт економічної ефективності інвестицій.

Розглянемо конкретний числовий приклад. Припустимо, що деяка однорідна продукція виготовляється на двох підприємствах П-1 та П-2. Окрім цього, у разі необхідності, може бути збудоване і третє підприємство П-3. Потенційними альтернативними варіантами розвитку цих підприємств є такі.

Для підприємства 1: Залишити виробничу потужність на поточному рівні; Збільшити виробничу потужність за рахунок модернізації обладнання на 30 %; Збільшити виробничу потужність за рахунок розширення виробництва на 50 %. Для підприємства 2: Залишити виробничу потужність на поточному рівні; Збільшити виробничу потужність за рахунок модернізації обладнання на 15 %. Для підприємства 2: Організувати виробництво за проектом А; Організувати виробництво у більшому розмірі - за проектом Б.

Більш докладна інформація щодо кожного з варіантів розвитку підприємств наведена у таблиці 8.4.

Таблиця 8.4

Основні техніко-економічні показники потенційних варіантів розвитку підприємств

Показник, одиниця виміру	П-1			П-2		П-3	
	В-1	В-2	в-з	В-1	В-2	В-1	В-2
Виробнича потужність, тис. од. продукції на рік	100	130	150	200	230	100	150
Необхідні інвестиційні витрати, млн. грн.	1,0	12,0	20,0	3,0	15,0	75,0	90,0
Вартість виробництва одиниці продукції, грн.	200	200	190	180	170	170	160

Прогнозне значення перспективного попиту на продукцію дорівнює 400 тис. од. продукції на рік, з наступним розподілом між трьома споживачами: С-1 – 160 тис. од. пр./ рік, С-2 – 130 тис. од. пр./ рік, С-3 – 110 тис. од. пр./ рік.

Транспортні витрати на перевезення одиниці продукції від виробників споживачам, за прогнозами експертів, складатимуть (таблиця 8.5). Максимально можливий обсяг залучення інвестицій на розвиток усіх підприємств - 95 млн. грн. Нормативний коефіцієнт економічної ефективності інвестицій - 0,2. Яким слід обрати план розвитку підприємств?

Таблиця 8.5

Транспортні тарифи (гривень за одиницю продукції)

Підприємство	Споживач		
	С-1	С-2	С-3
П-1	5	15	25
П-2	10	10	5
П-3	5	20	15

Математична модель для розв'язування цієї задачі набере вигляду:

$v = 0{,}2*(1x_{11}+12x_{12}+20x_{13}+3x_{21}+15x_{22}+75x_{31}+90x_{32})+$

$+200y_{11}+200y_{12}+190y_{13}+180y_{21}+170y_{22}+170y_{31}+160y_{32}+$

$+5z_{11}+15z_{12}+25z_{13}+10z_{21}+10z_{22}+5z_{23}+5z_{31}+20z_{32}+15z_{33} \to \min,$

$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{32} \in \{0; 1\},$

$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1, \quad x_{21} + x_{22} = 1, \quad x_{31} + x_{32} \leq 1,$

$1x_{11}+12x_{12}+20x_{13}+3x_{21}+15x_{22}+75x_{31}+90x_{32} \leq 95,$

$0 \leq y_{11} \leq 100x_{11}, 0 \leq y_{12} \leq 130x_{12}, 0 \leq y_{13} \leq 150x_{13},$

$0 \leq y_{21} \leq 200x_{21}, 0 \leq y_{22} \leq 230x_{22}, 0 \leq y_{31} \leq 100x_{31}, 0 \leq y_{32} \leq 150x_{32},$

$y_{11}+ y_{12}+ y_{13} = z_{11}+z_{12}+z_{13},$

$y_{21}+ y_{22} = z_{21}+z_{22}+z_{23}, \quad y_{31}+y_{32} = z_{31}+z_{32}+z_{33},$

$z_{11}+z_{21}+z_{31} \geq 160, \quad z_{12}+z_{22}+z_{32} \geq 130, \quad z_{13}+z_{23}+z_{33} \geq 110,$

$z_{11}, z_{12}, z_{13}, z_{21}, z_{22}, z_{23}, z_{31}, z_{32}, z_{33} \geq 0.$

Знайдемо розв'язок цієї задачі, використовуючи електронну таблицю Excel:

1) Оптимальними варіантами розвитку підприємств визначено такі:

П-1 - залишити виробничу потужність на поточному рівні – 100 тис. одиниць продукції на рік;

П-2 - збільшити виробничу потужність до 230 тис. одиниць продукції на рік за рахунок модернізації обладнання;

П-3 - організувати виробництво за проектом А з виробничою потужністю 100 тис. одиниць продукції на рік.

2) Обсяги виробництва на кожному з підприємств доцільно визначити такими:

П-1 - 70 тис. одиниць продукції на рік;

П-2 - 230 тис. одиниць продукції на рік;

П-3 - 100 тис. одиниць продукції на рік.

3) Резерв виробничих потужностей на випадок непередбаченого зростання попиту дорівнює 30тис. одиниць продукції на рік. Цей резерв зосереджено на підприємстві П-1.

4) Прогнозовані потреби споживачів у продукції задовольнятимуться повністю. План постачання продукції наступний:

П-1 → С-1 - 60 тис. одиниць продукції на рік;

П-1 → С-2 - 10 тис. одиниць продукції на рік;

П-2 → С-2 - 120 тис. одиниць продукції на рік;

П-2 → С-3 - 110 тис. одиниць продукції на рік;

П-3 → С-1 - 100 тис. одиниць продукції на рік.

5) Витрати на виробництво продукції дорівнюватимуть 70,1 млн. грн.

на рік, транспортні витрати - 2,7 млн. грн. на рік. Інвестиційні витрати складатимуть 91 млн. грн., зведені інвестиційні витрати – 18,2 млн. грн.

6) Оптимальні загальні зведені витрати на інвестування, виробництво та перевезення продукції дорівнюють: 18,2+70,1+2,7=91 (млн. грн. на рік).

Задачу планування розвитку та розміщення виробництва з оптимальним розподілом інвестиційних ресурсів розв'язано.

8.5. Оптимізація структури портфеля цінних паперів

Розглянемо випадок наявності у підприємства вільних грошових коштів, які треба ефективно використати. Отже, підприємство виступає у ролі інвестора, який бажає мати якомога більшу ефективність від вкладених власних коштів і різні можливі проекти, забезпечити свої вклади як найменшим ступенем ризику. Участь підприємства у різних проектах можна формально представити як придбання цінних паперів, або як формування портфеля цінних паперів. Портфель цінних паперів – це розподіл засобів між різними активами (акції, облігації тощо). Структура портфеля цінних паперів – це співвідношення часток власних інвестицій підприємства у цінні папери різних видів (векселі, акції, контракти тощо) [70].

Очевидно, сподівана ефективність і варіація портфеля залежить від його структури.

Участь у реалізації різних проектів (придбання цінних паперів) є безперечно ризикованою фінансовою операцією. Вклавши кошти в проекти, підприємство стає залежним від ринкових коливань вартості теперішнього і майбутнього проекту. Але якщо підприємство вклало свій капітал у декілька проектів, то ефективність вкладення коштів також залежить від ринкових коливань вартостей цих проектів, та не кожного зокрема проекту, а усередненого. Середні результативні коливання, зазвичай, менші, бо є надія взаємного погашення коливань.

Розподіл інвестицій у різні проекти знижує ризик, забезпечує більшу стійкість прибутків. Методи аналізу і розрахунку оптимального портфеля проектів цінних паперів об'єднані під назвою "Теорія портфеля". Методи цієї теорії допомагають підприємствам забезпечувати надійність матеріальних запасів, визначають їх оптимальний розмір, допомагають здійснювати багатостадійне планування розподілу матеріальних запасів у загальній системі виробництва з урахуванням затрат на складування, транспортування тощо. Ці методи допомагають керівництву підприємства йти на певний ризик, прогнозувати кінцевий результат, знижувати прямі і непрямі витрати.

Управління портфелем – це планування, аналіз і регулювання структури портфеля, його формування та підтримання з метою отримання бажаного результату при мінімальних витратах та ризику [24].

Для подальшого дослідження ми використали наступні показники будь-якого виду ризикових цінних паперів:

- сподівана (математичне сподівання) ефективність (норма прибутку);
- ступінь ризику – варіація (дисперсія) чи середньоквадратичне відхилення ефективності (норми прибутку) від сподіваної величини.

Позначимо через x_i частку інвестицій в i-ий проект (цінний папір). Це означає, що

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,$$

де n – кількість доступних проектів і включених у портфель.

Сподіване значення норми прибутку портфеля визначають як зважену очікувану норму прибутку від окремих портфелів. Ваговими коефіцієнтами тут виступають частки інвестицій у відповідні проекти. Це запишеться так:

$$m = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i \ ,$$

де m – сподіване значення норми прибутку портфеля; m_i – сподіване значення норми прибутку i-го проекту.

Рівень ризику портфеля визначають середньоквадратичним відхиленням σ, яке вираховують на підставі дисперсії його норми прибутку, а саме

$$\sigma^2 = M\left\{(R-m)^2\right\} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} \ ,$$

де R – норма прибутку від портфеля проектів; σ_i^2 – дисперсія норми прибутку i-го проекту, яке визначають таким чином

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T} (R_{it} - m_i)^2 \ ,$$

де t – номер періоду (t=1,2,...,T); R_{it} – норма прибутку i-го проекту у періоді t; σ_{ij} – коваріація між нормами прибутку i-го і j-го проектів, яка вираховується за формулою

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T} (R_{it} - m_i)(R_{jt} - m_j) ,$$

Завдання полягає у визначенні такої структури портфеля, яка б забезпечила найкраще співвідношення між приростом прибутку і зростанням ризику. Таке співвідношення має вигляд:

$$S = \frac{m - R^*}{\sigma} ,$$

де R^* – фіксований прибуток портфеля.

Взявши до уваги, що $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, матимемо:

$$R^* = \sum_{i=1}^{n} x_i R^* .$$

З врахуванням цього можна записати:

$$S = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i (m_i - R^*)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}}},$$

Оптимальне співвідношення *S* знайдемо, прирівнявши його перші частинні похідні за шуканим параметром x_i до нуля, тобто

$$\frac{\partial S}{\partial x_k} = \left[\sum x_i (m_i - R^*) \right] \left[-(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_i x_j \sigma_{ij})^{-\frac{3}{2}} (x_k \sigma_k^2 \sum_{j=1}^{n} x_j \sigma_{kj}) \right] +$$

$$+ (\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} x_i x_j \sigma_{ij})^{\frac{1}{2}} (m_k - R^*) = 0, \quad k=1,...,n.$$

Після певних перетворень отримаємо систему з *n* рівнянь у якій є (*n+1*) невідоме, якими є λ, x_k, (k=1,...,n)

$$-\lambda (x_k \sigma_k^2 + \sum_{j=1}^{n} x_j \sigma_{kj}) + (m_k - R^*) = 0, \; k=1,...,n \, ,$$

де $\lambda = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i (m_i - R^*)}{\sum x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}}$ – постійна величина

Зробимо заміну $y_k = \lambda x_k$, $k=1,...,n$

отримаємо систему з *n* рівнянь відносно невідомих y_k . Знайшовши розв’язок системи, можна, використовуючи умову $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, знайти x_k так:

$$x_k = \frac{y_k}{\sum_{k=1}^{n} y_k}, \quad k=1,...,n$$

Визначають оптимальну структуру портфеля величини x_k. Якщо

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,n}$$

то задача розв'язується одним із методів квадратичного програмування. Якщо

$$x_i < 0, \quad i = \overline{1,n}$$

тоді відповідні цінні папери продають на термін без покриття (відсутність їх у продавця на момент продажу).

Дана методика допомагає знайти найкраще співвідношення між приростом норми прибутку і зростанням ризику. Це співвідношення визначає оптимальну структуру портфеля цінних паперів.

8.6. Приклади та завдання для самостійної роботи

Задача 1. Сплата податку.

В конфліктній ситуації приймає участь дві сторони: А – державна податкова адміністрація, В – фірма, що сплачує податки з визначеним річним прибутком, податок з якого складає Т умовних грошових одиниць.

У сторони А два можливих способи поведінки. Один з них A_1 полягає в контролюванні доходу платника податку В та сплати з нього податок:

- в розмірі Т, якщо задекларований дохід співпадає з наявним;
- в розмірі Т та штрафу в розмірі W, якщо повідомлений в декларації дохід менше дійсного, або у випадку приховування всього прибутку.

Другий спосіб поведінки A_2 – не контролювати дохід платника податку В.

У сторони В три стратегії поведінки: В1 – повідомити про дійсний дохід, B_2 – повідомити, дохід менше дійсного, та, відповідно, податок С з повідомленого доходу буде менше T; B_3 – приховати дохід, тоді не потрібно буде платити податок.

Значення податку за варіантами завдань наведено в таблиці

Показник	T	W	C
Значення	400+n	20*n	350+n

Скласти платіжну матрицю – матрицю виграшем гравця А.

Задача 2. Планування посіву.

Сільськогосподарське підприємство може посіяти одну з трьох (чотирьох) культур – A_1, A_2, A_3, A_4. Необхідно визначити, яку з цих культур сіяти, якщо за інших однакових умов врожаї цих культур залежать головним чином від погоди, а статистичні дані про погодні умови відсутні. План посіву повинен забезпечити найбільший дохід. Погодні умови можна охарактеризувати трьома (п'ятьма) варіантами: B_1 – дуже сухо, B_2 – сухо, B_3 – нормально, B_4 – вологo, B_5 – дуже вологo. Показники урожайності культур в залежності від стану природи та ціна кожної культури за варіантами завдань наведені в таблиці.

Погодні умови	Урожайність культур в центнерах			
	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	20+(8*n)	7,5+(10*n)	0+(9*n)	3+(10*n)
B_2	5+(10*n)	12,5+(5*n)	7,5+(7*n)	12+(9*n)
B_3	12+(6*n)	10+(9*n)	10+(8*n)	21+(5*n)
B_4	15+(3*n)	5+(4*n)	11+(6*n)	17+(2*n)
B_5	10+(11*n)	11,5+(2*n)	8+(5*n)	7+(3*n)
Ціна за 1 центнер в ум. од.	2+(7*n)	4+(10*n)	6+(8*n)	8+(4*n)

Скласти платіжну матрицю А. Опрацювати для цієї матриці всі моделі прийняття рішень за умов невизначеності.

Задача 3. Рекламна компанія.

Дві фірми А та В проводять рекламну компанію на припустимих ринках збуту, в кожному з двох сусідніх міст. У фірми А є два засоби, щоб поплатити в двох містах всього чотири способи проведення рекламної компанії, у фірми В – три способи. Перемогу кожної фірми (для точності фірми А) в кожному з трьох міст оцінимо в умовних одиницях (балах) наступним чином:

- якщо у фірми А більше способів реклами, чим у супротивника, то в якості виграшу вона отримує кількість балів, яка рівна числу способів реклами, які застосовані супротивником в даному місті з додаванням одного балу – за перемогу;
- якщо у А менше способів реклами чим у супротивника, то вона програє число балів, яке дорівнює числу способів реклами, які застосовуються нею в даному місті і мінус один бал – за програш;
- якщо число способів реклами в місті у двох фірм однакове, то кожна з них отримує нуль балів.

В якості загальних виграшів кожної з фірм приймаємо суми її балів по двом містам в різних ситуаціях.

Представити модель конфлікту у вигляді матричної гри, скласти матрицю виграшів фірми А.

8.7. Контрольні питання

1. Що таке матриця цінностей альтернатив?
2. Пояснити критерій Вальда
3. Пояснити критерій Гурвіці
4. Пояснити критерій Гермейєра
5. Пояснити критерій Ходжеса-Лемана
6. Пояснити критерій добутків
7. Пояснити критерій Лапласа
8. Пояснити критерій Байєса-Лапласа
9. Пояснити критерій Сєвіджа
10. Навести модель оптимізації розміщення виробництва з оптимальним використання інвестицій
11. Навести критерії прийняття рішень в умовах ризику
12. Навести модель оцінки інвестиційної привабливості підприємства
13. Навести модель оптимізації структури портфеля цінних паперів

РОЗДІЛ 9

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ ПІДПРИЄМНИЦЬКОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

9.1. Моделювання вибору стратегії розвитку малого підприємства

В умовах конкурентної економіки розвиток і функціонування будь-якого економічного об’єкта потребує оптимізації формування стратегічного плану – довгострокової комплексної програми, яка охоплює всі аспекти діяльності: зовнішні умови і впливи, виробництво та збут продукції, внутрішнє середовище, соціальні зобов’язання. Відсутність такої програми позбавляє підприємства можливості не тільки успішно розвиватися, але й існувати. Втілюється стратегія розвитку підприємства в бізнес-план, котрий є спеціальним інструментом менеджменту для планування господарської діяльності фірми відповідно до потреб і можливостей ринку.

На формування бізнес-плану покладають велику відповідальність. Він охоплює характеристики ринку, можливості конкурентів, рівень ризику виробництва, господарські і фінансові можливості підприємства. Формування бізнес-плану потребує високої кваліфікації розробників, здатних для його розрахунку застосувати прогресивні науково обґрунтовані методи та комп'ютерні технології. Варто мати на увазі, що сучасні керівники малих комерційних структур далеко не завжди володіють знаннями та досвідом управління підприємством, виробництвом, методикою конкурентної боротьби на ринках та методикою співробітництва [71].

Стратегічний план функціонування і розвитку підприємства, втіленням якого є бізнес-план, повинен бути доступним для розуміння користувачам, містити тільки головні елементи кожного розділу і напрямку діяльності підприємства, реально оцінювати власні можливості, враховувати можливі ризики і ґрунтуватися виключно на реальних показниках.

За умовою стратегічного плану визначають конкретні напрямки діяльності підприємства, вибирають ринки збуту власної продукції та залучення необхідних ресурсів, формують довгострокові цілі та стратегію і тактику їх досягнення, встановлюють показники товарів і послуг та способів їх реалізації, оцінюють кадровий склад підприємства і умови мотивації їхньої праці для досягнення обраної мети, здійснюють прогнозування можливих ризиків невиконання бізнес-плану. Такий план розробляють, зазвичай, на декілька років і корегують в процесі його реалізації внаслідок отримання нової важливої інформації. Реалізують цей план через локальні плани діяльності підприємства.

Зміст і структуру стратегічного плану жорстко не регламентують, але в ньому розкривають основну ідею і мету діяльності підприємства, характеризують особливість продукції, рівень задоволення нею попиту, визначають рівень ризику і встановлюють поведінку підприємства на окремих сегментах ринку, визначають організаційну і виробничу структуру виробництва, формують фінансовий план і пропозиції стосовно інвестування, оцінюють перспективи розвитку підприємства, прогнозують труднощі, з якими може зустрітися підприємство в результаті своєї діяльності.

Типова структура стратегічного плану може мати такі розділи:

1. Вступ. В ньому описують основну мету і терміни її досягнення, підприємницький результат (продукт) діяльності підприємства, технологію і організацію досягнення мети, очікуваний ефект діяльності, сферу використання результатів діяльності. Тут подають укрупнені прогнозні показники виробництва і реалізації продукції, частку задіяного капіталу, прибутку, рентабельності і окупності.

2. Задачі виробничої діяльності. Основними з них можуть бути отримання прибутку, збільшення частки підприємства на існуючому ринку до певного рівня, збільшення обсягів реалізації продукції.

3. Основні характеристики продукції підприємства. Тут подають інформацію про призначення продукції та розкривають її переваги над наявними аналогами.

4. Характеристика ринків збуту. Даний розділ містить інформацію про стан ринків, можливі обсяги збуту товару на ринках.

5. Характеристика конкуренції на ринках збуту. В цьому розділі подають результати аналізу кон'юнктури ринків, характеристики існуючих і потенційних конкурентів та прогнози можливих наслідків реалізації їх стратегій.

6. Маркетингова діяльність. Маркетингові плани, що описують у цьому розділі, є основою для підписання контрактів з партнерами і інвесторами. В них подають напрямки поширення товару, ціноутворення, методи спрямування продаж, іміджу підприємства, рекламну діяльність.

7. Виробничий план. Характеризують в цьому розділі виробничі ресурси підприємства.

8. Економічна ефективність. В цьому розділі аналізують фінансове забезпечення підприємства, подають характеристики грошових потоків, здійснюють розрахунки прогнозованих фінансових оцінок, зокрема:

- рентабельність підприємства як відношення валового прибутку до суми активів балансу;
- рентабельність продукції як відношення прибутку її реалізації до її собівартості;
- рентабельність продаж як відношення балансового прибутку до виручки;
- норма прибутку як відношення чистого прибутку до інвестицій.

Одним з підходів до проведення аналізу економічної ситуації є аналіз з метою отримання відповіді на запитання: "що буде, якщо?" чи "що необхідно, щоб?".

Відповідь на перше питання дають за допомогою варіантного аналізу. Так, наприклад, обсяг попиту на будь-який вид продукції можна розрахувати при різних значеннях деякого параметра як, індекс цін на власну продукцію, індекс цін на інші товари, коефіцієнт регресії на власну продукцію або інші товари, кількість споживачів з даним рівнем доходу.

Є безліч економічних ситуацій, при яких такий аналіз буде корисний. Наприклад, підвищення загальнодержавних цін на електроенергію вплине на ціну власної продукції та як при цьому зміниться попит на неї? Якщо зміниться структура розподілу населення за рівнем доходу, то як при цьому зміниться структура попиту на власну продукцію і таке інше.

Інша група задач, розв’язки яких дають відповіді на питання "що необхідно, щоб...?". Наприклад, якою має бути структура розподілу населення за рівнем доходів, щоб попит на власну продукцію був на заданому рівні? За допомогою математичного апарату можна імітувати економічну ситуацію, що знаходиться в межах визначення параметрів конкретної економіко-математичної моделі.

Варіантний аналіз за допомогою математичних методів може бути використано як експертний аналіз, що виконує моніторинг маркетингової інформації. Підприємці малого бізнесу не в змозі самостійно виконувати такий моніторинг в разі обмеження доступу до необхідної інформації, при відсутності необхідних знань та кваліфікованих спеціалістів. Для вирішення такої проблеми варто створювати організації, які здатні надавати послуги з вирішення задач з дослідження операцій організації і управління у підприємництві.

Надання необхідної інформації керуючою системою на входи керованої системи може суттєво вплинути на прийняття управлінського рішення на рівні керованої системи. Наприклад, в підприємницьких структурах існує практика підвищення цін на свою продукцію з падінням курсу гривні щодо американського долара. Іноді, навіть, тоді, коли їх виробнича діяльність не пов'язана з використанням закордонних матеріалів і обладнання. В результаті, це призводить до зниження попиту на ту чи іншу продукцію чи послугу. Розрахунки, виконані за допомогою методів математичного моделювання допомагають у цій ситуації визначити обсяги падіння попиту і можуть вплинути на прийняття управлінського рішення на рівні підприємства.

Виконання аналізу ситуації на етапі постановки задачі, а також, виходячи з задачі забезпечення попиту населення регіону на власну продукцію, центральним питанням для керуючої системи – є прийняття оптимального рішення відносно структури виробництва.

Вироблення ефективного управлінського рішення – це один з найвідповідальніших елементів організаційного управління. Він включає три основні етапи визначення умов: пошук, розробка і аналіз можливих варіантів дій; вибір якогось одного напряму дій із можливих альтернатив так, щоб була досягнута деяка визначена чи бажана для суб’єкта, що приймає рішення мета, або ціль.

Підприємницька діяльність завжди пов’язана з фактором ризику, тобто невпевненістю у ефективності фінансових чи господарських операцій, неоднозначністю самої діяльності. У реальних економічних умовах цілком детермінованих ситуацій, у яких необхідно прийняти рішення, практично не існує. Прийняття тези про детермінованість ситуацій завжди є умовним припущенням. Ризик в економічній діяльності – це об’єктивний фактор, зумовлений дією стохастичних причин і чинників, зокрема конфліктністю ситуації прийняття рішень, невизначеністю цілей і наслідків дій, відсутністю повної і об'єктивної інформації щодо процесів, які відбуваються тепер чи простежуються в майбутньому.

Невизначеність і пов’язаний з нею ризик – постійні джерела небезпеки прийняття несприятливих рішень. Для більшості економічних рішень характерна значна невизначеність. Завдання того, хто приймає рішення в тому, щоб заздалегідь врахувати невизначеність і звести її до аналізу кількісними методами.

На всіх етапах функціонування підприємства, його діяльність пов’язана з невизначеністю, яка вносить імовірнісний характер у розвиток події, що пов’язані з всіма елементами ринку. Це спричиняє ризик, без врахування якого неможливий ефективний розвиток підприємства. Ризик – це всеохоплююча властивість, яка притаманна всім ринковим суб’єктам. Суть його полягає в наступному:

- ризик властивий всім аспектам функціонування економіко- виробничих систем;
- уникнути повністю ризику неможливо через причини суб’єктивного і об’єктивного характеру.

Ризик – це небезпека понести збитки у виробничій чи фінансовій діяльності через невизначеність. Основною причиною ризику у підприємстві є:

- непередбачені раптові зміни в зовнішньому середовищі, які вплинули на діяльність підприємства;

- зміну у відношенні виробника і його партнерів;
- зміни, які проходять у самого виробника;
- зміни внаслідок науково-технічного прогресу.

Розвиток підприємництва потребує поглиблення теорії ризику, методів його оцінки, способів обліку і регулювання на всіх рівнях управління. Підприємство завжди супроводжує ризик і для його зменшення виробник веде пошук інформації, яка знижувала б рівень невизначеності. До об'єктивних причин ризику тобто таких, що не залежать від підприємств, належать, наприклад, рівень цін і розподіл державних замовлень та контрактів, погодні та кліматичні умови, форс – мажорні обставини і т.д.

До суб'єктивних причин відносять випадкові кадрові зміни, зміни забезпеченості енергоресурсами, прорахунки у маркетингових дослідженнях і т.д. Можливі також прямі і непрямі впливи, які пізнають в наслідок зворотних зв'язків між виробником і навколишнім середовищем.

В житті часто зустрічають випадки, досвід оцінки яких є зовсім малим, або відсутній зовсім. До таких випадків відносять і започаткування підприємницької діяльності, її розвиток, а також, наприклад, техногенні катастрофи, землетруси, повені і т. д., які є, взагалі, унікальними. Є також випадки, що зібрати про них досить репрезентативну статистику не має можливості через те, що їх поява хоч і мала місце в минулому, але не стільки разів, щоб говорити про якусь її закономірність. Але життя вимагає здійснювати прогнозування і таких подій. Чи можливо для таких подій розрахувати кількісні показники ймовірності? Теоретично – можна, хоча і дуже наближено, але не ґрунтуючись на статистичних показниках, а на підставі логічних висновків про розвиток ситуацій чи процесів. Варто зауважити, що перевірити об'єктивність висновків переважно неможливо.

Оцінка ризиків можлива лише на підставі інформації про об'єкти дослідження, які і є носіями ризику. Виявлення ризику відбувається через збір інформації про об'єкти чи процеси дослідження і через виявлення та прогнозування небезпек.

Існують різноманітні методи отримання інформації, що характеризують окремі ризики. Неможливо одночасно вказати на ефективність цих методів у кожному конкретному випадку. Збір інформації та виявлення ризиків допомагають у багатьох випадках конкретизувати та ідентифікувати небезпеки. Нагромадження досвіду та статистичної інформації є важливою складовою частиною організації створення спеціальної програми контролю та виявлення ризиків. Такий план повинен мати свій бюджет та економічне обґрунтування.

Серед існуючих методів аналізу ризиків, одні ґрунтуються на аналізі статистичної, фінансової та іншої управлінської і звітної документації підприємства, інші методи потребують безпосередньої інспекції місць знаходження джерел небезпеки.

Задача аналізу є досить складною і потребує спеціальних знань. Доцільно у цьому випадку залучити окремі фірми та експертів з даної сфери діяльності, які мають певний досвід вирішення відповідних задач. Метою таких задач є встановлення взаємозв'язків між окремими показниками, що знаходяться у різних джерелах.

Стратегія управління ризиком на підприємстві може бути різною залежно від напрямку його діяльності. В ідеальному варіанті управління ризиком повинен здійснювати спеціально створений на підприємстві підрозділ, очолюваний менеджером ризику, який займається виключно проблемами керування ризиком та координує діяльність всіх підрозділів в плані регулювання ризику та забезпечує компенсацію збитків, які мали місце.

З основних функцій менеджера ризику, які можна вважати типовими у різних країнах ринкової економіки, можна виділити такі: забезпечення безпеки підприємства та контролю над ризиком; забезпечення якості продукції; розробка положень і інструкцій забезпечення такої діяльності; розроблення стратегій і принципів управління ризиками.

Одним з нормативних документів, який регламентував би діяльність всіх відповідальних за величину ризику та управління ним, може бути Положення з управління ризиком. Таке положення повинно містити результати аналізу на підприємстві і викладені ключові моменти управлінської стратегії підприємства у даній області. Положення вимагає прийняти концепцію підприємства стосовно управління ризиком, окреслює розмежування відповідальності структурних підрозділів та регламентує створення спеціальних резервних фондів для компенсації збитків чи систем страхування.

До таких нормативних документів слід віднести також інструкції, які регламентують конкретні дії. У них повинні бути вказівки на те, яким чином повинні вирішуватися конкретні задачі керування ризиками. Також у цих документах повинні знаходитися відповіді на запитання – хто оцінює можливі втрати, умови страхування, дії у випадку настання збитків, відповідальність підрозділів і осіб причетних до причин, що привели до втрат.

Функції підрозділів з управління ризиками полягають у практичній реалізації обраної стратегії виявлення ризику, збору і опрацювання інформації про ризикові рішення та їх наслідки, управління страховими програмами, підвищення кваліфікації працівників. Планування і страхування, тобто управління портфелем страхових угод є відповідальною роботою, яка враховує: оцінку необхідності страхового покриття; вибір страхових партнерів; погодження розмірів страхових відшкодувань і страхових покрить; формування змісту страхових угод; супроводження справ пов’язаних з відшкодуванням збитків; організацію і провадження всієї необхідної документації.

Орган управління дає змогу приймати рішення особі чи органу за наслідки якого він повинен нести повну відповідальність. Теоретично організаційний устрій підприємства створюють так, щоб забезпечити відповідність між структурними підрозділами. Планування необхідне на всіх рівнях організаційної структури управління. Рішення, що приймають у процесі планування, відрізняються одне від одного свободою вибору альтернатив. На цьому рівні вирішують найбільш загальні задачі. Але загальна кількість варіантів не є необмеженою, вона обмежена і визначається структурою та ситуацією у якій функціонує підприємство. Кожний наступний до низу рівень прийняття рішень володіє меншим числом альтернатив, яке визначається конкретними для цього рівня умовами. Очевидно, що межу функціонування визначають на найвищому рівні і зумовлюють політику діяльності підлеглих, які визначають директиви і плани. На цьому рівні використовують методики і вказівки ще нижчого рівня, які застосовують для формулювання розпоряджень і правил останньому рівню. На цьому рівні альтернативи поведінки істотно обмежені.

Варто зауважити, що планування завжди проводиться на перспективу, глибина якої залежить від повноти охоплення проблеми. Керівництво підприємства при вирішенні загальних задач виявляє інтерес до проблем узагальненого характеру. Виконання довготермінових завдань досягають через розрахунок короткострокових планів. Так, наприклад, прийняття рішень, необхідних для успішного впровадження випуску продукції, ставить завдання (обладнання, постачання, розподіл і т.д.), які треба вирішувати в терміни більш стислі за терміни розробки нової продукції. В подальшому треба розробляти більш конкретні плани дій і на менший проміжок часу (рік, місяць). Для безпосередніх виконавців календарний план розробляють на тижні, дні і навіть на години.

Через вивчення властивих підприємству методів прийняття рішення можна судити про його функціонування. Ефективною організацією виробничої системи вважають таку, при якій має місце потік достовірної інформації, що проходить через всі рівні у всіх напрямках. Варто згадати про вимогу достатності обсягу інформації. Немає необхідності знати детально про рішення на нижчому рівні ієрархії, чи у інших підсистемах. Ступінь свободи при інтерпретації рішень, що поступають зверху є показником гнучкості організації.

У ринкових умовах суб’єкти господарювання здійснюють свою діяльність, яка характеризується в першу чергу економічною свободою. Така свобода вимагає плати і цією платою є свобода інших суб’єктів господарювання, які можуть купувати або можуть і не купувати той чи інший товар, пропонувати свою ціну, виставляти свої умови. Кожного учасника ринку до цього спонукає міркування його власної вигоди. Але треба мати на увазі, що вигода з точки зору одного партнера може бути збитками для іншого партнера. Конфліктність такої ситуації посилюється ще й тим, що ринок є конкурентним середовищем і тому можливі намагання конкурентів витіснити одне одного з ринку.

Незалежно від свого бажання, підприємець на ринку знаходиться у сфері певної невизначеності і через це дії учасників ринку слабо прогнозовані. Комплексний підхід до вивчення невизначеності в бізнесі виявляє одну з основних причин цієї невизначеності. Вона полягає в тому, що суб’єкти господарювання в процесі свого функціонування знаходяться під впливом великої кількості умов, значна частина яких носить випадковий характер і дані умови можна класифікувати за місцем їх виникнення.

Один із найбільш важливих аспектів процесу обґрунтування і прийняття рішень полягає в тому, що вироблене рішення повинно дати чітке розуміння місця і ролі невизначеності під час його прийняття. Таким аспектом в процесі прийняття рішення структуризації малого бізнесу сфери послуг є невизначеність структури розподілу населення за рівнем доходів. Ця невизначеність обумовлена недоліками методології виконання обстежень бюджетів населення та існуванням тіньового сектора економіки в Україні. У вибірковому обстеженні бюджетів населення міститься інформація про доходи, отримані офіційно, крім того, у вибірку потрапляють найбільш малозабезпечені верстви населення. Це призводить до відхилень у розмірах доходів. Значний податковий тиск на підприємницькі структури спонукає підприємців до приховування виручки від реалізації продукції, що перекручує дані офіційної звітності підприємств.

Для вирішення цієї проблеми пропонують проводити порівняльний аналіз обсягів споживання послуг за матеріалами бюджетних обстежень зі звітністю підприємств про обсяги наданих послуг. Це допоможе визначити розмір прихованої виручки від реалізації у разі, якщо дані бюджетних обстежень перевищують (у загальній сумі) дані звітності підприємств, або ж відхилення по витратах населення, якщо обсяг наданих послуг буде вищий.

Прогнозування попиту на послуги дозволить визначити на який вид послуг попит може залишитись незадоволеним. А це, безумовно, потребуватиме стимулювання підприємницької діяльності у цьому напрямку. Також прогнозування визначить, за якими видами послуг пропозиція буде перевищувати попит, що вимагатиме відповідних дій з боку керуючої системи.

Варіанти прийняття рішення на рівні керуючої системи органів місцевого самоврядування, можна визначити за такими напрямами: стимулювати розвиток підприємств малого бізнесу, що надають даний вид послуг; стримувати розвиток цих підприємств; нічого не робити, спостерігаючи за розвитком подій.

Необхідно звернути увагу на те, що суб’єкт рішення повинен нести повну відповідальність за наслідки цих рішень. Освоєння нових видів виробничої діяльності, розширення існуючого виробництва, оновлення існуючої матеріально-технічної бази вимагає значних коштів, а це реально здійснити лише залучивши інвестиції. Міра відповідальності за ефективність прийняття тих чи інших інвестиційних рішень є навіть для перерахованих випадків різною. При потребі заміщення наявного виробничого обладнання ризик допущення помилки можливий, оскільки відсутні знання про обсяг та потрібні характеристики необхідних нових основних виробничих засобів. Розширення виробництва потребує додаткових досліджень стосовно можливості виходу на нові ринки збуту продукції, залучення ресурсів. Очевидно, ще складнішою проблемою є оцінка можливих наслідків освоєння нових видів діяльності. Застосування для цього інструментарію модельних експериментів та комп’ютерних технологій радикально змінює ситуацію, бо дозволяє економістам, управлінцям самостійно створювати і аналізувати моделі. Їм для створення власних моделей в повсякденній професійній діяльності вже не потрібно звертатися до високого рівня аналітиків, математиків, програмістів з алгоритмічним мисленням і технічними знаннями. Безпосереднє застосування моделей для підтримки процесу прийняття рішень не тільки підвищить ефективність управлінських рішень, а й дозволить економістам, управлінцям, менеджерам глибше вникнути в суть проблеми, яку аналізують. Фахівці в процесі моделювання навчаються абстрактному мисленню для аналізу ситуації, зосередженості на основних питаннях, виробленні і аналізі альтернативних рішень.

Опис різноманітних моделей і відповідних концепцій, які узагальнюють наведені приклади для різноманітних ситуацій, що виникають в професійній діяльності аналітика, менеджера, сприяє поглибленню його досвіду для успішного моделювання складних ситуацій. Але ключовою складовою успішного моделювання ситуацій є сам управлінець. Може статися так, що він виконає всі описані завдання, але це ніяк не допоможе йому в роботі. Щоб цього не сталося, треба щоб він проникся ідеями моделювання і ці ідеї стали частиною його інтуїції. Цьому сприятиме набування досвіду через самостійну побудову і аналіз моделей. Моделювання дозволяє дослідити значну кількість варіантів рішень, заставляє всебічно вивчити проблему, яку аналізують. До того ж моделювання і пізнання різних варіантів розвитку ситуації дозволяє аналітику робити помилки лише на папері.

Вироблення рішення починають з аналізу ситуації. Якщо дотримуватися минулих традицій, суб'єкт рішення при виробленні рішення буде спиратися в основному на свою інтуїцію. Важко заперечити те, що у досвідчених суб'єктів рішення інтуїція відіграє важливу роль, але вона позбавлена аналітичного підґрунтя. Керуючись лише інтуїцією при виробленні рішення, суб'єкт рішення може робити висновки, виходячи з кінцевих результатів раніше прийнятих рішень, аналізуючи аналогічні ситуації на підставі яких формувався його досвід.

Формалізована уява необхідна у проведенні експериментів з метою аналізу наслідків можливих рішень, що мають вплив на розвиток ситуації. Модельні експерименти і аналіз їх результатів доповнюють, а не заміняють інтуїцію суб'єкта рішення.

Проблеми вибору, прийняття і виконання ефективного рішення за умов невизначеності для економічних систем досліджувались у працях [22; 25; 61]. Дослідження у цьому напрямі базуються на математичному апараті теорії ігор та математичної статистики і теорії прийняття рішень із врахуванням ступеня невизначеності. У даному випадку доцільно застосовувати байєсівський підхід, що ґрунтується на принципі максимального використання інформації, яка надходить у процесі управління. Приймається передумова, що для будь-якого твердження або події має місце ймовірність того, що дане твердження істинне. Відтак, має існувати певна сукупність положень, які підтверджують дану гіпотезу. Якщо є інформація стосовно даної проблеми, модифікується апріорна ймовірність таким чином, що отримують апостеріорну ймовірність цієї ж проблеми з врахуванням нової інформації.

Ситуація прийняття рішень характеризується множиною $\{X, q, V\}$, де $X=\{ x_1, x_2,\ldots,x_m \}$ – множина можливих варіантів рішень аналітика, що приймає рішення, $q=\{q_1, q_2, ..., q_n\}$ – множина станів економічного середовища, $V=\{ V_{kj} \}$, $(k=1,...,n)$ – матриця оцінювання, визначена на множині можливих варіантів.

У деталізованому вигляді ситуацію прийняття рішень подають у вигляді матриці, компоненти якої є дійсними числами V_{kj} (V_{kj} – кількісні оцінки можливого рішення $x_k \in x$ за умови, що економічне середовище перебуває в визначеному стані):

$$\mathrm{V} = \begin{bmatrix} & q_1 & q_i & q_1 \\ x_1 & V_{11} & V_{1j} & V_{1n} \\ x_k & V_{k1} & V_{kj} & V_{kn} \\ x_m & V_{m1} & V_{mj} & V_{mn} \end{bmatrix} \tag{9.1}$$

Коефіцієнти матриці виграшу чи втрат V_{kj} мають розмірність грошових одиниць. Це можуть бути або можливі доходи (обсяги виробництва, збитки, пільги), або можливі втрати (недоотримані обсяги виробництва, прибутки, податки тощо). Для прийняття ефективного рішення треба знайти ймовірність настання економічних станів $P(q_1)=p_1$, $P(q_2)=p_2,...,P(q_n)=p_n$, при цьому $p_1+p_2 + ... + p_n= 1$.

У випадку, коли V_{kj} означає прибуток, найкращим вважають те рішення , при якому величина $\sum_{j=1}^{n} V_{kj} p_i, \quad (k=1,...m)$ максимізується:

$$B^{+}(x_{k0}, p) = \frac{\max}{k=1,m} \sum_{j=1}^{n} P \cdot V_{kj}^{+}. \tag{9.2}$$

У випадку, коли ймовірності p_{jj}, $(j=1,...,n)$ відомі, апостеріорні ймовірності настання економічних станів обчислюють за формулами Байєса. Коли ж ці ймовірності p_j невідомі, для вибору оптимального рішення використовують критерій Бернуллі-Лапласа або принцип максимуму Гіббса-Джейнса. Для прийняття оптимального рішення при визначенні структури малого бізнесу сфери послуг пропонують використовувати саме ці критерії.

Порівняльний аналіз обсягів надання послуг, виконаний на підставі звітності підприємств, з прогнозованим попитом допомагає визначити обсяги незадоволеного попиту населення та обсяги перевищення пропозиції в розрізі видів послуг. Виявлення проблемної ситуації визначає задачі, керуючої системи.

Пошук та формування альтернативних варіантів рішень виконується за допомогою експертно-консультуючої системи. Вибір оптимального рішення – за допомогою теоретико-ймовірнісних методів з використанням принципу Гібба-Джейнса для прийняття ризикованих рішень.

Наприклад, за результатами порівняльного аналізу отримано інформацію про перевищення попиту над пропозицією для деякого виду продукції. Сформована ціль про забезпечення попиту споживачів у цьому виді продукції. На підставі аналізу ресурсних можливостей малого бізнесу сфери виробництва продукції ставиться задача стимулювання виробництва цього виду послуг. Для її розв'язання формують альтернативні рішення: x_1 – створити нові підприємства; x_2 – розширити існуючі підприємства; x_3 – нічого не робити, спостерігати за розвитком подій.

Регіональна невизначеність відносно існуючого розподілу населення за рівнем доходу може призвести до настання одного з трьох економічних станів: q_1 – рівень попиту дорівнюватиме спрогнозованому; q_2 – рівень попиту буде нижче прогнозованого; q_3 – рівень попиту перевищить прогнозований;

Експертно-консультуючі системи визначають рівні збільшення обсягів послуг V_{ij} та ймовірність станів $P(q_1)=p_1$, $P(q_2)=p_2$, $P(q_3)=p_3$.

Якщо ж пропозиція перевищує попит, перелік альтернативних рішень може бути таким: x_1 – зменшити вартість патенту на даний вид діяльності; x_2 – не зменшувати вартість патенту; x_3 – нічого не робити, спостерігати за розвитком подій; V_{ij} – рівень зміни витрат надходжень до бюджету.

Відкриття нових підприємств може здійснюватись як самою керуючою системою, тобто регіональною владою, так і через стимулювання розвитку вже існуючих підприємств, що працюють у галузі.

Описаний інструментарій математичного аналізу дає змогу розраховувати необхідність у спеціалістах певної спеціальності і кваліфікації. Ця інформація сприятиме цілеспрямованій діяльності фонду зайнятості населення по перекваліфікації безробітних з подальшим їх працевлаштуванням, що врешті, вплине на зменшення безробіття в регіоні.

Отже, за допомогою запропонованої моделі керуюча система може кваліфіковано інформувати малі підприємства сфери послуг відносно зростання або падіння попиту на їх продукцію. Маючи цю інформацію, малий бізнес буде орієнтований відносно перспектив свого розвитку, зможе розробляти обґрунтовані бізнес-плани, що допоможе звернутися до фінансових установ і отримати кредити.

На підставі визначення попиту споживачів на окремі види продукції з урахуванням зміни співвідношення цін на продукції та змін, що відбулися у структурному співвідношенні споживачів за рівнем доходів можна спрогнозувати обсяг реалізації послуг для кожного підприємства. Виходячи з цього прогнозу можна встановлювати розмір єдиного податку або розмір будь-якого фіксованого платежу. Введення фіксованого розміру податку, встановленого на підставі розрахунку попиту споживачів з одного боку зменшує витрати на ведення обліку для самих суб'єктів підприємницької діяльності, з другого, не потребує витрат з боку контролюючих органів на перевірку цих підприємств і підприємців, а це сприяє економії бюджетних коштів. Експеримент з введенням спеціальних торгових патентів у 6 регіонах України, проведений у 1998 році, засвідчує те, що місцеві бюджети цих регіонів отримали від підприємців значно більше коштів, ніж у аналогічному періоді попереднього року, збільшилась кількість громадян, що зареєстрували свою підприємницьку діяльність. Це цілком зрозуміло. Ведення бухгалтерського обліку і звітності на сьогодні потребує спеціальних знань і досить високої кваліфікації. Тобто, суб'єкти підприємницької діяльності повинні утримувати спеціаліста для ведення обліку, що збільшує витрати даного підприємства і, відповідно, позначається на ціні послуги. Або самостійно отримувати відповідну освіту, що потребує немалих коштів і часу. Крім того, численні перевірки контролюючих органів є важким тягарем для підприємців як з фінансової точки зору, так і з точки зору витрат часу і психологічних витрат. Це відволікає їх від основної діяльності, що відображається на якості виробництва.

Запропонований інструментарій математичного аналізу дає змогу розраховувати необхідність структуризації малого бізнесу, а також може бути використаний для оцінки інвестиційних проектів, при складанні бізнес-планів в процесі реструктуризації підприємств, банківськими установами для визначення доцільності надання кредитів.

Прикладом проведення реальних розрахунків може бути аналіз основних можливих варіантів розвитку малого підприємства ТОВ «Контур». Дане підприємство організовує і облаштовує пункти з надання комп'ютерних послуг у приміщеннях замовників. Щоб мінімізувати основні витрати, підприємство бере в оренду необхідну техніку. Крім плати за оренду і обслуговування технічних засобів, підприємство може додатково оплачувати замовникам преміальні за дбайливу експлуатацію технічних засобів.

Аналіз прибутковості підприємства здійснюється за допомогою розробленої методики. Дослідження повинно дати відповідь на доцільність використання альтернативних варіантів структури орендної плати за надану для експлуатації технічних засобів площу. Наприклад, можна розглянути варіанти: оплата за оренду приміщення для машин в 200 грн.; 0,01 грн. комісійних за один відбиток (за одну копію); 150 грн. оплати за оренду приміщення плюс 0,02 грн. комісійних з кожної одиниці продукції понад встановленого ліміту в 4000 одиниць. Керівництво підприємства, перед тим як оголосити прийнятий варіант, повинно дослідити кожний з цих трьох варіантів.

Вибір варіанту стратегії розвитку підприємства відбувається в декілька етапів. Перший з них полягає у вивченні середовища і структуруванні ситуації. Керівник формує план розвитку свого бізнесу, аналізує суть виробничого процесу, вивчає ситуацію на ринку її гуртової реалізації. Його метою є максимізація прибутку, який він хоче отримати якомога швидше. Тому показником ефективності функціонування підприємства є величина тижневого прибутку. Виробництво не передбачає зміни встановлених параметрів продукції. Фірми гуртової реалізації визначають свою надбавку до ціни продукції. В нашому випадку економічна ефективність підприємства залежить від обраного варіанту його розвитку і функціонування.

Наступним етапом проведення дослідження стратегій розвитку і функціонування підприємства є формалізація моделі, за допомогою якої буде здійснюватися модельний експеримент. В нашому випадку це буде симультативна математична модель, незалежними змінними є екзогенні змінні. Між залежною змінною та фактором є лише односторонній зв'язок.

Для визначення і опису екзогенних і ендогенних змінних було встановлено концептуальні елементи моделі. Параметрами моделі, що визначають накладні витрати взято: щомісячна оренда плата; виплата відсотків за кредити; витрати на закупку інгредієнтів; виробничі витрати. Наступним кроком у побудові моделі було формування внутрішньої логіки моделі. Оскільки побудова моделі є ітеративним процесом і початковий її варіант в подальшому неодноразово перероблявся, змінювався і доповнювався доти, поки не було отримано задовільного її варіанту.

Для структуризації своїх формулювань аналітики часто застосовують структурні моделі, у яких відображають зв'язки між екзогенними змінними і показником ефективності у загальній, неконкретизованій формі. У моделі ці зв'язки ще не представлені у вигляді математичних залежностей між екзогенними змінними і показником ефективності.

Структурна схема моделі створюється, починаючи зі змінної показника ефективності, яка розбивається на декілька проміжних змінних. Вони, в свою чергу, як частина внутрішньої логіки моделі, розбиваються на більш деталізовані проміжкові змінні. І такий процес розбиття, що графічно може бути відображений у вигляді структурного дерева, продовжується доти, поки не буде досягнуто екзогенних змінних. Мета структурної схеми – допомогти і спростити побудову моделі, а не виявити повністю всі проміжкові змінні у вигляді закінченого варіанту моделі. Подальша формалізація моделі може привести до виявлення ще інших проміжкових змінних.

Створення структурної моделі закінчується, коли визначені всі вхідні змінні моделі. Те що модель є певним наближенням відображенням реальної дійсності, а в нашому випадку досить віддаленим відображення, свідчить структурна модель. Структурна модель відображає господарські міркування керівника у вигляді вибіркового сприйняття ним дійсності. Наприклад, структурна модель не відображає: конкурентної ситуації на ринку; затрат на зберігання готової продукції та виробничих складників; руху оборотного капіталу та платежів; факторів матеріально – технічного постачання; графіку випуску продукції; залучення і навчання працівників; маркетингові затрати і багато чого іншого. Очевидно, це можна при необхідності врахувати на наступних етапах побудови моделі, адже початкова модель повинна бути максимально спрощеною.

В іншому випадку формування моделі для вибору стратегії розвитку підприємства ТОВ «Контур» здійснювалося через формування математичних залежностей, що поєднують конкретні економічні характеристики підприємства між собою, а саме:

$$P = D - Z;\quad D = C \cdot A;\quad Z = Z_1 + Z_2 + Z_i + \ldots + Z_n$$

де $Đ$ – прибуток; D – дохід; Z – загальні витрати; C – ціна продукції; $\grave{A}$ – кількість продукції; Z_i – витрати *i*- го виду*,* пов'язані з випуском продукції. Якщо вважати питомими витратами за напрямком витрат, відповідно $\hat{A}_i$, то матимемо $Z_i = \hat{A}_i \grave{A}$.

Найпростішим варіантом аналізу моделі є вивчення динаміки вихідної змінної $Đ$ залежно від динаміки характеристик середовища, тобто від зміни вхідних змінних (зовнішніх і внутрішніх параметрів) $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \ldots, \hat{A}_n, \grave{A}, \tilde{N}_1$.

Підприємство ТОВ «Контур» бере в оренду копіювальну техніку і передає її в користування різним організаціям і приватним особам. Підприємство отримує плату *C* за кожну копію, але покриває експлуатаційні (витратний матеріал, ремонт і обслуговування машин і т.д.) розміром *Z.* Воно також оплачує користувачам техніки за оренду приміщення для кожної машини Z, за оренду машин та інші фіксовані витрати, пов'язані з організацією виробничого процесу. В межах свого бізнес-плану керівництво підприємства прийняло припущення, представлені у таблиці 9.1.

Таблиця 9.1

Характеристики економічної ситуації підприємства

Економічні показники	Числові значення	Позначення
змінна продуктивність однієї машини (шт. за одну зміну)	6000	а
витрати на одну копію (витратний матеріал, ремонт і обслуговування машин і т.д.), (грн.)	0,07	Z
ціна однієї копії (грн.)	0,15	C
щомісячна орендна плата за приміщення для однієї машини (грн.):	200	Z_1
щомісячна орендна плата за машин (грн.):	150	Z_2
витрати на інкасацію грошей з однієї машини (грн.):	55	Z_3
– інші фіксовані витрати на одну машину(грн.):	50	Z_4

Економічні характеристики варіантів виробничих стратегій представленої у таблиці 9.2.

Таблиця 9.2

Економічні характеристики виробничих стратегій

Означення змінних і параметрів	Варіант 1	Варіант 2	Варіант 3
Кількість копій на одну зміну, (шт.)	6000	6000	6000
Ставка орендної плати на 1 машину за місяць, (грн.)	200	150	100
Ставка комісійних з розрахунку на одну копію, (грн.)	–	0,01	0,02
Мінімальна кількість копій на одну зміну для нарахування комісійних			4000
Валовий дохід	1200	1200	1200
Визначені комісійні	–	60	40
Прибуток	325	315	385

Постійні витрати на 1 машину (грн.):

$$Z = Z + Z + Z_4 + Z_5 = 200 + 150 + 55 + 50 = 455 \text{ грн.}$$

Чистий дохід від одиниці продукції(грн.)

$$\tilde{N} - Z_1 = 0,2 - 0,07 = 0,13 \text{ грн.}$$

Загальний дохід від експлуатації однієї машини (грн.)

$$a \cdot C = 6000 \cdot 0,2 = 1200 \text{ грн.}$$

Виробничі витрати на виконання загального обсягу робіт однією машиною (грн.):

$$a \cdot Z_1 = 6000 \cdot 0,07 = 420 \text{ грн.}$$

Чистий дохід від виконання загального обсягу робіт однією машиною (грн.):

$$aC - aZ = a(C - Z) = 6000 \cdot (0,2 - 0,07) = 780 \text{ грн.}$$

Прибуток (без сплати податків) (грн.):

Варіант 1.

$$\eth_1 = a(C - Z) - Z_3 - Z_4 - Z_5 - Z_2 = 6000(0,2 - 0,07) - 200 -$$
$$-150 - 55 - 50 = 325 \tilde{a}\eth\acute{i}$$

Варіант 2

$$\eth_2 = a(C - Z_1) - Z_2 - Z_3 - Z_4 - Z_5 - Z_6 =$$
$$= 6000(0,2 - 0,07) - 150 - 150 - 55 - 50) - 60 = 315\tilde{a}\eth\acute{i}\,.$$

Варіант 3

$$\eth_3 = a(C - Z_1) - Z_2 - Z_3 - Z_4 - Z_5 - Z_6 =$$
$$= 6000(0,2 - 0,07) - 100 - 150 - 55 - 50 - 40 = 385\tilde{a}\eth\acute{i}\,.$$

З розглянутих варіантів найкращим є останній. В цій моделі обсяги випуску продукції $\grave{A}$ і ціну на неї $\tilde{N}$ вважають незалежними величинами, що не завжди є правильним.

9.2. Оптимізація вибору ефективних виробничих ресурсів

Вибір економічно доцільних виробничих ресурсів ґрунтується на оцінці впливу цих ресурсів на рівень економічного ефекту від реалізації продукції, у виготовленні якої застосовують цей ресурс. Показник доцільності виробничого використання ресурсу ґрунтується на трьох групах характеристик – нормативні, технічні і економічні. Цей показник вдало відображає взаємодію вартісних і виробничих характеристик. Конкурентоспроможність ресурсу можна визначити такою залежністю:

$$k_{ls} = \frac{e_l}{e_s}, \tag{9.3}$$

де k_{ls} – коефіцієнт конкурентоспроможності l-го ресурсу в порівнянні з s-им ресурсом, e_l, e_s – економічний ефект від виробничого застосування одиниці ресурсу відповідно l-го і s-го видів. Одним з найпростіших варіантів обчислення k_{ls} можна обрати наступний:

$$k_{ls} = \frac{P_s}{P_l}, \tag{9.4}$$

де P_s і P_l – ціни ресурсів відповідно s-го і l-го видів. Обчислюють доцільність виробничого використання ресурсу в економічній літературі так:

$$d_l = \frac{P\alpha_{1l} + \beta_l}{P_l + \gamma_l^1 + \gamma_l^2 - \gamma_l^3}, \tag{9.5}$$

де d_l – характеристика доцільності виробничого використання l-го ресурсу, α_{1l} – кількість одиниць продукції, що забезпечується одиницею ресурсу l-го виду; P – ціна одиниці продукції, що використовує l-ий вид ресурсу; β_l – дохід від продажу за межі підприємства побічних продуктів, що забезпечуються одиницею l-го виду ресурсу; P_l – ціна одиниці l-го виду ресурсу; γ_l^1 – невиробничі витрати виробника, пов'язані з використанням одиниці l-го виду ресурсу; γ_l^2 – витрати виробника пов'язані з використанням одиниці l-го виду ресурсу; γ_l^3 – витрати на утилізацією внаслідок використання одиниці ресурсу l-го виду.

У запропонованій методиці визначення рівня конкурентоспроможності виробничого ресурсу, в якій розподілені його характеристики на три групи, передбачають розрахунок показника конкурентоспроможності ресурсу за кожною групою цих характеристик. Цей показник за *нормативними* характеристиками можна визначити так:

$$k_\rho^H = \prod_{j \in M_1} \lambda_{\rho j} h_{\rho j} \prod_{j \in \bar{M}_1} \lambda_{\rho j} \frac{1}{h_{\rho j}}, \qquad \rho = 1, 2, ..., R, \tag{9.6}$$

де k_ρ^H – показник конкурентоспроможності ρ-го ресурсу за нормативними характеристиками; R – кількість видів ресурсів, що беруть участь в розрахунках;

$h_{\rho j}$ – значення j-ої характеристики ρ-го ресурсу. Якщо значення цієї характеристики для ресурсу допустиме, то її прирівнюють до одиниці, в інших випадках – вона дорівнює нулю; $\lambda_{\rho j}$ – ваговий коефіцієнт, що свідчить про рівень важливості даної характеристики і його значення знаходиться в межах від 0 до 1; M_1 – множина позитивних (сприятливих) нормативних характеристик, $\bar{\mathrm{M}}_1$ – множина негативних нормативних характеристик.

Очевидно, що у випадку невідповідності ресурсу допустимим нормам хоча б за однією характеристикою, k_ρ^H буде дорівнювати нулю.

Показник конкурентоспроможності ресурсу за *технічними* характеристиками визначають так:

$$k_\rho^m = \sum_{j \in \mathrm{M}_2} \lambda_{\rho j} h_{\rho j} - \sum_{j \in \bar{\mathrm{M}}_2} \lambda_{\rho j} h_{\rho j}, \tag{9.7}$$

де k_ρ^m – показник конкурентоспроможності ρ-го ресурсу за технічними характеристиками; M_2 – множина позитивних технічних характеристик; $\bar{\mathrm{M}}_2$ – множина негативних технічних характеристик.

Економічним показником конкурентоспроможності ресурсу виступає величина витрат виробника на використану одиницю даного виду ресурсу і розраховуються ці витрати таким чином:

$$k_\rho^e = \tilde{P}_\rho = P_\rho + \gamma_\rho^4 + \gamma_\rho^5 + \gamma_\rho^6 + \gamma_\rho^7 + \gamma_\rho^8 + \gamma_\rho^9, \tag{9.8}$$

де k_ρ^e – показник конкурентоспроможності ресурсу за економічними характеристиками; $\tilde{P}_\rho$ – витрати виробника на використання одиниці ρ-го ресурсу; P_ρ – ціна одиниці ρ-го ресурсу; γ_ρ^4 – витрати на транспортування одиниці ρ-го ресурсу; γ_ρ^5 – витрати на зберігання одиниці ρ-го ресурсу; γ_ρ^6– витрати на виготовлення необхідної документації з розрахунку на одиницю ρ-го ресурсу;

γ_ρ^7 – витрати на догляд за ресурсом в процесі його використання (з розрахунку на одиницю кількості); γ_ρ^8 – витрати на утилізацію після закінчення терміну використання ресурсу (з розрахунку на одиницю кількості); γ_ρ^9 – витрати на податки, митні збори, страхування (з розрахунку на одиницю кількості).

Очевидно «ідеальним» ресурсом $\hat{\rho}$ вважають той, що має найкращі показники конкурентоспроможності, тобто:

$$k_{\hat{\rho}}^{\text{Н}} = \max_{\rho}\left\{\prod_{j\in \text{M}_1}\lambda_{\rho j}h_{\rho j}\prod_{j\in \bar{\text{M}}_1}\lambda_{\rho j}\frac{1}{h_{\rho j}}\right\},\quad \rho=1,2,..R; \tag{9.9}$$

$$k_{\hat{\rho}}^{m} = \max_{\rho}\left\{\sum_{j\in \text{M}_2}\lambda_{\rho j}h_{\rho j}-\sum_{j\in \bar{\text{M}}_2}\lambda_{\rho j}h_{\rho j}\right\},\quad \rho=1,2,...R; \tag{9.10}$$

$$k_{\hat{\rho}}^{l} = \min_{\rho}\left\{\tilde{P}_{\rho}\right\},\quad \rho=1,2,...R,. \tag{9.11}$$

Такого ресурсу, для якого мають місце одночасно показники $k_{\rho_0}^{\text{Н}}, k_{\rho_0}^{m}, k_{\rho_0}^{l}$, реально може взагалі не існувати. На нашу думку оправданим можна вважати вибір ресурсу, для якого є найменшим відхилення його показників конкурентоспроможності від аналогічних показників «ідеального» ресурсу, тобто:

$$\Delta\rho_0 = \min_{\rho}\Delta\rho = \sqrt{\left(k_{\hat{\rho}}^{H}\right)-\left(k_{\rho}^{H}\right)^2+\left(k_{\hat{\rho}}^{m}-k_{\rho}^{m}\right)^2+(k_{\hat{\rho}}^{l}-k_{\rho}^{l})^2}\,, \tag{9.12}$$

де $\Delta\rho_0$ – середньоквадратичне відхилення показників конкурентоспроможні оптимального ресурсу ρ_0; $\Delta\rho$ – середньоквадратичне відхилення показників конкурентоспроможності ресурсів ρ від аналогічних показників «ідеального» ресурсу $\hat{\rho}$. Після опису основних положень методу оцінки ефективності ресурсу проаналізуємо достовірність і обґрунтованість отриманих за його допомогою основних оцінок рівня конкурентоспроможності.

На нашу думку, показник k_ρ^m є головним в даному методі, оскільки відображає міру відповідності аналізованого ресурсу вимогам виробництва. Він забезпечує встановлені технічні параметри продукції та технології її виробництва. В нашому випадку вважають, що чим більша величина показника k_ρ^m, тим повніше задовольняються технологічні вимоги виробника.

Вибір і встановлення пріоритетності будь-якої характеристики для ресурсу ρ, що задається ваговим коефіцієнтом $\lambda_{\rho j}$, дає змогу врахувати якісні чинники через конкретні експертні оцінки. В даному методі можна врахувати часовий чинник, який, на нашу думку, допоможе точніше відобразити динаміку витрат при використанні ресурсу. На конкурентоспроможність ресурсу поряд з технічними характеристиками мають вплив також умови оплати і тривалість гарантійного терміну, рівність виконання взятих зобов'язань постачальником і інше. Чинники, які носять якісний характер, можуть бути в певній мірі враховані за допомогою методів нечіткої логіки.

9.3. Моделювання визначення обсягу виробництва продукції

Стан підприємства характеризується його виробничо-господарською та фінансовою діяльністю, суть якої полягає у виробництві продукції і забезпеченні виконання відповідних зобов'язань перед споживачами. Обсяги випуску та реалізації продукції та її ціна є визначальними при оцінці функціонування підприємства. Однією з цілей цього функціонування є отримання максимального прибутку при існуючих виробничих можливостях підприємства та ситуаціях на ринках продукції та ресурсів. Слід зауважити, що виконання встановлених договірних зобов'язань радикально впливає на фінансовий стан підприємства та на формування у перспективі його портфеля замовлень [72].

Суть задачі визначення оптимальних обсягів виробництва продукції полягає в наступному. Підприємство має змогу розпоряджатися ресурсами R видів, обсяги кожного з яких на початок періоду t, $t = 1,2,...,T$, визначають величиною D_{rt}^1. Підприємство може залучити додатковий обсяг ресурсу r-го виду y_{rt}^2 в підперіод t за ціною P_{rt}^2. Економіко-математична модель цієї задачі пропонується в такому вигляді:

1) Обмеження на змогу використання ресурсу r-го виду у підперіод t:

$$D_{rt}^1 = D_{rt-1}^1 + y_{rt-1}^2 - \sum_{j=1}^{n} \beta_{rj}^2 x_{jt-1}, \quad r = 1,2,...,R; \quad t = 1,2,...,T \qquad (9.13)$$

де x_{jt} – інтенсивність j- го технологічного способу в підперіод t; β_{rj}^2 – використання r-го виду ресурсу з розрахунку на одиничну інтенсивність j-го технологічного способу; y_{rt-1}^2 – поступлення r-го ресурсу в підперіоді $t-1$.

2) Реалізація продукції, що виробляється підприємством, відбувається виключно з його складів і лімітується наявністю на цих складах. Обмеження обсягів реалізації продукції кожного виду в кожному підперіоді можна записати у такому вигляді:

$$\sum_{k=1}^{K} y_{ikt}^1 \le A_{it-1}^2 + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}^1 x_{jt-1} - \sum_{k=1}^{K} y_{ikt-1}^1, \quad i = 1,2,...,m; \quad t = 1,2,...,T, \qquad (9.14)$$

де A_{it-1}^2 – запас продукції i-го виду на складі на початок періоду $t-1$; β – виробництво продукції i-го виду з розрахунку на одиничну інтенсивність j-го технологічного способу; y_{ikt-1}^1 – обсяг продукції i-го виду, відправленої k-му споживачеві відповідно до договірних зобов’язань.

3) Умова необхідності виконання договірних зобов’язань:

$$\sum_{\tau=1}^{t} y_{ik\tau}^{1} = A_{irt}^{1}, \quad i = 1,2,...,m; \quad t = 1,2,...,T; \quad k = 1,2,...,K \qquad (9.15)$$

де $y_{ik\tau}^{1}$ – обсяг продукції i-го виду, відправленої k-му споживачеві у підперіод τ; A_{irt}^{1} – загальний обсяг продукції i-го виду, що відповідно до договірних зобов'язань необхідно поставити r-му споживачеві не пізніше періоду t.

4) Витрати на зберігання виробничих ресурсів на протязі підперіоду t:

$$M_t^1 = \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^{R} \alpha_{rt}^{1} \left(y_{rt}^{2} + \sum_{j=1}^{n} \beta_{rj}^{2} x_{jt} \right) + \sum_{r=1}^{R} \alpha_{rt-1}^{1} D_{rt}^{2} \right], \quad t = 1,2,...,T, \qquad (9.16)$$

де M_t^1 – сумарні витрати на зберігання виробничих ресурсів на протязі одного підперіоду t; α_{rt}^{1} – плата за зберігання виробничих ресурсів, з розрахунку на одиницю їх вартості, на протязі одного підперіоду.

5) Витрати на зберігання готової продукції розраховують аналогічно:

$$M_t^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{it}^{2} \left[A_{it}^{2} + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}^{1} x_{jt} \sum_{k=1}^{K} y_{ikt} \right) \right], \quad t = 1,2,...,T, \qquad (9.17)$$

де M_t^2 – сумарні витрати на зберігання готової продукції на протязі одного періоду; α_{it}^{2} – плата за зберігання одиниці продукції i-го виду на протязі періоду t .

Технологічні способи і весь виробничий процес повинен бути забезпечений відповідними виробничими потужностями.

6) Обмеження на необхідність забезпечення виробничого процесу відповідними виробничими потужностями:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{lj}^{7} x_{jt} \le N_{lt} + \tilde{N}_{lt}, \quad l = 1,2,...,L; \quad t = 1,2,...,T, \qquad (9.18)$$

де N_{lt} – виробничі потужності l-го виду, що є в розпорядженні підприємства;

α_{lj}^{7} – потреба у виробничих потужностях l -го виду для забезпечення одиничної інтенсивності функціонування j-го технологічного способу; $\tilde{N}_{lt}$, – допустимий рівень розширення виробничих потужностей l-го виду у підперіод t.

Фінансове забезпечення діяльності підприємства складається з власних фінансових коштів і отриманих кредитів з погашенням у встановлений термін. Ці фінанси витрачають на виробничі ресурси, на функціонування відповідних технологій, на матеріали та енергоресурси, на заробітну плату та податкові і інші платежі у бюджет і таке інше. Для розрахунку витрати на виробництво продукції розділяють на дві принципово різні групи – змінні витрати, що залежать від обсягу виготовленої продукції (витрати на сировину, матеріали, заробітну плату виробничого персоналу з урахуванням податків і обов’язкових платежів на неї) і постійні витрати, що не залежать безпосередньо від обсягу виробленої продукції (витрати на: утримання приміщень і устаткування, оренду землі, охорону, енергоносії і заробітну плату невиробничого персоналу з урахуванням податків та інших платежів, службу маркетингу і таке інше). Таке трактування поділу витрат на фінансове забезпечення всього обсягу виробництва задіяними технологіями враховує реальні ринкові умови функціонування підприємства.

7) Умова фінансового забезпечення функціонування технологічних способів:

$$\sum_{j=1}^{n} V_{jt} x_{jt} + Z_t = \hat{O}_t^1 + \hat{O}_t^2 + \sum_{i=1}^{m} P_{it}^1 \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}^1 x_{jt}, \quad t = 1,2,...,T, \qquad (9.19)$$

де $\hat{O}_t^1$ – власні резервні фінансові кошти на початок періоду t; $\hat{O}_t^2$ – фінансові кошти на початок підперіоду t, що залучені за рахунок кредитів; P_{it} – ціна одиниці продукції i-го виду у підперіоді t; z – постійні витрати виробництва, що припадає на підперіод t; V_{jt} – змінні витрати виробництва, що припадають на одиничну інтенсивність j-го технологічного способу у підперіоді t.

В даному балансовому рівнянні фінансових коштів підприємства не враховують податок на прибуток. Необхідні витрати, що припадають на підперіод t, представлені у лівій частині балансового рівняння, а в його правій частині – наявні фінансові ресурси в цьому ж підперіоді. Це рівняння розкриває можливості підприємства придбати всі необхідні матеріальні ресурси для функціонування технологій з обраною інтенсивністю оплатити затраченої праці персоналу у виробничій і невиробничій сфері, зробити відрахування на компенсацію витрачених основних виробничих фондів, відшкодувати постійні витрати та виконати інші платежі.

8) Змінні витрати з розрахунку на одиничну інтенсивність j-го технологічного способу в підперіоді t:

$$V_{jt} = \sum_{r=1}^{R} P_{rt}^2 \beta_{rj}^2 x_{jt} + P_t^3 d_{jt}^1 + P_t^4 d_{jt}^2 + P_{\gamma t}^5 \left(1 + \gamma^1 + \gamma^2 + \gamma^3 + \gamma^4 + P_\gamma^6\right), \quad (9.20)$$

де P_{rt}^2 – ціна одиниці ресурсу r-го виду в підперіод t; d_{jt}^1 – витрати електроенергії на одиничну інтенсивність j-го технологічного способу в підперіод t; P_t^3 – ціна 1 квт електроенергії в підперіод t; d_{jt}^2 – витрати палива на одиничну інтенсивність j-го технологічного способу в підперіод t; P_t^4 – ціна палива в підперіод t; $P_{\gamma t}^5$ – витрати на заробітну плату працівників, що безпосередньо беруть участь у забезпеченні функціонування j-го технологічного способу з розрахунку на одиничну інтенсивність у підперіод t; γ^1 – індекс відрахувань у Пенсійний фонд; γ^2 – індекс відрахувань у фонд соціального страхування; γ^3 – індекс відрахувань у фонд медичного страхування; γ^4 – індекс відрахувань у

Державний фонд зайнятості; P_j^6 – вартість оборотних засобів, що припадають на одиничну інтенсивність j-го технологічного способу.

9) Постійні витрати, що припадають на підперіод t:

$$\begin{gathered}Z_t = P_{t-1,t}^7(1+\alpha_t^1) + P_t^8 + P_t^3 \cdot d_t^3 + P_t^4 \cdot d_t^4 + P_t^9 + P_t^{10} + P_t^{11} + \\ + P_t^{12}\left(1+\gamma^1+\gamma^2+\gamma^3+\gamma^4\right) + P_t^{13} + P_t^{14}\,,\end{gathered} \tag{9.21}$$

де $P_{t-1,t}^7$ – сума погашення кредиту в підперіоді t, узятого в попередні підперіоди; P_t^8 – витрати на електроенергію, що використана на невиробничі цілі у підперіоді t; d_t^4 – витрати палива на невиробничі цілі в підперіоді t; P_t^9 – сума орендної плати, що припадає на підперіод t; P_t^{10} – видатки на телефонне обслуговування у підперіоді t; P_t^{11} – видатки на охорону у підперіоді t; P_t^{12} – витрати на заробітну плату працівників, що не належать до сфери виробництва; P_t^{13} – обсяги амортизації відрахувань, що припадають на підперіод t; P_t^{14} – величина витрат на маркетинг і збут, що припадають на підперіод t.

10) Валовий прибуток підприємства P:

$$P = B^1 - B^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{T}\left(1-\delta_{it}\right)P_{it}^1 \cdot \beta_{ij}^1 x_{jt} - \sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{n} V_{jt} - \sum_{t=1}^{T} Z_t\,, \tag{9.22}$$

де δ_{it} – частка нереалізованої продукції i-го виду в підперіод t.

Його можна вирахувати, як різницю між валовим доходом B^1 (добуток виготовленої і реалізованої власної продукції та ціни на неї) і валовими витратами B^2 (сума постійних і змінних витрат виробництва). Ще валовий прибуток може бути розрахований через обсяги відправленої продукції споживачам, при умові їх повної оплати за неї, тобто його можна визначити так:

$$P = \sum_{t=1}^{T} \sum_{k=1}^{k} \sum_{i=1}^{m} P_{it} y_{ikt}^{1} - \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{n} V_{jt} - \sum_{t=1}^{T} Z_t . \qquad (9.23)$$

Даний вираз (як і попередній) є цільовою функцією описаної вище оптимізаційної задачі визначення оптимального обсягу виробництва продукції підприємства. Очевидно, що підприємство прагне його максимізувати.

Валовий прибуток підприємства може істотно відрізнятися від валового прибутку інших підприємств. У кожного підприємства є свої індивідуальні виробничі можливості і різні обсяги виробництва продукції, а це має безпосередній вплив на його фінансові показники.

9.4. Оптимізація фінансово-господарської програми підприємства

Виробниче підприємство – багатогранна економіко-виробнича система з складною внутрішньою структурою і з різноманітними взаємозв’язками між її елементами, яка забезпечує своє функціонування цілеспрямовано. Воно є також складовою частиною економічної системи. Тому параметри, які характеризують стан підприємства, досить чисельні і певною мірою взаємозв’язані. Для вибору рішень при управлінні підприємством, для розроблення їх раціональних варіантів є потреба прогнозувати ситуацію і впливати на неї для спрямування господарської діяльності у потрібне русло. Через те, що у будь-якому господарському чи технологічному процесі є фінансовий аспект, через фінансову діяльність можна впливати на функціонування підприємства в цілому. З цих причин, зрозумілим є бажання відобразити функціонування підприємства з точки зору системного підходу, а саме: виробництво продукції, забезпечення виробничого процесу ресурсами і збут продукції з врахуванням кон’юнктури ринку, вибір технологій, технічний розвиток, управління фінансово-господарською діяльністю, управління взаємовідносинами з постачальниками ресурсів і споживачами виробленої продукції і т.д. [72]

Необхідно, щоб функціонування підприємства відповідало діям єдиної системи управління підприємством і управління фінансовою діяльністю було складовою цієї системи та опиралося на єдину інформаційну базу і загальні принципи математичного і програмного забезпечення всіх підсистем системи управління. Заважає цьому відсутність єдиної методики управління фінансами, нестабільність кредитної системи, волюнтаристське втручання у фінансово-господарську діяльність підприємства з боку держави. Все це є перешкодою у створенні і використанні комп'ютерних технологій, але разом з тим при таких різких і частих змінах регламентуючих документів управляти фінансово-господарською діяльністю на підприємстві неможливо без використання комп'ютерних технологій. Система обробки економічної інформації як складова частина системи організаційного управління за допомогою сучасних технічних засобів повинна здійснювати опрацювання бухгалтерської, статистичної і фінансової інформації: нагромаджувати, зберігати, вести пошук, підготовку і видачу необхідних повідомлень про економічний стан підприємства у динаміці, а це є базою для розроблення науково обґрунтованих прогнозів перспектив розвитку економічної ситуації на підприємстві.

Повідомлення про реальний економічний стан підприємства, технічні засоби обробки інформації, економіко-математичні моделі оптимізації виробничо-господарської діяльності підприємств забезпечують змогу оптимізації оперативного управління, що є невід'ємною складовою покращення ефективності виробництва.

Створення комп'ютерних технологій управління підприємством, як і їх складової частини – комп'ютерних технологій управління фінансами, вимагає чіткого формулювання комплексу задач управління підприємством, стандартизації управління. Стандартизація управлінської діяльності дає змогу користуватися набутим досвідом, існуючим математичним і програмним забезпеченням, що значно здешевлює розроблення і експлуатацію систем управління.

Сучасні умови розвитку економіки країни і значне розширення зовнішньоекономічних зв'язків підприємств робить надзвичайно актуальним перехід на міжнародні стандарти в управлінні фінансовою діяльністю підприємства. Таке узгодження також дає змогу скористатися зарубіжним досвідом і готовими розробками для математичного і програмного забезпечення, моделями бази даних системи управління.

Створення моделі бази даних управління фінансами вимагає чіткого визначення і опису всіх складових елементів бази даних, а також форм і видів вхідної і вихідної документації, яка забезпечує управління фінансами підприємств [24].

Суть виробничого процесу підприємства полягає у виконанні основної групи замовлень на підставі наперед укладених угод. Розглянемо економіко-математичну модель, яка, на нашу думку, достатньо адекватно відображає виробничо-господарську ситуацію на підприємстві. Суть цієї ситуації є такою. Виконавцями виступають бригади, працівники якої характеризуються однаковими можливостями. Одне замовлення виконується тільки одним виконавцем. Після виконання замовлення бригада має два реабілітаційних дні. Паралельно з виконанням основної групи замовлення виконавець може виконувати одне замовлення допоміжної групи. Замовлення характеризується доходом, собівартістю, прибутком, штрафом (у випадку невиконання завдання на протязі планового періоду та у випадку затримання початку виконання). Виконання замовлення триває без перерви від початку до його завершення.

Поряд з основними виконавцями замовлень виробничий процес забезпечують виконавці допоміжної групи, які здійснюють необхідне обслуговування технічних засобів. Функціональні обов'язки виконавців допоміжної групи забезпечення здійснюють у вільний час від виконання своїх основних обов'язків виконавці основної групи. Виконавців допоміжної групи повинно бути не менше від найбільшої потреби в дні планового періоду. У вільний від виконання основних обов'язків час виконавці основної групи зайняті на обслуговуванні інших другорядних замовлень.

Задача полягає у календаризації розподілу пакета замовлень за виконавцями в межах планового періоду з метою отримання максимального сумарного прибутку.

Прийняті позначення в даній задачі:

m – кількість угод; A_i – кількість замовлень i-ої угоди (замовлення однієї групи є однотипними); B_k – кількість виконавців k-го виду (їх кількість є постійною на протязі планового періоду); j – порядковий номер виконавця; K – кількість видів виконавців; P_{ikj} – прибуток від виконання замовлення i-ої угоди j-им виконавцем k-го виду; $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}$ – відповідно дохід і витрати, пов'язані з виконанням одного допоміжного замовлення; $\eta^{(3)}$ – витрати на результативний пошук одного допоміжного замовлення; β – середні витрати на підготовку одного працівника з допоміжної групи забезпечення виконання замовлень; α_i – штраф за невиконання одного замовлення i-ої угоди; a_{ik}= 1 або 0 – елемент матриці характеристик можливостей виконання замовлень виконавцями; ω_i – нормативна тривалість (в днях) виконання одного замовлення i-ої угоди; τ_i – день початку виконання i-го замовлення; t – день планового періоду; T – тривалість планового періоду; x^t_{ikj} – ознака того, чи закріплений j-й виконавець k-го виду за замовленням i-ої угоди; ($x^t_{ikj}=1$), чи не закріплений ($x^t_{ikj}=0$) у день t планового періоду; y – кількість виконавців допоміжної групи підтримки виконання основних замовлень; z – середньодобова кількість допоміжних замовлень.

Економіко-математична модель цієї задачі має наступний вигляд.

1) Цільова функція (сумарний прибуток):

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{K}a_{ikj}\sum_{j=1}^{B_k}\left[p_{ikj}x_{ikj}^{1}+p_{ikj}x_{ikj}^{1+\omega_i+2}+\ldots+p_{ikj}x_{ikj}^{1+\left[\frac{T-1}{\omega_i+2}\right](\omega_i+2)}\right]-$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\left[A_i-\sum_{k=1}^{K}a_{ik}\sum_{j=1}^{B_k}\left[x_{ikj}^{(1)}+x_{ikj}^{1+\omega_i+2}+\ldots+x_{ikj}^{1+\left[\frac{T-1}{\omega_i+2}\right](\omega_i+2)}\right]\right]-$$

$$-\beta-Tz(\eta^{(1)}-\eta^{(2)}-\eta^{(3)})\to\max \qquad (9.24)$$

Обмеження:

2) Замовлень, призначених на виконання у кожний день планового періоду не може бути більше від наявних виконавців:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{B_k}x_{ikj}^{t}\le B_k\,;\quad t=1,\ldots,T;\;\; k=1,\ldots,K \qquad (9.25)$$

3) Кожний виконавець в день t ($t=1,..,T$) може виконувати лише одне замовлення або жодного, відповідно, замовлення в день t ($t=1,..,T$) може виконуватися лише одним виконавцем, або не виконуватися зовсім, що забезпечується виконанням таких відповідних умов

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ik}x_{ikj}^{t}\le 1\,;\;\; k=1,\ldots,K;\;\; j=1,\ldots,B_k;\;\; t=1,\ldots,T;$$

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{B_k}\alpha_{ik}x_{ik}^{t}\le 1;\; t=1,\ldots,T;\;\; i=1,\ldots,m; \qquad (9.26)$$

4) Виконаних замовлень відповідної угоди може бути не більше від зазначеної кількості:

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{B_k}(x_{ikj}^{1}+x_{ikj}^{1+\omega_i+2}+x_{ikj}^{1+2(\omega_i+2)}+\ldots+x_{ikj}^{1+\left[\frac{T-1}{\omega_i+2}\right](\omega_i+2)})\le A_i\,,\; i=1,\ldots,m \qquad (9.27)$$

5) Кількість виконавців допоміжної групи повинно бути не менше від

найбільшої потреби в дні планового періоду

$$y > \max_t \left\{ \sum_{k=1}^{K} \left[B_k - \sum_{j=1}^{B_k} [x_{ikj}^1 + x_{ikj}^{1+\omega_i+2} + x_{ikj}^{1+2(\omega_i+2)} + \ldots + x_{ikj}^{1+\left[\frac{T-1}{\omega_i+2}\right](\omega_i+2)}] \right] \right\} \quad (9.28)$$

6) Кількість додаткових замовлень повинно бути не більше, ніж основних замовлень

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{B_k} (x_{ikj}^1 + x_{ikj}^{1+\omega_i+2} + x_{ikj}^{1+2(\omega_i+2)} + \ldots + x_{ikj}^{1+\left[\frac{T-1}{\omega_i+2}\right](\omega_i+2)}) \geq z \qquad (9.29)$$

7) Виконання замовлення повинно здійснюватися неперервно до його завершення

$$\sum_{i=\tau_i}^{\tau_i+\omega_i} x_{ikj}^t = \lambda \text{, де } \lambda = \begin{cases} \omega_i, & \text{ÿêù î } \tau_i \geq T - \omega_i; \\ T - \omega_i, & \text{ÿêù î } \tau_i < T - \omega_i; \end{cases} \qquad (9.30)$$

Показник ω_i включає чисту потребу часу для виконання i-го замовлення, а збільшення цієї потреби на два дні (ω_i+2) є необхідним для дводенної реабілітації виконавців після закінчення замовлення.

При формуванні пакету замовлень варто оцінити доцільність поповнення портфеля новими угодами і ризиком додаткових витрат у вигляді штрафів за несвоєчасне виконання замовлень, додаткового залучення виконавців та їх підготовки.

9.9. Аналіз кредитного ризику підприємства

Аналіз кредитного ризику підприємства проводять шляхом визначення оцінки діяльності виробника (позичальника) ще до вирішення питань про можливість надання кредиту. Тобто прогнозують здатність і готовність позичальника повернути борг згідно умов кредитного договору. У деяких питаннях оцінюють обґрунтованість використання кредиту, а також доцільність подальших відносин обох сторін кредитного договору.

Кредитний ризик виникає у процесі ділового спілкування позичальника з кредиторами (банки, фінансові заклади). Величину цього ризику визначають мірою кредитної і платіжної здатності підприємства, тобто здатності виконувати своєчасно і повністю платіжні зобов'язання, повернення кредиту, мобілізації своїх грошових засобів. Оцінка кредитного ризику вимагає застосування відповідного інструментарію для аналізу фінансового стану підприємства на даний час і у перспективі, вироблення пропозицій щодо зниження кредитного ризику.

Подання заявки на отримання кредиту є основою для перевірки кредитоспроможності підприємства, для складання кредитного договору, для складання угоди про забезпечення кредиту. Мета такої перевірки – оцінка ризику, пов'язаного з кредитуванням.

Нехай таких позичальників у кредитора є n ($j=1,2,...,n$), загальна сума кредиту у кредитора рівна A, x_j – кредит j-му позичальнику, $y_j=f_j(x_j)$ – величина очікуваного економічного ефекту, який отримає кредитор від j-го позичальника. Ця функція є різною для кожного позичальника через різний його кредитний ризик, а $z_j=\varphi_j(x_j)$ – величина очікуваних витрат, що є наслідком прийнятого рішення про виділення j-му позичальнику кредиту у розмірі x_j. Функцію, яка визначає величину ризику при взаємодії з j-им позичальником позначимо через $k_j=r(z_j,y_j)$.

Можна припустити, що ця функція має такі властивості:

$$r(tz_j, y_j) = tr(z_j, y_j); \quad r(z_j, ty_j) = 1/t(r(z_j, y_j))$$

Загальний вигляд задачі оптимізації розподілу кредитів можна записати так:

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \to \max \tag{9.31}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \le A \tag{9.32}$$

$$x_j \ge 0, j = 1..n \tag{9.33}$$

або

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x_j) \to \min \tag{9.34}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = A \tag{9.35}$$

$$x_j \ge 0, \qquad j=1,...,n \tag{9.36}$$

Але якщо j-й позичальник подає заявку на кредит у розмірі R_J, то задача оптимізації розподілу кредиту може виглядати так:

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(R_j)\omega_j \to \max \tag{9.37}$$

$$\sum_{j=1}^{n} R_j \omega_j \le A \tag{9.38}$$

$$\omega_j = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}, \quad j=1,...,n \tag{9.39}$$

У випадку необхідності врахування ще й різні види кредитування, будемо мати задачу оптимізації (9.31)–(9.33) у такому вигляді:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_j} f_{ij}(x_{ij}) \to \max \tag{9.40}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_j} x_{ij} \le A \tag{9.41}$$

$$\sum_{i=1}^{m_j} x_{ij} \le 1, j = 1..n \qquad (9.42)$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad i=1,...,m_i\,; j=1,...,n \qquad (9.43)$$

де m_j – кількість можливих видів кредитування, які потребує j-ий позичальник; x_{ij} – обсяг кредиту i-го виду для j-го позичальника.

Адекватніше відображає ситуацію розподілу кредитів така економіко-математична модель:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m_j}(\mu_{ij} - k_{ij}\sigma_{ij}^2)x_{ij} \to \max \qquad (9.44)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m_j} x_{ij} \le A \qquad (9.45)$$

$$\sum_{i=1}^{m_j} x_{ij} \le 1, j = 1..n \qquad (9.46)$$

де μ_{ij} і σ_{ij}^2 – математичне очікування і дисперсія економічного ефекту від кредиту i-го виду наданого j-му позичальнику; k_{ij} – функція, яка визначає величину ризику при наданні j-му позичальнику кредиту i-го виду.

Також замість функції $r(z_j,y_j)$ в (9.44) можна використати коефіцієнт ризику [22].

9.6. Моделювання руху оборотних засобів

Рух оборотних засобів відображає виробничо-господарську ситуацію підприємства і має безпосередній вплив на його фінансовий стан. Потреба підприємства в оборотних засобах залежить від всього кругообігу оборотних засобів, щоденної зміни потреби підприємства в оборотних засобах, від якої залежать терміни оплати платіжних засобів, недотримання яких призводить до штрафних санкцій, а, значить, і до зменшення прибутків підприємства [6].

Виробничо-господарська та фінансова ситуації підприємства визначаються обсягами випуску і відвантаженням готової продукції. Ці показники є визначальними при нашому підході до побудови економіко-математичної моделі, яка забезпечила б оптимізацію виробничо-господарської та фінансової діяльності підприємства.

Змоделюємо вказані ситуації, виходячи з таких прийнятих нами припущень та вимог:

а) функціонування підприємства відбувається з метою отримання максимального прибутку при заданих обсягах виробничих потужностей, трудових ресурсів, транспортних засобів і конкретній ситуації на ринках продукції і ресурсів;

б) виконання взятих договірних зобов’язань має вплив на фінансове подання претензій щодо дотримання передбачуваних термінів поставок готової продукції споживачам, а також на формування у перспективі пакету замовлень;

в) споживачі здійснюють відповідні оплати своєчасно;

г) взаємозаміна видів сировини та ресурсів не передбачається;

д) припускається можливість одночасного випуску різних з допустимих видів продукції;

е) можливе одночасне виконання договірних зобов’язань для різних споживачів;

є) кількість днів у розрахунковому періоді на час проведення обчислень є фіксованою;

ж) всі необхідні матеріали надходять у виробництво на початку робочого дня;

з) кожний вид матеріалу надходить від одного постачальника.

Використані позначення:

t, τ – індекс календарного дня у розрахунковому періоді ($t, \tau = 1,2,...,T$); T – кількість календарних днів у розрахунковому періоді часу; i – індекс виду продукції ($i=1,...,m$); m – кількість видів продукції; l – індекс споживача ($l=1,...,L$); L – кількість споживачів; r – індекс виду ресурсу ($r=1,...,R$); R – кількість видів ресурсів; j – індекс технологічного способу ($j=1,...,n$); n – кількість допустимих до використання технологічних способів на підприємстві; y^1_{itl} – кількість готової продукції i-го виду, відвантаженої l-му споживачеві в день t; y^2_{itl} – кількість готової продукції i-го виду, відвантаженої l-му споживачеві, термін оплати якої не настав у день t; y^3_{it} – обсяг випуску продукції i-го виду у день t; y^4_{itl} – кількість продукції i-го виду, яка направлена на підготовку для відправлення l-му споживачеві у день t; x_{jt} – інтенсивність j-го технологічного способу у день t; P^1_{it} – ціна одиниці i-го виду продукції у день t; P^2_{rt} – ціна одиниці r-го виду ресурсу в день t; C_i – собівартість одиниці i-го виду продукції; A^1_{itl} – договірні зобов'язання на відвантаження готової продукції i-го виду l-му споживачеві в день t; φ_{il} – штраф за запізнення відвантаження одиниці продукції i-го виду l-му споживачеві; f^1 – величина ставки відсотка за кредит; W^1_t – величина нормальної кредиторської заборгованості по всіх ресурсах на початок дня t; α_1 – плата (відсоток) за кредит під розрахункові документи; γ_{ij} – кількість i-го виду продукції, отриманої при реалізації j-го технологічного способу з одиничною інтенсивністю; β_{rj} – кількість r-го виду ресурсу, використаного при реалізації j-го технологічного способу з одиничною інтенсивністю; τ^1_{il} – час (в днях) підготовки виробу i-го виду до відправлення l-му споживачеві;

τ_{il}^{2} – затримка (в днях) поступлення грошей на рахунок підприємства за *i*-у продукцію від *l*-го споживача; B_{rt}^{1} – наявність *r*-го ресурсу на початок дня *t* (в натуральних одиницях); Z_{rt}^{1} – поступлення *r*-го ресурсу в день *t* (в натуральних одиницях); τ_{i}^{3} – тривалість виробничого циклу випуску *i*-го виду продукції (в днях); A_{itl}^{2} – запас продукції *i*–го виду на складі на початок дня *t*, підготовлений до відправлення *l*-му споживачеві; Φ_{t}^{2} – вартість виробничих запасів на складі в день *t*; B_{t}^{2} – транспортний запас по всіх ресурсах у грошовому вираженні; τ_{r}^{4} – затримка прибуття *r*-го ресурсу порівняно з днем оплати за цей ресурс (в днях); M_{t}^{1} – оборотні засоби, вкладені у виробничі запаси на початок дня *t;* Φ_{it}^{4} – обсяг продукції *i*-го виду, яка знаходиться у незавершеному виробництві на початок дня *t;* W_{rt}^{2} – вартість *r*-го ресурсу, запущеного у виробництво на початок дня *t;* W_{t}^{2} – вартість ресурсів, взятих у виробництво на початок дня *t;* M_{t}^{3} – вартість оборотних засобів, вкладених у запаси готової продукції на складі та неоформлені відвантаження в день *t*; M_{t}^{2} – величина незавершеного виробництва, виходячи з вартості ресурсів, витрачених на нього на початок дня *t*; C_{i}^{1} – виробнича собівартість одиниці *i*-го виду продукції; C_{i}^{2} – повна собівартість одиниці *i*-го виду продукції; M_{t}^{4} – вартість відвантажених товарів, термін оплати за які ще не настав на початок дня *t;* τ_{i}^{5} – час, необхідний для оформлення документів на відвантаження продукції (в днях); D_{t} – сальдо платежів і надходжень від реалізації продукції на початок дня *t;* $\tilde{D}_{t}$ – платежі, залучені як оборотні кошти на початок дня *t*; D_{t}^{1} – надходження виручки від реалізації готової продукції в день *t;* $\tilde{D}_t^1$ – оплата товарно-матеріальних цінностей в день *t;* $\tilde{D}$ – сумарні кошти, потрібні на утримання оборотних засобів; $\tilde{D}_t^2$ – заробітна плата і соціальне страхування в день *t;* $\tilde{D}_t^3$ – амортизаційні відрахування згідно плану в день *t;* $\tilde{D}_t^4$ – інші виробничі платежі підприємства (електроенергія, опалення, водопостачання, платежі в рахунок прибутку, інші) *t;* M_t^5 – нормовані оборотні засоби на початок дня *t;* α_2 – коефіцієнт витрат на утримання виробничих запасів на складах (з розрахунку на одиницю вартості запасів); α_3 – коефіцієнт витрат на транспортні запаси на складах (з розрахунку на одиницю вартості запасів); α_4 – коефіцієнт витрат на незавершене виробництво (з розрахунку на одиницю продукції); α_5 – коефіцієнт витрат на утримання ресурсів, запущених у виробництво; α_6 – коефіцієнт витрат, пов'язаних з оборотними засобами, вкладеними у виробництво (з розрахунку на одиницю вартості); α_7 – коефіцієнт витрат, пов'язаних з відвантаженням неоплачених товарів (з розрахунку на одиницю вартості);

Економіко-математична модель

9. Величина прибутку:

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{L}\Big[(P_{it}^1 - C_i^2)y_{itl}^1 - \varphi_{il}(A_{itl}^1 - y_{itl}^1) -$$

$$-\frac{f^1}{T}(M_t^5 - W_t^1) - \frac{\alpha_1}{T}M_t^4\Big] \to \max$$

2. Використання ресурсів обмежене їх наявністю:

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_{rj}x_{jt+1} \le B_{rt}^1, \quad \begin{matrix} r = 1,2,...R \\ t = 1,2,...T \end{matrix}$$

3. Наявність ресурсу на початок робочого дня:

$$B^1_{rt+1} = B^1_{rt} + Z^1_{rt}, \quad \begin{array}{l} r = 1,2,...R \\ t = 1,2,...T \end{array}$$

4. Можливості по відвантаженню продукції споживачам:

$$y^1_{itl} \le A^2_{itl},\ i = 1,2,...m; \quad t = 1,2,...,T; \quad l = 1,2,...L$$

9. Наявність продукції на складі, підготовленої до відванта- ження споживачам:

$$A^2_{i\ t+1\ l} = A^2_{i\ t\ l} + y^4_{i\ t\ l-\tau^1_{i\ l}} - y^1_{itl},\ \begin{array}{l} i = 1,2,...m; \\ t = 1,2,...,T; \\ l = 1,2,...,L \end{array}$$

6. Можливості направлення продукції на підготовку до відвантаження споживачам:

$$\sum_{l=1}^{L} y^4_{i,t+1,l} \le \sum_{\tau=1}^{t} y^3_{i,\tau+1} - \sum_{\tau=1}^{t}\sum_{l=1}^{L} y^4_{i,\tau,l}, \quad \begin{array}{l} i = 1,2,...,m; \\ l = 1,2,...,L; \\ t = 1,2,...,T \end{array}$$

7. Кількість продукції відвантаженої споживачеві обмежена договірними зобов’язаннями:

$$\sum_{t=1}^{T} y^1_{itl} \le \sum_{t=1}^{T} A^1_{itl}, \quad \begin{array}{l} i = 1,2,...m; \\ l = 1,2,..L \end{array}$$

8. Вартість виробничих запасів на складі в день *t*:

$$\Phi^2_t = \sum_{r=1}^{R} P^2_{rt} \cdot B^1_{rt},\ t = 1,2,...,T$$

9. Транспортний запас у грошовому поданні:

$$B^2_t = \sum_{r\in M_1} P^2_{rt} \sum_{\tau=1}^{\tau^4_r} Z^1_{r\ t+\tau}, \quad \begin{array}{l} r = 1,2,...,R; \\ t = 1,...,T \end{array},$$

де M_1 – множина індексів r для яких $\tau_r^4 > 0$

10. Величина нормальної кредиторської заборгованості:

$$W_t^1 = \sum_{r \in M_2} P^2{}_{rt} \sum_{\tau=1}^{\tau_r^4} Z_{r\ t-\tau}^1 , \quad \begin{matrix} r = 1, 2, ..., R \\ t = 1, 2, ..., T \end{matrix} ,$$

де M_2 – множина індексів r, для яких $\tau_r^4 < 0$

19. Величина оборотних засобів, вкладених у виробничі запаси:

$$M_t^1 = \Phi_t^2 + B_t^2 , \ t = 1, 2, ..., T .$$

12. Обсяг продукції у незавершеному виробництві:

$$\Phi_{it}^4 = \sum_{\tau=1}^{\tau_i^3} y_{i\ t-\tau}^3 , \quad \begin{matrix} i = 1, 2, ..., m; \\ t = 1, 2, ..., T \end{matrix} .$$

13. Вартість ресурсів, запущених у виробництво:

$$W_t^2 = \sum_{r=1}^{R} W_{rt}^2 = \sum_{r=1}^{R} \sum_{j=1}^{n} P_{rt}^2 \beta_{rj} x_{jt} , \ t = 1, 2, ..., T .$$

14. Відвантажена продукція, але ще не оплачена:

$$y_{itl}^2 = \sum_{\tau=\tau_i^5+1}^{\tau_i^2} y_{i,t-\tau,l}^1 , \quad \begin{matrix} t = 1,2,...,T; \\ l = 1,2,...,L; \\ i = 1,2,...,m. \end{matrix}$$

19. Вартість незавершеного виробництва:

$$M_t^2 = \sum_{\tau=1}^{\tau_r^3} W_{t-\tau}^2 , \ t = 1, 2, ..., T .$$

16. Вартість оборотних засобів, вкладених у готову продукцію, яка знаходиться на складі і неоформлені відвантажувальні документ в день t:

$$M_t^3 = \sum_{i=1}^{m} C_i^1 \sum_{l=1}^{L} (A_{itl}^2 + \sum_{\tau=1}^{\tau_i^5} y_{i,t-\tau,l}^1) , \ t = 1, 2, ..., T .$$

17. Вартість відвантажених товарів, термін оплати яких не наступив на

початок дня *t*:

$$M_t^4 = \sum_{i=1}^{m} C_i^2 \sum_{l}^{L} y_{i\,t\,l}^2 \,,\; t = 1,2,...,T \,.$$

18. Вартість утримання оборотних засобів:

$$\tilde{D} = \sum_{t=1}^{T} (\alpha_2 \Phi_t^2 + \alpha_3 B_t^2 + \alpha_4 M_t^2 + \alpha_5 W_t^2 + \alpha_6 M_t^3 + \alpha_7 M_t^4)\,,$$

19. Забезпеченість випуску продукції технологічними способами:

$$y_{it}^3 = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} x_{jt} \,,\quad \begin{array}{l} i = 1,...,m; \\ t = 1,...,T \end{array} \quad .$$

20. Кількість продукції, яка проходить підготовку для відвантаження споживачам:

$$y_{itl}^4 = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\tau=1}^{\tau_{il}^1} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} x_{j\;t-\tau} & ,\text{ ø ” } \tau_{il}^1 > 0 \\ \quad 0 & ,\text{ ø ” } \tau_{il}^1 = 0 \end{cases} \;. \quad \begin{array}{l} t = 1,2,...,T; \\ l = 1,2,...,L; \\ i = 1,2,...,m. \end{array}$$

29. Кількість продукції, відвантаженої споживачам

$$y_{itl}^1 = \min\left\{ A_{itl}^2 - y_{itl}^4 + y_{it}^3 \text{-} \tau_{il}^1 \;,\, A_{itl}^1 \right\},\quad \begin{array}{l} i = 1,2,...,m\;; \\ t = 1,2,...,T\;; \\ l = 1,2,...,L\;. \end{array}$$

Варто зауважити, що нормовані оборотні засоби на початок дня *t* можна вирахувати таким чином:

$$M_t^5 = M_t^1 + M_t^2 + M_t^3,\;\; t = 1,2,...,T\,,$$

а сальдо платежів і поступлень від реалізації на початок дня *t* визначають так:

$$D_{t+1} = D_t \;+ D_t^1 - \tilde{D}_t^1 - \tilde{D}_t^2 - \tilde{D}_t^3 - \tilde{D}_t^4,\; t = 1,2,...,T$$

Наявні запаси ресурсів и Z_{rt}^1 можна визначити за допомогою оптимізаційної моделі згідно з методами теорії управління запасами та згідно оцінки кон'юнктури на відповідному ринку. Вважають, що використання ресурсів і готової продукції відбувається тільки через склад.

Дана економіко-математична модель може використовуватись як базова для побудови економіко-математичних моделей, за допомогою яких можна оптимізувати застосування фінансово-кредитних можливостей конкретного виробничого підприємства і в першу чергу здійснювати аналіз оборотних засобів та забезпечувати їх ефективне використання.

9.7. Оптимізація вибору товару з врахуванням області звичок споживача

Суть теорії області звичок, яку в 1980 р. запропонував Yu [21], полягає в тому, що протягом життя в кожної людини встановлюються певні звички, які суттєво впливають на поведінку людини, спосіб життя, процеси прийняття рішень. Сукупність таких звичок називатимемо областю звичок. Опираючись на область звичок було запропоновано концепції аналізу так званої множини можливостей. Множина можливостей складається з ідей, знань, інформації, вмінь особи, що приймає рішення (ОПР).

Відповідно до відношення множини набутих можливостей ОПР і множини, яка потрібна для вирішення проблеми, процеси прийняття рішень можна поділити на чотири категорії:

– прості проблеми – множина можливостей, потрібних для успішного розв'язання проблеми, добре відома і ОПР володіє нею;

– складні проблеми – складаються з декількох простих підпроблем;

– нечіткі проблеми – множина необхідних можливостей є не повністю визначеною для ОПР. Іншими словами, ОПР не володіє повним набором вмінь для розв'язання проблеми;

– невизначені проблеми – множина необхідних можливостей невідома або частково відома ОПР.

Нехай перед споживачем стоїть проблема *P*, яка полягає у виборі товару чи послуги. Для її розв'язання треба визначити простір властивостей певного товару чи послуги, тобто визначити переваги порівняно з іншими товарами та послугами. Переваги можуть бути позитивними та негативними.

Надалі введемо такі позначення: *S* – простір властивостей, потрібних для вирішення проблеми Р; *Sk(P)* – множина тих властивостей, які характеризують всю групу товарів, до якої належить вибраний товар; *Tr(P)* – множина справді потрібних споживачеві властивостей товару; *Pd(P)* – множина особливих властивостей, які характеризують вибраний товар чи послугу.

Простір властивостей містить множини переваг. Задана множина переваг може бути визначена як перетин і об'єднання набору множин властивостей. Множини переваг зручно зображати нечіткими підмножинами простору властивостей *S*, оскільки користувач може тільки наближено оцінити переваги певних товарів і послуг. Загалом не існує чіткого розмежування між ними. Для елементів нечітких множин існує функція належності переваг *x* певного товару чи послуги, яка характеризує ступінь належності *x* до множини переваг.

Множина справді потрібних споживачеві властивостей *Tr(P)* є нечіткою підмножиною в *S* із функцією належності $\mu_{Tr(P)}(x_i)$, $x_i \in S$. Множину $\operatorname{supp}(Tr(P))$ всіх $x_i \in S$, таких що $\mu_{Tr(P)}(x_i) > 0$, називають носієм множини *Tr(P)*. Нехай $\operatorname{supp}(Tr(P)) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Так само *Sk(P)* є нечіткою підмножиною в *S* із функцією належності $\mu_{Sk(P)}(x_i)$, $x_i \in S$. Нехай $\operatorname{supp}(Sk(P)) = \{x_1^{'}, x_2^{'}, ..., x_n^{'}\}$.

Аналогічно *Pd(P)* є нечіткою підмножиною в *S* із функцією належності $\mu_{Pd(P)}(x_i)$, $x_i \in S$ і $\operatorname{supp}(Pd(P)) = \{x_1^{''}, x_2^{''}, ..., x_n^{''}\}$.

Коли споживачі натрапляють на нові товари чи послуги, вони спочатку досліджують їхні особливості та порівнюють із подібними до них. Потім ці товари чи послуги приймають чи відхиляють залежно до потреб і способу життя споживача. Споживач визначає ті переваги, які пов'язані з його індивідуальною функцією мети. Якщо нова перевага x_i не пов'язана з функцією мети споживача, то її відкидають, тобто значення функції належності наближається до нуля $(\mu(x_i) \to 0)$.

Розглянемо згадані ситуації прийняття рішення споживачем. Приймаючи рішення в загальній ситуації, споживач може натрапити на нові класи товарів чи послуг, інновації, переваги яких невідомі або частково невідомі йому. Тоді він може проаналізувати інформацію про відомі подібні товари або дослідити нові властивості, переваги. Усі нові переваги утворюють потенційну область переваг споживача *PD.* Якщо нові властивості необхідні споживачеві, то вони належать до множини *Tr(P)* . Схематично ця ситуація зображена на рис. 9.9.

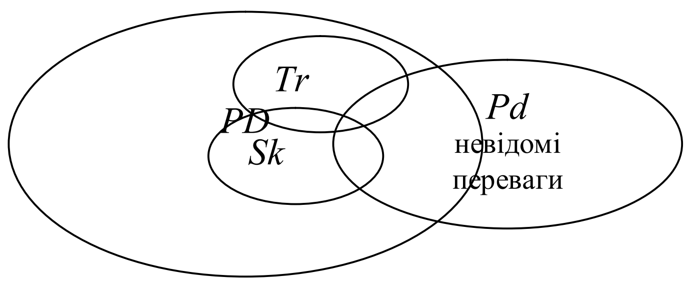


Рис. 9.9. Взаємозв'язок між множинами переваг у ситуації з нечіткими проблемами

У цій ситуації виробникові треба надати більше інформації про новий товар, про його переваги, щоб множина $Pd \backslash PD$ була найменшою. З іншого боку, аналіз множини переваг допоможе виробникам планувати нові види продукції так, щоб множина $Tr(P) \bigcap Pd(P)$ була максимальною.

Інша ситуація полягає в прийнятті рішення в обмежених умовах. У цьому випадку споживач має справу з незнайомими видами товарів чи послуг відомого класу товарів чи послуг. Така проблема може бути розглянута як нечітка, оскільки необхідна множина переваг не зовсім доступна покупцеві. Інакше, переваги нового продукту не є необхідними для задоволення потреби споживача. Взаємозв'язки між множинами переваг у цій ситуації зображені на рис. 9.2.

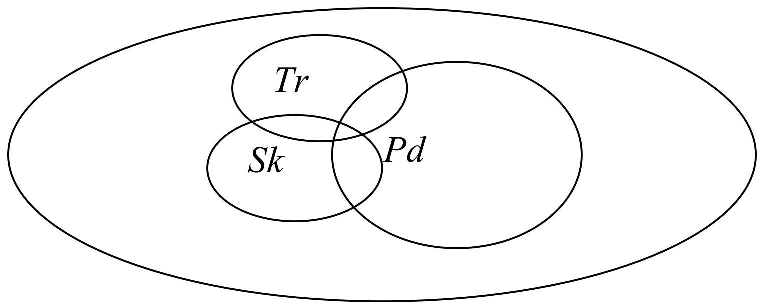


Рис. 9.2. Взаємозв'язок між множинами переваг у ситуації зі складними проблемами

Така ситуація більш зрозуміла споживачеві, ніж попередня, і швидкість прийняття рішення в цьому випадку набагато більша.

Остання ситуація характеризується повною інформацією про більшість видів товарів з цього класу. Проблема прийняття рішення у цьому випадку для споживача є простою і не потребує великих затрат. Відношення між множинами переваг показано на рис.9.3.

Споживач робить вибір між відомими видами продуктів із відомого класу. Зазвичай у цій ситуації покупець вибирає товари, які вже купував. В таких умовах виробникам треба по-іншому представити свою продукцію для завоювання нових споживачів, а для постійних споживачів створити сприятливіші умови у вигляді пільг, знижок тощо.

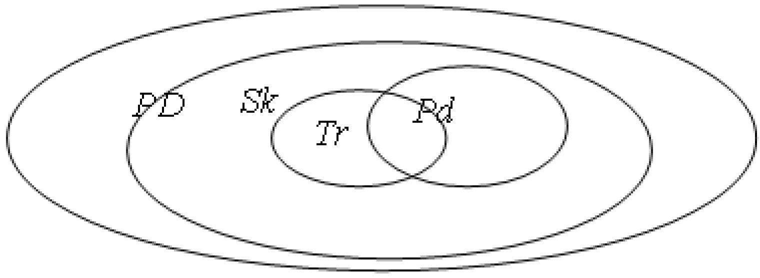


Рис. 9.3. Взаємозв’язок між множинами переваг у ситуації з простими проблемами

Потреби споживачів постійно змінюються і співвідношення між множинами переваг динамічні. Тому виробники вимушені періодично досліджувати множини переваг і враховувати їх під час підготовки випуску нових товарів чи послуг або реалізації існуючих.

Кількісний аналіз кожної з цих операцій можна виконати за допомогою нечіткої міри *m(·)*, визначеної в просторі *S*. Тобто, якщо $A \subset S$, тоді *m(A)* визначає величину привабливості множини *A* для споживача. Отож, ступінь необхідності певного товару чи послуги можна зобразити:

$$\delta(Pd(P)) = m(Tr(P) \cap Pd(P)) / m(Tr(P)) \tag{9.47}$$

Ступінь досяжності споживачем проблеми *P* знаходимо з відношення

$$\delta(Sk(P)) = m(Tr(P) \cap Sk(P)) / m(Tr(P)) \tag{9.48}$$

Величини *δ(Pd(P))* і *δ(Sk(P))* можна обчислити за допомогою нечітких інтегралів

$$\delta(Pd(P)) = \int_0^1 m\{x_i \left| \mu_{Pd(P)}(x_i) > \alpha,\ \ x_i \in \text{ supp } Pd(P)\right\} d\alpha \tag{9.49}$$

$$\delta(Sk(P)) = \int_0^1 m\{x_i \left| \mu_{Sk(P)}(x_i) > \alpha,\ \ x_i \in \text{ supp } Sk(P)\right\} d\alpha\ . \tag{9.50}$$

9.8. Формування цінового рівня взаємозамінної продукції

Розвиток малого бізнесу та підприємництва можна суттєво активізувати за рахунок сприяння регіональної політики за такими напрямками:

– врахування виробничо-господарського потенціалу та соціально-економічних проблем;

– створення механізмів підтримки цінових рішень;

– надання інформації про ресурсні можливості регіону;

– створення та забезпечення функціонування системи стимулювання пріоритетних сфер діяльності малого бізнесу.

На сьогодні відсутність інформації на ринку про попит та пропозицію не допомагає підприємствам планувати свою діяльність, оцінити реальність ситуації просування власної продукції до споживача, розрахувати обсяги ресурсів, в тому числі і фінансових, необхідних для виробничої діяльності. Все це призводить до неефективної діяльності підприємств у цілому.

Моделювання структури малого бізнесу допомагає визначити обсяги попиту та обсяги виробництва з урахуванням динаміки змін розподілу споживачів за рівнем грошових доходів населення. Отримана інформація є важливим і ефективним допоміжним матеріалом для побудови об'єктивного прогнозу потреби у матеріальних, трудових та фінансових ресурсах, необхідних для ефективної підприємницької діяльності. Важливою ця інформація є також і для визначення структури пільг для малого бізнесу на регіональному рівні, для оцінки інвестиційних проектів, для визначення доцільності надання кредитів банківськими установами [68].

Були проведені дослідження врахування ефективності взаємозаміни продукції при формуванні обсягів виробництва на підставі ринкових цін, застосовуючи економетричний аналіз, який допоміг в кожному конкретному випадку визначити чинники впливу на результат виробництва. Для оцінки їх впливу на практиці використовувалися виробничі функції.

Як показує практика, виробництво окремих видів продукції промисловості будівельних матеріалів регіону досить добре описується виробничими функціями неокласичного типу. За допомогою таких виробничих функцій можна дослідити ефективність використання робочої сили, виробничих фондів, природних та інших ресурсів. При цьому можна виявити межі взаємозаміни ресурсів і найбільш раціональні їх пропозиції з точки зору результатів виробництва.

На основі даних річних звітів про господарську діяльність підприємств Львівської області за допомогою пакета STATGRAPHICS були побудовані виробничі функції Коба-Дугласа, що відображали залежності обсягів виробництва деяких видів будівельних матеріалів від використання виробничих потужностей та середньооблікової чисельності штатних працівників спискового складу. Виробничі функції були такими:

а) Виробництво будівельної цегли:

$Y_1 = 2.133\ x_1^{0.651}\ x_2^{0.925}$;

б) Виробництво конструкцій і збірних залізобетонних виробів:

$Y_2 = 2.7684\ x_1^{0.7104}\ x_2^{0.2044}$;

в) Виробництво стінових матеріалів:

$Y_3 = 3.0474 x_1^{0.1419}\ x_2^{0.9604}$,

де $У_1$ – виробництво цегли будівельної (млн. шт.); $У_2$ – виробництво конструкцій і виробів збірних залізобетонних (тис. м^3); $У_3$ – виробництво стінових матеріалів (тис. м^2); x_1 – використання виробничих потужностей (у відсотках); x_2 – середньооблікова чисельність штатних працівників (тис. чол.).

Коефіцієнти еластичності для виробництва цегли: $E_{x_1} = 0.651$, $E_{x_2} = 0.925$; для конструкцій і виробів збірних залізобетонних: $E_{x_1} = 0.7104$,

$E_{x_2} = 0.2044$; для стінових матеріалів : $E_{x_1} = 0.1419$, $E_{x_2} = 0.9604$.

Аналіз отриманих виробничих функцій показує, що при збільшенні використання виробничих потужностей на 1%, виробництво цегли будівельної збільшиться на 0,651%, виробництво конструкцій і виробів збірних залізобетонних збільшиться на 0,7104%, виробництво стінових матеріалів збільшиться на 0,1419%, а при збільшенні середньооблікової чисельності штатних працівників на 1%, виробництво цегли будівельної збільшиться на 0,925%, виробництво конструкцій і виробів збірних залізобетонних збільшиться на 0,2044%, виробництво стінових матеріалів збільшиться на 0,9604%.

Сумарна еластичність для будівельної цегли $A = E_{x_1} + E_{x_2} = 1.576 > 1$, що свідчить про інтенсивний розвиток виробництва. Для конструкцій і збірних залізобетонних виробів $A = 0.9148 < 1$. Це означає, що розширення в регіоні виробництва даної продукції негативно впливає на його ріст. Для стінових матеріалів $A = 1.1023 > 1$, тобто має місце інтенсивний розвиток виробництва.

Обчислена гранична норма заміщення досліджуваних видів продукції промисловості будівельних матеріалів регіону для нашого випадку подана в таблиці 9.3:

Таблиця 9.3

Гранична норма заміщення досліджуваних видів продукції

Часові періоди	Цегла будівельна	Конструкції і вироби збірні залізобетонні	Стінові матеріали
1	0,019	0,194	0,020
2	0,016	3,652	0,004
3	0,004	1,114	0,011
4	0,544	7,101	0,327
5	0,516	7,994	0,236
6	0,429	7,415	0,171

З таблиці видно, що найбільша норма заміщення цегли будівельної і стінових матеріалів була у 4 періоді, конструкцій і збірних залізобетонних виробів у 5 періоді .

Розглянемо економіко-математичну модель функціонування трьох галузей, які спеціалізуються на виробництві трьох видів спорідненої продукції з спільним доступом до ресурсів і спільним споживачем [21] (рис. 9.4).

Виробництво продукції певними галузями описується виробничими функціями

$$Y_i = F_i(x_{1i}, x_{2i}, ..., x_{ki}) \quad (i = 1, 2, 3)$$

які знаходяться на підставі статистичних даних про вироблену продукцію і затрачені на її отримання ресурси $(x_{1i}, x_{2i}, ..., x_{ki}) \quad (i = 1, 2, 3)$. Нехай на товарній біржі мають місце наступні ціни p_1, p_2, p_3 на продукцію, відповідно , y_1, y_2, y_3; і ціни $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$ на ресурси x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, … , x_{ki}.

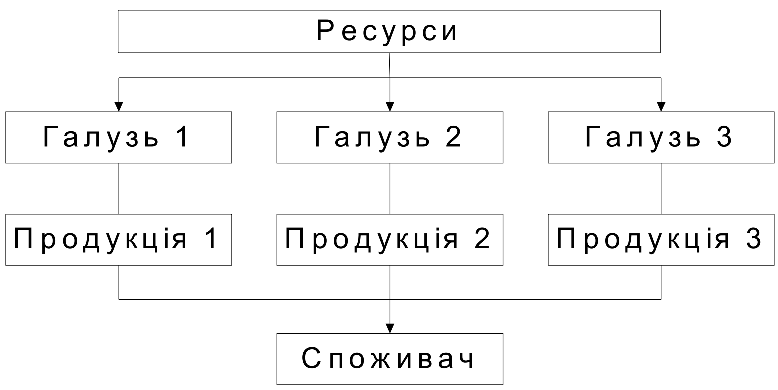


Рис. 9.4 Схема функціонування трьох галузей

Кожна галузь вибирає таке співвідношення ресурсів і результатів виробництва, яке дає змогу їй отримати максимальний прибуток. Це можна записати так:

$$\begin{gathered} \Pi_i(t) = p_i(t) F_i(x_{1i}^{\alpha}(t), x_{2i}^{\alpha}(t), ..., x_{ki}^{\alpha}(t)) - \\ -q_1(t) x_{1i}^{\alpha}(t) - q_2(t) x_{2i}^{\alpha}(t) - \ldots - q_k x_{ki}^{\alpha}(t) \to \max \quad (i = 1, 2, 3) \end{gathered}, \tag{9.51}$$

при обмеженнях на попит і пропозицію продукції:

$$Y_i^s(t) = F_i(x_{1i}^\alpha(t), x_{2i}^\alpha(t), ..., x_{ki}^\alpha(t)) \geq Y_i^\alpha(t) \qquad (i = 1, 2, 3) \quad , \qquad (9.52)$$

де $Y_i^s(t)$ $(\text{i} = 1,2,3)$ – обсяг пропозиції господарствами *i*-ої продукції *s*-ої галузі; $Y_i^\alpha(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ – обсяг попиту з боку споживача на *i*-ту продукцію, вироблену підприємствами *i*-ої галузі; та обмеженнях на попит і пропозицію ресурсів

$$x_{j1}^\alpha(t) + x_{j2}^\alpha(t) + x_{j3}^\alpha(t) \leq x_j^s \qquad (j = 1, 2, ..., k), \qquad (9.53)$$

де x_j^s $(j = 1, 2, ..., k)$ – пропозиції *j*-го виду ресурсу регіону; $x_{j1}^\alpha(t)$ – обсяг попиту на *j*-й вид ресурсу з боку господарства першої галузі регіону; $x_{j2}^\alpha(t)$ – обсяг попиту на *j*-й вид ресурсу з боку господарства другої галузі регіону; $x_{j3}^\alpha(t)$ – обсяг попиту на *j*-й вид ресурсу з боку господарства третьої галузі регіону; *t* – час.

Розв'язуючи задачу випуклого програмування (9.51)–(9.53) отримаємо

$$x_{ji}^\alpha(t) = \max\left\{0; x_{ji}^\alpha(t-1) + \alpha_i\left[p_i(t)\frac{\partial F_i}{\partial x_{ji}^\alpha(t)} - q_j(t)\right]\right\} \qquad (9.54)$$

$$(j = 1, 2, ..., k; \quad i = 1, 2, 3)$$

$$Y_i^s(t) = F_i(x_{1i}^\alpha(t), x_{2i}^\alpha(t), ..., x_{ki}^\alpha(t)) \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad (9.55)$$

де $\alpha_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ – додатні коефіцієнти корегування.

Отже, підприємства *i*-ої галузі регіону, виробляючи $x_i^s(t)$ продукції і затративши при цьому $x_{1i}^\alpha(t), x_{2i}^\alpha(t), ..., x_{ki}^\alpha(t)$ видів необхідних ресурсів одержать оптимальний прибуток.

Споживачі максимізують функцію корисності

$$U(Y_1^\alpha(t), Y_2^\alpha(t), Y_3^\alpha(t)) \to \max \qquad (9.56)$$

враховуючи бюджетне обмеження

$$p_1(t)Y_1^\alpha(t) + p_2(t)Y_2^\alpha(t) + p_2(t)Y_3^\alpha(t) = I\ ,$$

де I – дохід споживача встановлюють попит на відповідну продукцію

$$Y_i^\alpha(t) = \max\left\{0; Y_i^\alpha(t-1) + \beta_i\left[\frac{\partial U}{\partial Y_i^\alpha(t)} - p_i(t)\right]\right\} \quad (i=1,2,3) \qquad (9.57)$$

де $\beta_i\ (t)\ \ (i=1,2,3)$ – додатні коефіцієнти корегування.

Регулювання цін на вироблену підприємствами даних галузей продукцію може здійснюватися на біржі за використання таких формул:

$$\begin{aligned}
&p_1(t+1) = \max\left\{0; p_1(t) + \gamma_1\left[Y_1^\alpha(t) - Y_1^s(t)\right]\right\}\ ;\\
&p_2(t+1) = \max\left\{0; p_2(t) + \gamma_2\left[Y_2^\alpha(t) - Y_2^s(t)\right]\right\}\ ;\\
&p_3(t+1) = \max\left\{0; p_3(t) + \gamma_3\left[Y_3^\alpha(t) - Y_3^s(t)\right]\right\}\ ;
\end{aligned} \qquad (9.58)$$

$$\begin{aligned}
&q_1(t+1) = \max\left\{0; q_1(t) + \eta_1\left[x_{11}^\alpha(t) + x_{12}^\alpha(t) - x_1^s(t)\right]\right\}\ ;\\
&q_2(t+1) = \max\left\{0; q_2(t) + \eta_2\left[x_{21}^\alpha(t) + x_{22}^\alpha(t) - x_2^s(t)\right]\right\}\ ;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&q_k(t+1) = \max\left\{0; q_k(t) + \eta_k\left[x_{k1}^\alpha(t) + x_{k2}^\alpha(t) - x_k^s(t)\right]\right\}
\end{aligned} \qquad (9.59)$$

де $\gamma_i, \eta_i\ \ (i=1,2,3;\ \ j=1,2,...,k)$ додатні коефіцієнти корегування.

Отже, біржа керуючись законом рівності попиту і пропозиції на продукцію має змогу регулювати ціну на неї.

9.9. Економіка-математична модель оптимізації календарного плану реалізації сільськогосподарської продукції

Значна частина продукції аграрно-промислового комплексу України експортується. Тому бажано визначити оптимальні обсяги продукції, що має реалізовуватись кожного місяця.

Розробимо модель визначення оптимального плану реалізації зернових культур. Модель визначимо в детермінованому випадку, коли ціни будемо вважати постійними та відомими та у випадку цінового ризику. В випадку цінового ризику будемо вважати ціну випадковою величиною, а отже отримуємо стохастичну оптимізаційну модель.

Модель буде включати випадки, коли календарний план реалізації запасів сільськогосподарської продукції складається за умов імовірнісного характеру майбутніх ринкових цін на продукцію, вона дозволить власнику сільськогосподарської продукції максимально захистити свої економічні інтереси при розробці плану реалізації наявних запасів.

Індексом і будемо позначати і-тий вид зернових культур, припустимо, що їх є n видів. Індексом t будемо позначати час реалізації продукції, він становить T періодів.

Відомі величини: B – Обсяги складських приміщень підприємства; T - тривалість планового періоду; pti - ціна реалізації одиниці продукції і-го виду в момент часу t, cti — витрати, пов'язані із зберіганням одиниці продукції і-го виду до моменту часу t (t = 1, T).

Невідомі величини: X = (xi1,..., xiT ,) календарний план реалізації продукції., i=1,T, yi – обсяг наявних у власника запасів деякої однорідної сільськогосподарської продукції і-го виду.

За детермінованих умов календарний план X = (xi1,..., xiT ,) реалізації продукції визначатиметься розв'язуванням задачі лінійного програмування:

$$\begin{cases} Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} (p_{it} - c_{it}) x_{it} \to \max, \\ \sum_{t=1}^{T} x_{it} = y_i, \quad i = \overline{1,n}, \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \le B, \\ x_{it} \ge 0, \ t = \overline{1,T}; \quad i = \overline{1,n} \end{cases} \tag{9.60}$$

Вважатимемо, що різночасові вартісні показники уже зведені нормативною ставкою дисконту, тобто їх порівняння за абсолютними величинами є коректним.

Припустимо, що майбутні ринкові ціни недетерміновані, а отже власник продукції завжди має ризик отримати у майбутньому дохід від реалізації продукції менший, аніж той на який він очікував.

Вважатимемо майбутню ціну pti , реалізації одиниці продукції в момент часу t випадковою величиною з відомими її очікуваним значенням $\overline{p}_{ti}$ і стандартним відхиленням σti:

$$p_{ti} = \overline{p_{ti}} + e_{ti}, \tag{9.61}$$

де eti - випадкова величина, математичне сподівання якої дорівнює 0, а стандартне відхилення - σti, (t = 1, T). Випадкові величини e1i,…,eti, будемо вважати статистичне незалежними.

Несхильна до ризику особа при прийнятті рішення керуватиметься двома критеріями: максимізувати очікуваний загальний чистий дохід та мінімізувати дисперсію загального чистого доходу. Ці критеріальні показники обчислюються за такими формулами:

очікуваний загальний чистий дохід:

$$\overline{Z} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} (\overline{p}_{ti} - c_{ti}) x_{ti} \to \max, \tag{9.62}$$

дисперсія загального чистого доходу (на випадок статистичної незалежності):

$$\delta^2(Z) = \sum_{s=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} \delta_{ti}^2 x_{ti}^2 \to \min, \tag{9.63}$$

Методикою підтримки процесу визначення переважань при багатокритеріальній оптимізації передбачено, щоб господар насамперед отримав інформацію про межі варіації показників очікуваного загального чистого доходу та стандартного відхилення доходу на множині ефективних варіантів календарного плану. Особливості індивідуального ставлення до ризику враховуються шляхом залучення інформації про припустимі рівні зазначених критеріальних показників. Далі серед усіх ефективних варіантів календарного плану реалізації обчислюється саме той, який якнайкраще відбиває індивідуальні переважання власника продукції.

На першому етапі обчислюються межі варіації показників очікуваного загального чистого доходу та стандартного відхилення доходу на множині ефективних планів. Спочатку обчислюються найкращі значення цих показників:

$$\overline{Z}_{\max} = \left(\overline{p}_{t^*} - c_{t^*}\right) a, \tag{9.64}$$

де момент t* визначається з умови: $t^* : \overline{p}_{t^*} - c_{t^*} = \max_{t=1,\overline{T}} \left(\overline{p}_t - c_t\right)$,

Далі обчислюються найгірші значення критеріальних показників на множині ефективних варіантів календарного плану:

$$\overline{Z}_{\min} = \frac{a}{\sum_{t=1}^{T}\frac{1}{\delta_t^2}}\sum_{t=1}^{T}\frac{\overline{p}_t - c_t}{\delta_t^2};$$

$$\delta(Z)_{\min} = \frac{a}{\sqrt{\sum_{t=1}^{T}\frac{1}{\delta_t^2}}};$$

$$\delta(Z)_{\max} = a\delta_{t^*}. \tag{9.65}$$

На другому етапі, після ознайомлення з діапазонами варіації критеріальних показників, власник продукції повідомляє про припустимі, на його думку, рівні цих показників $\overline{Z}_0$ та σ_0:

$$\overline{Z}_{\min} \le \overline{Z}_0 \le \overline{Z}_{\max}, \ \delta(Z)_{\min} \le \delta_0 \le \delta(Z)_{\max}$$

На третьому етапі визначається оптимальний згідно переважань власника календарний план реалізації запасів сільськогосподарської продукції. Цей план X* = (x1*,..., Xт*) обчислюється розв'язуванням задачі опуклого програмування:

$$s \to \max$$

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^{T}(\overline{p}_t - c_t)x_t \ge \overline{z}_0 + s(\overline{z}_{\max} - \overline{z}_0) \\ \sum_{t=1}^{T}\sigma_t^2 x_t^2 \le \sigma_0^2 - s(\sigma_0^2 - \sigma^2(z)_{\min}) \\ \sum_{t=1}^{T} x_t = a \\ x_t \ge 0, t = \overline{1,T} \end{cases} \tag{9.66}$$

Такі дії слід виконати для всіх видів продукції, а потім поєднати їх по критерію ємності складських приміщень підприємства.

Оптимальне значення S* показуватиме, чи були обрані власником продукції припустимі рівні критеріальних показників реальними. Якщо значення S*

≥0), то критеріальні рівні є реальними, в іншому випадку – ні (при $S^*<0$).

Розглянемо числовий приклад.

Нині ціни на зерно формуються залежно від попиту й пропозиції, витрат на виробництво та реалізацію, ринкових зборів тощо. Аналіз цінової ситуації на ринках міст України засвідчує велику варіацію. Середня ціна 1 кг зернових культур не дає повної змоги охарактеризувати цінову ситуацію ринку зерна України.

Спостерігається сезонна циклічність цін: зростання їх із зменшенням запасів і зниження після закінчення збиральних робіт, коли відбувається масова реалізація зерна виробниками, які не мають змоги зберігати вирощений урожай, а споживачі роблять запаси зернових культур.

Для побудови числової моделі задачі реалізації зерна необхідна така інформація: ціни реалізації та вартість зберігання 1 тонни зернових культур до певного місяця. Статистичні дані для прогнозування майбутньої ціни реалізації з Вісника державної служби статистика України за 2009-2016 роки. Вартість зберігання 1 т продукції до моменту реалізації взято з бухгалтерської звітності ПрАТ «Гніванське хлібоприймальне підприємство».

Визначимо математичне сподівання та середньоквадратичне відхилення для ціни реалізації та вартості зберігання.

Прогнозні значення знаходимо на основі простої лінійної економетричної моделі за статистичними вибірками.

Достовірність економетричної моделі визначається за коефіцієнтом детермінації або на основі F-критерію Фішера згідно теорії перевірки статистичних гіпотез. Якщо значення коефіцієнт детермінації є високим, тобто наближається до 1, т о модель вважається адекватною, а отже за нею можна робити прогноз. Економетричні моделі мають слабкі екстрополіяційні властивості, тому прогноз можна утворювати тільки короткостроковий.

Економетричні моделі, за якими визначено прогноз вартості зберігання продукції на наступний рік, коефіцієнт детермінації та значення прогнозу покажемо в таблиці 9.5.

Таблиця 9.5.

Моделі прогнозування вартості зберігання продукції та прогноз

№	Місяць	Модель прогнозування	Коефіцієнт детермінації	Прогноз на 2019рік
1	січень	y=0,11*x+1,5	0,41	2,05
2	лютий	y=0,185*x+1,6	0,67	2,525
3	березень	y=0,242*x+1,575	0,77	2,785
4	квітень	y=0,215*x+1,775	0,82	2,85
5	травень	y=0,33*x+1,7	0,82	3,35
6	червень	y=0,555*x+1,526	0,9	4,301
7	липень	y=0,763*x+1,625	0,89	5,44
8	серпень	y=0,1*x+0,05	0,83	0,55
9	вересень	y=0,13*x+0,786	0,79	1,436
10	жовтень	y=0,19*x+0,5	0,73	1,45
11	листопад	y=0,11*x+1,1	0,41	1,65
12	грудень	y=0,125*x^2-0,555*x+1,975	0,68	2,325

Були побудовані економетричні моделі, за якими визначено прогноз ціни на пшеницю 2,3,6 класу та ячменю, кукурудзи на 2019рік.

Якщо не вистачає статистичних даних, то їх нестачу відновлюємо процедурою інтерполяції.

Всі результати знайдено за допомогою табличного процесора Excel.

За побудованими моделями можна зробити наступні висновки: вони є адекватними. Визначаємо прогноз ціни зернових культур, поклавши замість X значення номера наступного року.

На підприємстві зберігають та продають зерно пшениці 2,3, та 6 класу; ячмінь та кукурудзу. Отже n=5. Періодів реалізації беремо 12, що відповідає кожному місяцю. Таким чином визначимо 60 змінних.

Позначимо невідомі: Xi1 – реалізація пшениці, ячменя та кукурудзи в січні, відповідно до індексу і тис.т.; Xi2 – реалізація пшениці, ячменя та кукурудзи в лютому, відповідно до індексу і, тис.т. так далі; Y1 – обсяг пшениці 2 сорту, Y2 – обсяг пшениці 3 сорту, Y3 – обсяг пшениці 6 сорту, Y4 – обсяг ячменю, Y5 – обсяг кукурудзи.

Згідно з математичною моделлю у детермінованому випадку цільова функція економічно визначає максимуму прибутку. Прибуток від продажу 1т. зерна розраховано в таблиці 9.6.

Таблиця 9.6

Прибуток від продажу 1т. зерна, грн.

№	Місяць	Види зернових культур				
		Пшениця 2 класу	Пшениця 3 класу	Пшениця 6 класу	ячмінь	кукурудза
1	січень	3,15	3,48	4,18	0,25	0,29
2	лютий	10,12	8,15	10,35	19,66	7,30
3	березень	5,24	6,92	6,17	12,93	9,12
4	квітень	6,33	4,85	6,49	11,67	10,94
5	травень	2,62	3,30	4,60	9,75	14,05
6	червень	1,19	0,49	3,20	8,18	14,83
7	липень	0,37	0,81	0,77	5,99	10,97
8	серпень	2,89	1,79	1,16	7,21	4,03
9	вересень	3,03	1,57	0,34	6,81	7,02
10	жовтень	5,65	4,35	4,53	7,91	10,05
11	листопад	7,45	5,97	4,52	10,83	5,40
12	грудень	12,38	8,52	7,74	11,41	4,20

Цільова функція.(грош.одиниці):

$$Z = 3{,}15x_{11} + 10{,}12x_{12} + 5{,}24x_{13} + 6{,}33x_{14} + 2{,}62x_{15} + 1{,}19x_{16} + 0{,}37x_{17} + 2{,}89x_{18} + 3{,}03x_{19} + 5{,}65x_{110} +$$
$$+ 7{,}45x_{111} + 12{,}38x_{112} + 3{,}48x_{21} + \ldots + 8{,}525x_{212} + 4{,}18x_{31} + \ldots + 7{,}74x_{312} +$$
$$+ 0{,}25x_{41} + \ldots + 11{,}41x_{412} + 0{,}29x_{51} + \ldots + 4{,}20x_{512} \to \max$$

Система обмежень

По визначенню оптимального розміру заготівлі зернових культур.

пшениці 2 класу:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{19} + x_{110} + x_{111} + x_{112} - y_1 = 0;$$

Аналогічно для інших видів зернових культур.

По ємності складських приміщень:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \le 68100.$$

Умова невід’ємності змінних

$$x_{it} \ge 0, i = \overline{1,5}; \quad t = \overline{1,12}.$$

Знайдемо розв’язок цієї моделі. Знайдемо для кожної культури найкращій період реалізації.

Так, для пшениці 2 класу – це грудень (12,38); для пшениці 3 класу – це також грудень (8,52), 6 класу – лютий(10,35); ячменю – лютий (19,66); кукурудзи – червень (14,83). Отже всю продукцію зернових слід реалізовувати в цей термін і тоді прибуток буде максимальним. Цільова функція дорівнює 1103700.

Розглянемо модель у випадку цінового ризику. Розрахуємо значення коефіцієнтів цільової функції (таблиця 9.7)

Перша цільова функція – максимум очікуваного прибутку

$$Z = 1{,}85x_{11} + 9{,}62x_{12} + 4{,}12x_{13} + 3{,}87x_{14} + 0{,}72x_{15} - 0{,}14x_{16} + 0{,}30x_{17} + 1{,}24x_{18} + 2{,}04x_{19} + 4{,}49x_{110} +$$
$$+ 5{,}88x_{111} + 5{,}73x_{112} + 2{,}35x_{21} + \ldots + 6{,}48x_{212} + 0{,}83x_{31} + \ldots + 6{,}28x_{312} +$$
$$+ 0{,}43x_{41} + \ldots + 5{,}58x_{412} - 4{,}27x_{51} + \ldots + 2{,}08x_{512} \to \max$$

Друга цільова функція, що економічно визначає ризик отримання бажаного прибутку, – мінімум дисперсії:

$$\sigma^2(Z) = (0{,}77)^2 x^2{}_{11} + (11{,}22)^2 x^2{}_{12} + (4{,}62)^2 x^2{}_{13} + (15{,}21)^2 x^2{}_{14} + (27{,}56)^2 x^2{}_{15} + (24{,}01)^2 x^2{}_{16} +$$
$$+ (0{,}92)^2 x^2{}_{17} + (27{,}56)^2 x^2{}_{18} + (30{,}80)^2 x^2{}_{19} + (20{,}25)^2 x^2{}_{110} + (12{,}96)^2 x^2{}_{111} + (22{,}56)^2 x^2{}_{112} +$$
$$+ (0{,}77)^2 x^2{}_{21} + \ldots + (25{,}00)^2 x^2{}_{212} + (2{,}72)^2 x^2{}_{31} + \ldots + (28{,}09)^2 x^2{}_{312} + (7{,}56)^2 x^2{}_{41} + \ldots +$$
$$+ (11{,}56)^2 x^2{}_{412} + (14{,}06)^2 x^2{}_{51} + \ldots + (37{,}21)^2 x^2{}_{512} \to \min$$

Таблиця 9.7

Коефіцієнти цільової функції ц випадку цінового ризику

№	Місяць	Види зернових культур				
		Пшениця 2 класу	Пшениця 3 класу	Пшениця 6 класу	ячмінь	кукурудза
1	січень	1,85	2,35	0,83	0,43	-4,27
2	лютий	9,62	10,37	9,47	9,97	0,62
3	березень	4,12	4,87	3,97	4,47	1,37
4	квітень	3,87	4,62	2,97	3,12	1,77
5	травень	0,72	1,47	0,72	1,22	2,97
6	червень	-0,14	0,36	0,61	1,36	2,71
7	липень	0,30	1,05	1,95	2,40	1,20
8	серпень	1,24	1,34	1,49	2,79	-1,51
9	вересень	2,04	1,44	0,74	3,09	-0,66
10	жовтень	4,49	5,24	5,24	4,74	2,24
11	листопад	5,88	6,73	6,13	5,98	2,48
12	грудень	5,73	6,48	6,28	5,58	2,08

Система обмежень.

По визначенню оптимального розміру заготівлі зернових культур.

пшениці 2 класу:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{16}+x_{17}+x_{18}+x_{19}+x_{110}+x_{111}+x_{112}-y_1=0;$$

пшениці 3 класу:

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}+x_{26}+x_{27}+x_{28}+x_{29}+x_{210}+x_{211}+x_{212}-y_2=0;$$

пшениці 6 класу:

$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}+x_{36}+x_{37}+x_{38}+x_{39}+x_{310}+x_{311}+x_{312}-y_3=0;$$

пшениці ячменю:

$$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}+x_{46}+x_{47}+x_{48}+x_{49}+x_{410}+x_{411}+x_{412}-y_4=0;$$

кукурудзи:

$$x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}+x_{55}+x_{56}+x_{57}+x_{58}+x_{59}+x_{510}+x_{511}+x_{512}-y_5=0.$$

По ємності складських приміщень:

$$y_1+y_2+y_3+y_4+y_5 \le 68100.$$

Умова невід’ємності змінних

$x_{it} \geq 0, i = \overline{1,5}; \quad t = \overline{1,12}.$

Наведена модель є нелінійною та двохкритеріальною.

Для знаходження розв’язку задачі обчислимо найкращі значення критеріальних показників для кожного виду зернових культур.

Таблиця 9.8.

Найкращі та найгірші значення критеріальних показників, припустимі рівні

№	Показники	Види зернових культур				
		Пшениця 2 класу	Пшениця 3 класу	Пшениця 6 класу	ячмінь	кукурудза
1	$\overline{Z}_{\max}$	192400	103700	142050	19940	44550
2	$\overline{Z}_{\min}$	39185,1	24508,27	38015,9	8939,872	-10041,9
3	$\delta(Z)_{\max}$	224400	96100	93750	125000	1215000
4	$\delta(Z)_{\min}$	15025,78	7536,978	32221,03	199,9946944	114055,7
5	$\overline{Z}_0$	150000	95000	100000	15000	25000
6	σ0	200000	80000	70000	10000	1100000

Обираємо припустимі рівні цих показників $\overline{Z}_0$ та σ0 та визначимо оптимальний згідно переважань власника календарний план реалізації запасів сільськогосподарської продукції.

Цей план обчислюється розв'язуванням задачі опуклого програмування. Для кожного виду зернових будуємо таку модель та розв’язуємо її.

Модель для пшениці 2 класу:

S→max,

$$1,85x_{11} + 9,62x_{12} + 4,12x_{13} + 3,87x_{14} + 0,72x_{15} - 0,14x_{16} + 0,30x_{17} + 1,24x_{18} + 2,04x_{19} + 4,49x_{110} +$$
$$+ 5,88x_{111} + 5,73x_{112} \geq 150000 + S*(192400 - 150000);$$
$$\sigma^2(Z) = (0,77)^2 x^2{}_{11} + (11,22)^2 x^2{}_{12} + (4,62)^2 x^2{}_{13} + (15,21)^2 x^2{}_{14} + (27,56)^2 x^2{}_{15} + (24,01)^2 x^2{}_{16} +$$
$$+ (0,92)^2 x^2{}_{17} + (27,56)^2 x^2{}_{18} + (30,80)^2 x^2{}_{19} + (20,25)^2 x^2{}_{110} + (12,96)^2 x^2{}_{111} +$$
$$(22,56)^2 x^2{}_{112} \geq 25000^2 - S*(25000^2 - 15025^2);$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{19} + x_{110} + x_{111} + x_{112} = 20000.$$

Умова невід’ємності змінних

$x_{1t} \geq 0, \quad t = \overline{1,12}.$

Оптимальне значення S* показуватиме, чи були обрані власником продукції припустимі рівні критеріальних показників реальними (при S* ≥0),чи ні (при S*<0).

Аналогічні моделі будуємо для пшениці 3 та 6 класу, ячменю та кукурудзи.

Розв’язок задачі знайдемо за допомогою електронної таблиці Excel.

Оптимальні розв’язки для всіх видів зернових покажемо у наступній таблиці 9.9.

Значення цільової функції дорівнює 743337,6грн.

Таблиця 9.9.

Оптимальний розв’язок задачі – план реалізації зернових, т.

№	Місяць	Види зернових культур				
		Пшениця 2 класу	Пшениця 3 класу	Пшениця 6 класу	ячмінь	кукурудза
1	січень	0	0	0	112,9872	0
2	лютий	11213,29	7907,872	5954,679	598,8976	9073,936
3	березень	1324,699	150,0184	2683,803	13351,77	13274,83
4	квітень	1176,026	56,56181	1179,883	1769,63	15515,31
5	травень	0	0	0	1,371159	22236,74
6	червень	0	0	0	109,5764	20780,43
7	липень	0	0	0	3112,211	12322,63
8	серпень	0	0	0	94,39412	0
9	вересень	87,74218	0	0	118,0327	1904,406
10	жовтень	1544,734	288,334	1731,265	369,5872	18147,87
11	листопад	2371,354	845,3352	2662,527	209,3678	19492,16
12	грудень	2282,151	751,8786	787,8426	152,1737	17251,68
Значення		0,047547	0,000074	0,014367	0,291743	3,705417
Проміжні значення цільової функції		152016,0	95068,69	100890,5	83324,33	312038,1

Отже, всі види зернових культур, крім ячменю, економічно невигідно реалізовувати в таких місяцях як січень, травень, червень, липень та серпень. Пшеницю 3 та 6 класу, кукурудзу невигідно також реалізовувати в вересні. Ячмінь на відміну від інших культур реалізовувати вигідно на протязі всього року.

На лютий припадає максимальна реалізація пшениці 2,3 та 6 класу, в березні максимальна реалізація ячменю, а мінімальна – в травні. Кукурудза має максимальну реалізацію в травні, а мінімальну в вересні. Мінімальна реалізація пшениці залежить від його класу – вересень, квітень та грудень відповідно 2, 3 та 6 клас. При такому неповному завантаженні складських приміщень прибуток від зберігання зернових культур буде становить 743тис.грн.

9.10. Економіко-математична модель оптимального планування кормових раціонів"

Для складання кормового раціону для годування дійної корів із добовим надоєм 14 кг при жирності молока 3,8% с живою вагою 500 кг. На період складання раціону в господарстві є такі види кормів: ячмінь молотий, кукурудза молота, мука горохова, комбікорм, кормові коренеплоди, силос кукурудзяний, сіно суданської трави, сіно люцерни, солома ярих зернових. Також є можливість закупити необхідну кількість мікроелементів, мінеральних та вітамінних підкормок.

Як показує практика, в умовах господарства в зимовий період необхідно збалансувати раціон годування крупної рогатої худоби по загальноприйнятим поживним речовинам, вітамінам та мікроелементам (міді, кобальту, марганцю, цинку).

Для забезпечення заданої продуктивності тварини необхідно, щоб в кормовому раціоні вміщувалось не менше 14,1 кормових од., 1270 г перетравного протеїну, 80 г кальцію, 55 г фосфору, 500 мг каротину, 115 г меді, 14,1 г кобальту, 141 мг цинку, 559 мг марганцю. Сухої речовини в раціоні повинно міститись не більше 22,5 кг.

В співвідношенні із зоотехнічними вимогами в умовах господарства розраховані допустимі межі вмісту в раціоні різноманітних груп кормів (в % до загальної поживності раціону): концентровані – 15-25, соковиті – 45-60, грубі –

25,35.

В зв'язку з специфічною дією на організм тварини деяких кормів та вплив їх на якість молока та молочних продуктів кількість горохової муки не повинно перевищувати 1,5 кг, силосу – 25 кг. В загальному об'ємі грубих кормів не менше половини повинно складати сіно.

Собівартість 1 кг корму (в грош. од.) в господарстві складає: ячменю молотого – 2, кукурудзи молотої – 3, муки горохової – 3,1, кормових коренеплодів – 0,5, силосу кукурудзяного – 0,7, сіна суданської трави – 1,6, сіна люцерни – 1,4, соломи ярових культур – 0,2. Ззовні господарство купує комбікорм (9,3 грош. од.), крейда (0,65 грош. од.) та повернену сіль (0,18 грош. од.). Вартість 1 кг мікроелементів складає: сіркокислої меді та хлористого кобальту – 1,8 грош. од., сіркокислого цинку 1, грош. од., сіркокислого марганцю – 1 грош. од., препарат вітаміну А коштує 1,3 грош. од.

На основі отриманих даних була складена система лінійних рівнянь та нерівностей, які представляють числову економіко-математичну модуль задачі.

Позначимо невідому кількість в раціоні: x_1 – ячменю молотого, x_2 – кукурудзи молотої, x_3 – муки горохової, x_4 – комбікорму, x_5 – кормових коренеплодів, x_6 – силосу кукурудзяного, x_7 – сіна суданської трави, x_8 – сіна люцерни, x_9 – соломи ярової, x_{10} – кормового протеїну, x_{11}– кісної муки, x_{12} – крейди, x_{13} – повареної солі в кілограмах, x_{14} – сіркокислої міді, x_{15} – хлористого кобальту, x_{16} – сіркокислого цинку, x_{17} – сіркокислого марганцю (в г), x_{18} – препарату вітаміну А (в мл).

Введемо допоміжну змінну x_{19} – загальна кількість кормових одиниць в раціоні. За допомогою цієї змінної можна більш точно врахувати співвідношенsня окремих груп кормів в структурі раціону.

Обмеженнями в задачі будуть умови по збалансуванню поживних речовин, макро- та мікроелементів та вітамінів, співвідношенню концентрованих, соковитих, грубих кормів, максимальному вводу муки горохової, силосу та повареної солі, співвідношенню сіна та соломи в раціоні.

Техніко-економічними коефіцієнтами є данні про вміст поживних речовин в одиниці вимірювання змінних, які позначають види кормів та кормових добавок.

В обмеженнях по співвідношенню груп кормів в раціоні коефіцієнти при основних змінних позначають вміст кормових одиниць в 1 кг корму. При змінній $\overline{x_{19}}$ коефіцієнти показують умовну вагу різних груп кормів в раціоні.

Загальну кількість кормових одиниць в раціоні запишемо так: $1{,}2x_1 + 1{,}3x_2 + 1{,}18x_3 + 1x_4 + 0{,}13x_5 + 0{,}2x_6 + 0{,}4x_7 + 0{,}5x_8 + 0{,}28x_9 = \overline{x_{19}}$.

Потреба тварини в кормових одиницях $\overline{x_{19}} \geq 14{,}1$ в перетравному протеїні – $80x_1 + 80x_2 + 195x_3 + 140x_4 + 9x_5 + 14x_6 + 40x_7 + 110x_8 + 13x_9 \geq 1270$.

Інші обмеження по забезпеченню в раціоні заданої кількості поживних речовин складаються аналогічно.

Умови, які обмежують вміст концентрованих кормів в межах 15-25% загальної поживності раціону, запишемо двома нерівностями:

$1{,}2x_1 + 1{,}3x_2 + 1{,}18x_3 + x_4 \geq 0{,}15\ \overline{x_{19}}$;

$1{,}2x_1 + 1{,}3x_2 + 1{,}18x_3 + x_4 \leq 0{,}25\overline{x_{19}}$.

Необхідно пам’ятати, що оптимізація раціону можлива, якщо при векторі $\overline{x_{19}}$ сума питомої ваги всіх груп кормів за нижньою границею їх вводу в раціон менше 1, а за верхньою – більше 1.

Критерій оптимальності – мінімум собівартості раціону:

$$f(x) = 3x_1 + 4x_2 + 4{,}1x_3 + 9{,}3x_4 + 0{,}5x_5 + 0{,}7x_6 + 1{,}6x_7 + 1{,}5x_8 + 0{,}2x_9 + 4{,}4x_{10} + 5x_{11} + 0{,}65x_{12} + 0{,}18x_{13} + 0{,}18x_{14} + 0{,}18x_{15} + 0{,}19x_{16} + 0{,}1\ x_{17} + 1{,}3\ x_{18} \rightarrow \min.$$

Матриця розрахунку оптимальних раціонів годування тварин наведена в табл. 9.10.

Таблиця 9.10

Матриця задачі розрахунку годування корів з добовим надоєм 14 кг (зимовий період, жива вага 500 кг, жирність молока 3,8%)

Обмеження	Одиниця виміру	Ячмінь молотий, x_1, кг	Кукурудза молота, x_2, кг	Мука горохова, x_3, кг	Комбікорм, x_4, кг	Кормові коренеплоди, x_5, кг	Силос кукурудзяний, x_6, кг	Сіно суданської трави, x_7,кг	Сіно люцерни, x_8, кг	Солома ярових, x_9, кг	Кормовий преципітат, x_{10}, кг	Кістяна мука, x_{11}, кг	Крейда, x_{12}, кг	Поварена сіль, x_{13}, кг	Сіркокисла мідь, x_{14}, г	Хлористий кобальт, x_{15}, г	Сіркокислий цинк, x_{16}, г	Сіркокислий марганець, x_{17}, г	Препарат вітаміну А, x_{18}, мл	Загальна кількість кормових одиниць, x_{19}, кг	Об'єм та тип обмеження
1. Всього кормових одиниць в раціоні	кг	1,2	1,3	1,18	1	0,13	0,2	0,4	0,5	0,28										-1	= 0
2. Кормові одиниці	кг																			1	≥ 14,1
3. Перетравний протеїн	г	80	80	195	140	9	14	40	110	13											≥ 1270
4. Кальцій	г	1,4	0,5	1,0	2,0	0,4	1,3	2,8	15,0	3,0	260	310	380								≥ 80
5. Фосфор	г	3,5	3,0	3,0	8,0	0,3	0,6	2,4	2,3	1,0	170	150									≥ 55
6. Каротин	мг	2,0	1,0	4,0	3,0	0	15,0	15,0	20,0	2,0									200		≥ 500
7. Мідь	мг	3,7	6,0	2,0	4,0	1,0	1,2	3,8	7,6	3,0					254						≥ 115
8. Кобальт	мг	0,2	0,25	0,09	0,1	0,04	0,06	0,17	0,39	0,25						248					≥ 14,1
9. Цинк	мг	21,0	44,6	17,4	22,1	3,3	5,4	20,4	21,2	13,6							227				≥ 141
10. Марганець	мг	29,4	25,5	15,3	19,3	9,1	14,9	42,2	45,5	51,0								227			≥ 559
11. Суха речовина	кг	0,85	0,85	0,85	0,85	0,12	0,25	0,85	0,85	0,85											≥ 22,5
12. Концентрати, max	орм. од.	-1,2	-1,3	-1,18	-1																≤ 0
13. Концентрати, min	корм. од.	1,2	1,3	1,18	1																≤ 0
14. Соковиті корми, max	корм. од.					-0,13	-0,2														≤ 0
15. Соковиті корми, min	корм. од.					0,13	0,2														≤ 0
16. Грубі корми, max	корм. од.							-0,4	-0,5	-0,28											≤ 0
17. Грубі корми, min	корм. од.							0,4	0,5	0,28											≤ 0
18. Горохова мука	кг			1																	≤ 1,5
19. Силос	кг						1														≤ 25
20. Поварена сіль	кг													1							= 0,08
21. Співвідношення соломи та сіна								-1	-1	1											≤ 0
Цільова функція	грош. од.	3	4	4,1	9,3	0,5	0,7	1,6	1,5	0,2	4,4	5,0	0,65	0,18	0,18	0,18	0,19	0,1	1,3	0	0

9.11. Економіко-математична модель оптимального планування складу машинно-тракторного парку та його використання

Постановка задачі полягає в тому, що потрібно визначити оптимальний склад тракторів та сільськогосподарських машин, який забезпечував би виконання запланованих об'ємів всіх видів механізованих робіт у встановлені агротехнічні строки при мінімальних витратах на утримання та експлуатацію даного МТП.

В якості критерію оптимальності можуть бути використані наступні показники, значення яких мінімізуються: кількість або вартість енергомашин, загальна кількість техніки в еталонному обчисленні, поточні або приведені витрати.

Економічно найбільш обґрунтованим є показники мінімуму виробничих та приведених витрат на виконання робіт та придбання техніки, які крім поточних витрат (оплата праці, амортизація, ГСМ, поточний ремонт), враховують балансову вартість машин та нормативний коефіцієнт ефективності капітальних вкладень.

Змінними величинами задачі є:

- кількість агрегатів визначеного типу, необхідних для виконання у встановлений агротехнічний строк запланованого об'єму робіт по видам;
- кількість тракторів по маркам.

На змінні величини накладаються наступні обмеження:

1. по виконанню у встановлені агротехнічні строки кожної з запланованих робіт в повному обсязі;
2. по виконанню співвідношення між робочими днями тракторів та агротехнічними строками виконання робіт в кожному періоді (по маркам тракторів окремо);
3. по агрегуванню, тобто кількості комплектів сільськогосподарських машин та приладів, що входять в один агрегат, не перевищує кількості

тракторів, з якими вони агрегуються у відповідному періоді.

Крім того, можуть враховуватись інші обмеження по наявності механізованих кадрів, капітальних вкладеннях та інші.

Актуальність проблеми оптимального доукомплектування існуючого МТП пояснюється тим, що розв'язання цієї задачі дозволить в строк та з найменшими затратам придбати необхідну техніку та виконати механізовані роботи в агротехнічні строки, а це в свою чергу буде збільшувати продуктивність праці.

Одна з можливих постановок задачі полягає в наступному: визначити оптимальне доукомплектування МТП на найближчу перспективу (3-5 років) або на поточний рік при умові, що підприємство має сільськогосподарські машини та трактор, планується покупка нової та списання старої техніки з метою мінімізації загальних витрат.

Критерій оптимальності. В якості критерію оптимальності задачі можуть бути вибрані такі показник, як приведені витрати, собівартість механізованих робіт, що виконуються, об'єм капітальних вкладень на покупку нової техніки, витрати праці, загальна кількість техніки в еталонному обчисленні.

Економічно найбільш обґрунтованим є показник мінімізації приведених витрат, тому, що в ньому враховуються поточні витрати на виконання механізованих робіт, а капітальні вкладення на придбання нової техніки.

Система змінних.

- Основна група – кількість тракторів та сільськогосподарських машин, що купується.
- Кількість агрегатів визначеного типу, що виконують роботі в агроперіоді.
- Кількість тракторів та сільськогосподарських машин, що підлягає списанню

Система обмежень.

– По обов’язковому виконанню всіх запланованих робіт.

– По балансу використання тракторів всіх марок (що є і що купуються).

– По виконанню технологічно пов’язаних між собою робіт у визначеній послідовності.

Приклад. У господарстві весняно-польові роботи проводяться в середньому з 25 березня до 28 квітня. В цей період потрібно виконувати роботи в певному обсязі (таблиця 13). Для виконання заданого обсягу робіт господарство має машинно-тракторний парк, потужність якого в залежності від кількості тракторів відповідно до їх марок надана в таблиці 14 (ум. ет. га). Собівартість 1 ум. ет. га (грн.) (таблиця 9.11). Побудувати економіко-метематичну модель та розв’язати її методом потенціалів.

Таблиця 9.11.

Собівартість 1 умовного еталонного гектара (грн.)

Види робіт	Т-150	ДТ-75	Т-38	МТЗ-82
Закриття вологи	3,3	3,2	-	4,4
Передпосівна культивація	2,6	2,8	2,4	-
Сівба зернових	7,2	5,6	4,4	5,0
Сівба пропасних	6,0	5,6	-	4,6
Закоткування	-	1,5	1,6	2,0

Заплановані обсяги робіт: Закриття вологи- 4400; Передпосівна культивація – 4400; Сівба зернових – 2800; Сівба пропасних – 1000; Закоткування – 2100 умовних еталонних гектари.

Потужність машинно-тракторного парку: Т-150 – 3800; ДТ-75 – 3500; Т-40 – 900; МТЗ-82 - 6500 умовних еталонних гектари.

Розв’язок задачі.

Складемо економіко-математичну модель задачі.

Позначимо x_{ij} – об’єм виконання і роботи j маркою трактора, умовні га.

Система обмежень задачі:

І. По виконання плану робіт, ум. га

1. закриття вологи

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 4400$

2. передпосівна культивація

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 4400$

3. сівба зернових

$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 2800$

4. сівба пропашних

$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1000$

5. закоткування

$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} = 2100$

II. По потужності тракторів, ум.га

1. Т-150

$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 3800$

2. ДТ-75

$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 3500$

3. Т-38

$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 900$

4. МТЗ-82

$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 6500$

Цільова функція – мінімум витрат на виконання робіт

$Z_{min} = 3{,}3x_{11} + 3{,}2x_{12} + 0x_{13} + 4{,}4x_{14} + 2{,}6x_{21} + 2{,}8x_{22} + 2{,}4x_{23} + 0x_{24} + 7{,}2x_{31} + 5{,}6x_{32} + 4{,}4x_{33} + 5{,}0x_{34} + 6{,}0x_{41} + 5{,}6x_{42} + 0x_{43} + 4{,}6x_{44} + 0x_{51} + 1{,}5x_{52} + 1{,}6x_{53} + 2{,}0x_{54}$

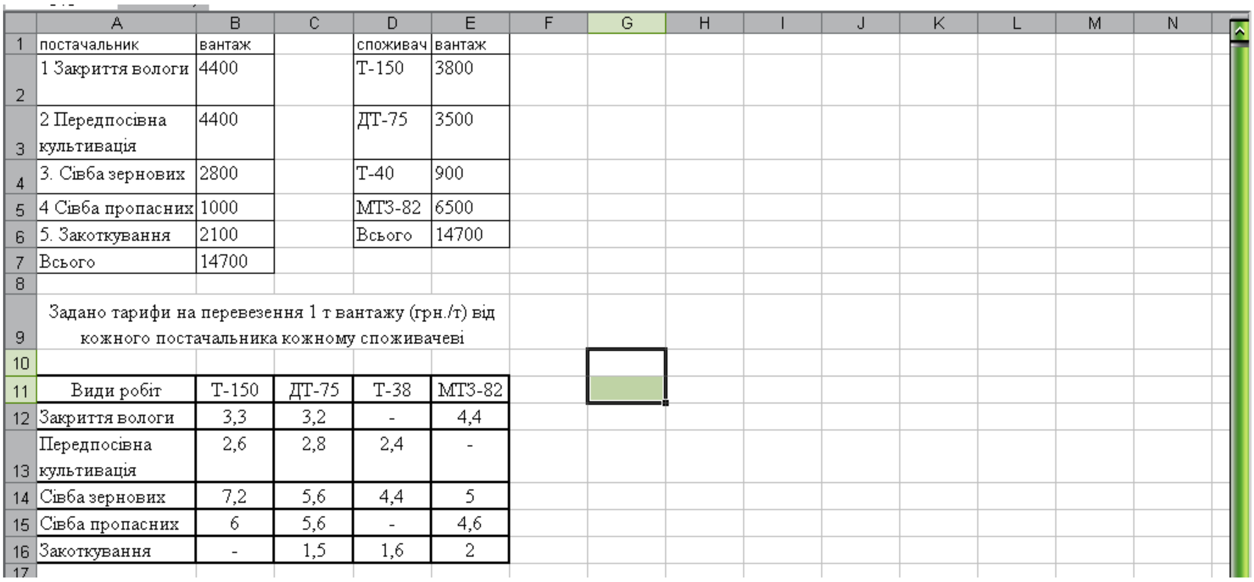
Перевіримо тип задачі – закритий чи відкритий.

4400 + 4400 + 2800 + 1000 + 2100 = 14700

3800 + 3500 + 900 + 6500 = 14700

Розв'язання задачі в електронних таблицях Excel

Мінімізація витрат на перевезення. При плануванні значних обсягів перевезень вантажів завжди з'являється задача оптимальної (за певним критерієм) оцінки їх організації. Розглянемо транспортну задачу за критерієм вартості перевезення. Відомі наявності вантажу у постачальників і потреби споживачів. Розташуємо вихідні дані в електронних таблицях, як показано на мал.9.5.



постачальник	вантаж
1 Закриття вологи	4400
2 Передпосівна культивація	4400
3. Сівба зернових	2800
4 Сівба пропасних	1000
5. Закоткування	2100
Всього	14700

споживач	вантаж
Т-150	3800
ДТ-75	3500
Т-40	900
МТЗ-82	6500
Всього	14700

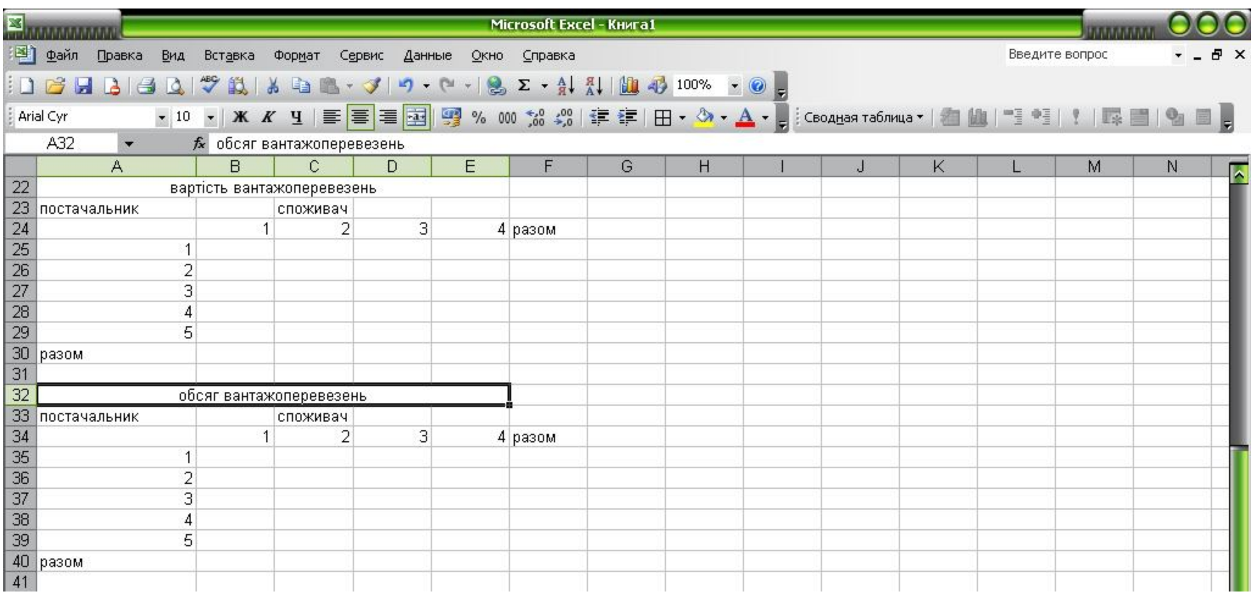
Задано тарифи на перевезення 1 т вантажу (грн./т) від кожного постачальника кожному споживачеві

Види робіт	Т-150	ДТ-75	Т-38	МТЗ-82
Закриття вологи	3,3	3,2	-	4,4
Передпосівна культивація	2,6	2,8	2,4	-
Сівба зернових	7,2	5,6	4,4	5
Сівба пропасних	6	5,6	-	4,6
Закоткування	-	1,5	1,6	2

Рис. 9.5. Розташування вихідних даних в електронній таблиці

Для розв’язання задачі необхідно:

- побудувати таблиці для розрахунків, як показано на мал. 9.6;

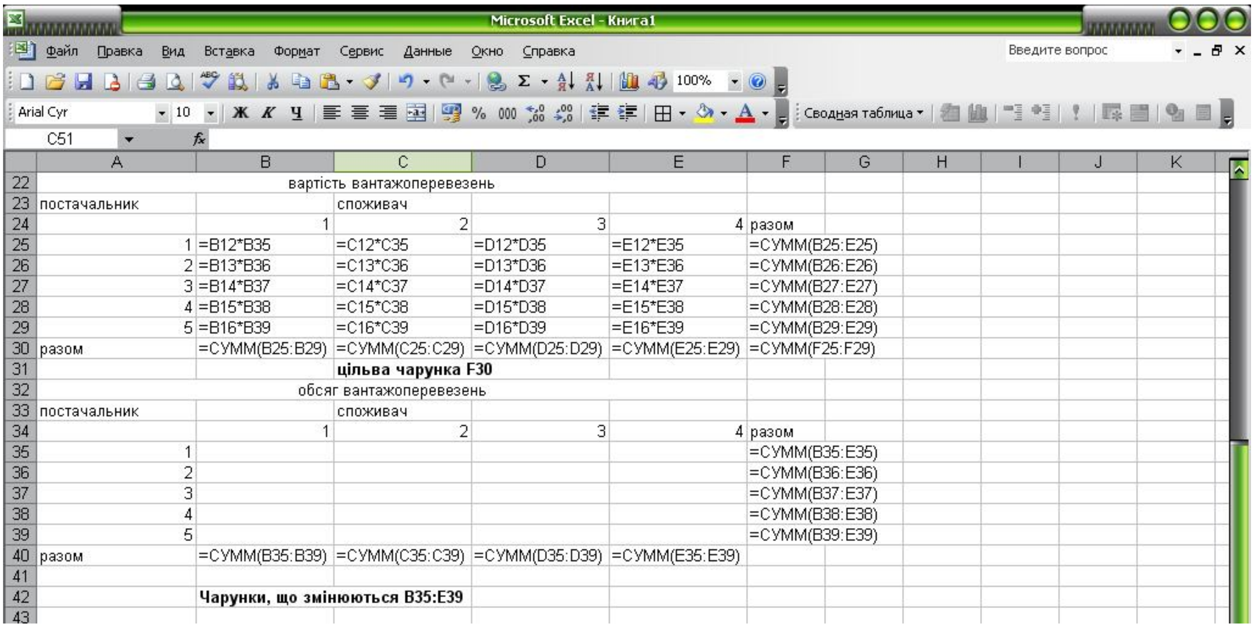


вартість вантажоперевезень					
постачальник		споживач			
	1	2	3	4	разом
1					
2					
3					
4					
5					
разом					

обсяг вантажоперевезень					
постачальник		споживач			
	1	2	3	4	разом
1					
2					
3					
4					
5					
разом					

Рис. 9.6. Побудова таблиць для розрахунків

- у чарунку B25 ввести формулу =B12*B35 (вартість перевезення вантажу від першого постачальника до першого споживача) і продублювати цю формулу, як показано на мал. 9.7;



	A	B	C	D	E	F
22		вартість вантажоперевезень				
23	постачальник		споживач			
24		1	2	3	4	разом
25	1	=B12*B35	=C12*C35	=D12*D35	=E12*E35	=СУММ(B25:E25)
26	2	=B13*B36	=C13*C36	=D13*D36	=E13*E36	=СУММ(B26:E26)
27	3	=B14*B37	=C14*C37	=D14*D37	=E14*E37	=СУММ(B27:E27)
28	4	=B15*B38	=C15*C38	=D15*D38	=E15*E38	=СУММ(B28:E28)
29	5	=B16*B39	=C16*C39	=D16*D39	=E16*E39	=СУММ(B29:E29)
30	разом	=СУММ(B25:B29)	=СУММ(C25:C29)	=СУММ(D25:D29)	=СУММ(E25:E29)	=СУММ(F25:F29)
31			**цільва чарунка F30**			
32		обсяг вантажоперевезень				
33	постачальник		споживач			
34		1	2	3	4	разом
35	1					=СУММ(B35:E35)
36	2					=СУММ(B36:E36)
37	3					=СУММ(B37:E37)
38	4					=СУММ(B38:E38)
39	5					=СУММ(B39:E39)
40	разом	=СУММ(B35:B39)	=СУММ(C35:C39)	=СУММ(D35:D39)	=СУММ(E35:E39)	
41						
42		**Чарунки, що змінюються B35:E39**				
43						

Рис9.7. Введення формул

- загальні витрати, тобто вартість перевезень всього вантажу, обчислити чарунці F30 як загальну суму витрат усіх постачальників (цільова функція повинна мати мінімальне значення);

- вибрати команду **Сервис – Поиск решения**;

- у вікні **Поиск решения** заповнити поля, як показано на мал. 9.8, встановивши обмеження - обсяг вантажу, який перевезений споживачеві, і який повинен дорівнювати його потребам; обсяг вантажу, який перевезений постачальником, і який повинен дорівнювати його можливостям;

- натиснути кнопку **Параметри** та встановити їх значення: модель э лінійною; значення змінних є невід'ємними і натиснути клавішу ОК;

- у вікні **Поиск решения** натиснути кнопку **Выполнить;**

Слід відмітити, що при заповненні таблиць, які зображені на мал.2, згідно даних мал.9.5, в чарунках при записуванні формул, після натискування <Enter> будуть записуватися числові значення (таблиця на мал. 9.6, для кращого розуміння методики, записана в текстовому режимі).

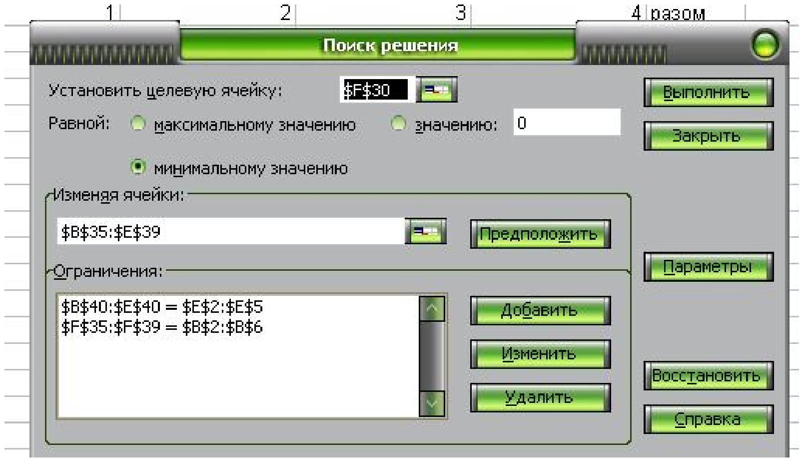
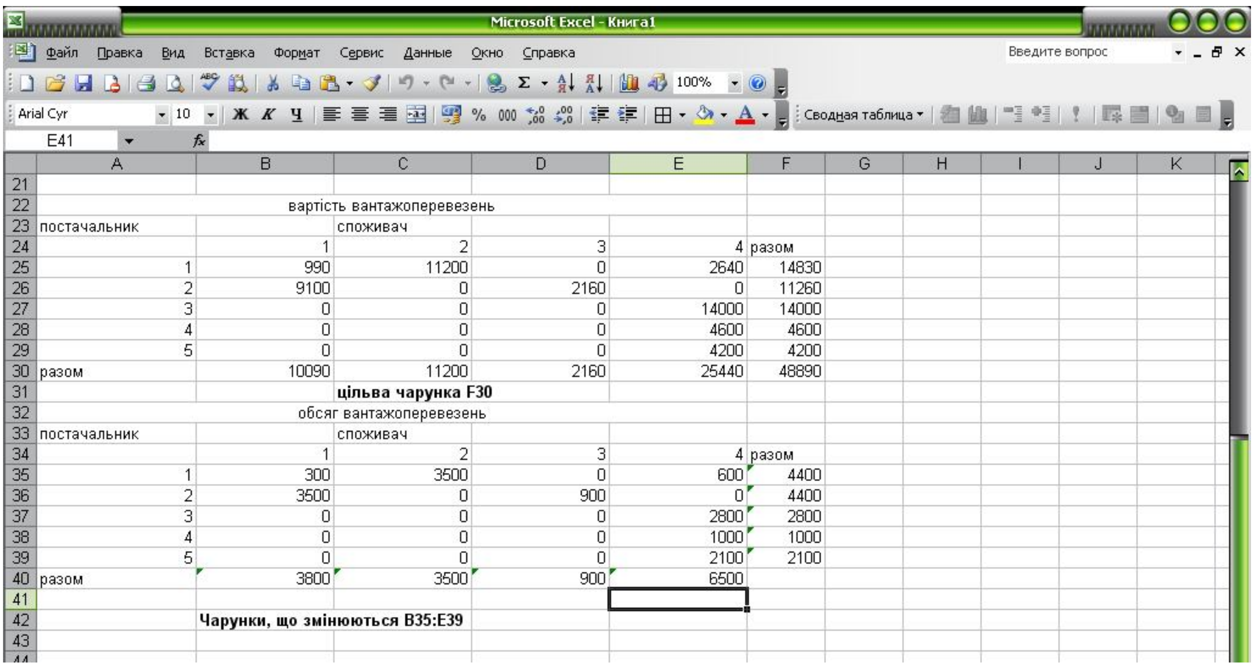


Рис. 9.7. Заповнення вікна “Поиск решений”



	A	B	C	D	E	F
21						
22		вартість вантажоперевезень				
23	постачальник		споживач			
24		1	2	3	4	разом
25	1	990	11200	0	2640	14830
26	2	9100	0	2160	0	11260
27	3	0	0	0	14000	14000
28	4	0	0	0	4600	4600
29	5	0	0	0	4200	4200
30	разом	10090	11200	2160	25440	48890
31			**цільва чарунка F30**			
32		обсяг вантажоперевезень				
33	постачальник		споживач			
34		1	2	3	4	разом
35	1	300	3500	0	600	4400
36	2	3500	0	900	0	4400
37	3	0	0	0	2800	2800
38	4	0	0	0	1000	1000
39	5	0	0	0	2100	2100
40	разом	3800	3500	900	6500	
41						
42		**Чарунки, що змінюються B35:E39**				
43						

Рис. 9.9. Таблиця, що містить оптимальний розв’язок задачі

Як ми бачимо, план вантажоперевезень, який одержано за допомогою надбудови Excel **Поиск решения** (мал.9.9), забезпечить мінімальні витрати на виконання робіт в розмірі 48890 грн.

9.12. Приклади та завдання для самостійної роботи

Задача 1. Скласти математичну модель задачі та знайти її розвязок в електронних таблицях.

Для складання кормового раціону для годування дійної корів із добовим надоєм 14 кг при жирності молока 3,8% с живою вагою 500 кг. На період складання раціону в господарстві є такі види кормів: ячмінь молотий, кукурудза молота, мука горохова, комбікорм, кормові коренеплоди, силос кукурудзяний, сіно суданської трави, сіно люцерни, солома ярих зернових. Також є можливість закупити необхідну кількість мікроелементів, мінеральних та вітамінних підкормок.

Як показує практика, в умовах господарства в зимовий період необхідно збалансувати раціон годування крупної рогатої худоби по загальноприйнятим поживним речовинам, вітамінам та мікроелементам (міді, кобальту, марганцю, цинку).

Для забезпечення заданої продуктивності тварини необхідно, щоб в кормовому раціоні вміщувалось не менше 14,1 кормових од., 1270 г перетравного протеїну, 80 г кальцію, 55 г фосфору, 500 мг каротину, 115 г меді, 14,1 г кобальту, 141 мг цинку, 559 мг марганцю. Сухої речовини в раціоні повинно міститись не більше 22,5 кг.

В співвідношенні із зоотехнічними вимогами в умовах господарства розраховані допустимі межі вмісту в раціоні різноманітних груп кормів (в % до загальної поживності раціону): концентровані – 15-25, соковиті – 45-60, грубі – 25,35.

В зв’язку з специфічною дією на організм тварини деяких кормів та вплив їх на якість молока та молочних продуктів кількість горохової муки не повинно перевищувати 1,5 кг, силосу – 25 кг. В загальному об’ємі грубих кормів не менше половини повинно складати сіно.

Собівартість 1 кг корму (в грош. од.) в господарстві складає: ячменю молотого – 2, кукурудзи молотої – 3, муки горохової – 3,1, кормових коренеплодів – 0,5, силосу кукурудзяного – 0,7, сіна суданської трави – 1,6, сіна люцерни – 1,4, соломи ярових культур – 0,2. Ззовні господарство купує комбікорм (9,3 грош. од.), крейда (0,65 грош. од.) та повернену сіль (0,18 грош. од.). Вартість 1 кг мікроелементів складає: сіркокислої меді та хлористого кобальту – 1,8 грош. од., сіркокислого цинку 1, грош. од., сіркокислого марганцю – 1 грош. од., препарат вітаміну А коштує 1,3 грош. од.

Вміст поживних речовин в 1 кг корму наведено в таблиці

Види поживних речовин	Ячмінь молотий, кг	Кукурудза молота,, кг	Мука горохова, кг	Комбікорм кг	Кормові коренеплоди, кг	Силос кукурудзяний, кг	Сіно суданської трави, кг	Сіно люцерни, кг	Солома ярових,кг	Кормовий преципітат, кг	Кістяна мука, кг	Крейда, кг	Поварена сіль, кг	Сіркокисла мідь, г	Хлористий кобальт, г	Сіркокислий цинк,, г	Сіркокислий марганець, г	Препарат вітаміну А, мл	Загальна кількість кормових одиниць, кг
1. Всього кормових одиниць в раціоні,кг	1,2	1,3	1,18	1	0,13	0,2	0,4	0,5	0,28										-1
2. Кормові одиниці,кг																			1
3. Перетравний протеїн, г	80	80	195	140	9	14	40	110	13										
4. Кальцій, г	1,4	0,5	1,0	2,0	0,4	1,3	2,8	15,0	3,0	260	310	380							
5. Фосфор, г	3,5	3,0	3,0	8,0	0,3	0,6	2,4	2,3	1,0	170	150								
6. Каротин, мг	2,0	1,0	4,0	3,0	0	15,0	15,0	20,0	2,0									200	
7. Мідь, кг	3,7	6,0	2,0	4,0	1,0	1,2	3,8	7,6	3,0					254					
8. Кобальт, мг	0,2	0,25	0,09	0,1	0,04	0,06	0,17	0,39	0,25						248				
9. Цинк,мг	21,0	44,6	17,4	22,1	3,3	5,4	20,4	21,2	13,6							227			
10. Марганець, мг	29,4	25,5	15,3	19,3	9,1	14,9	42,2	45,5	51,0								227		
11. Суха речовина, кг	0,85	0,85	0,85	0,85	0,12	0,25	0,85	0,85	0,85										

Задача 2. Скласти математичну модель задачі та знайти її розвязок в електронних таблицях.

У господарстві весняно-польові роботи проводяться в середньому з 25 березня до 28 квітня. В цей період потрібно виконувати роботи в певному обсязі (таблиця). Для виконання заданого обсягу робіт господарство має машинно-тракторний парк, потужність якого в залежності від кількості тракторів відповідно до їх марок надана в таблиці (ум. ет. га). Відома собівартість 1 ум. ет. га (грн.)

Собівартість 1 умовного еталонного гектара (грн.)

Види робіт	Т-150	ДТ-75	Т-38	МТЗ-82
Закриття вологи	3,3	3,2	-	4,4
Передпосівна культивація	2,6	2,8	2,4	-
Сівба зернових	7,2	5,6	4,4	5,0
Сівба пропасних	6,0	5,6	-	4,6
Закоткування	-	1,5	1,6	2,0

Заплановані обсяги робіт

Закриття вологи	Передпосівна культивація	Сівба зернових	Сівба пропасних	Закоткування
4400	4400	2800	1000	2100

Потужність машинно-тракторного парку

Т-150	ДТ-75	Т-40	МТЗ-82
3800	3500	900	6500

Побудувати економіко - математичну модель та розв’язати її методом потенціалів.

Задача 3. Визначити оптимальний план реалізації сільськогосподарської продукції у детермінованому випадку.Визначити оптимальний план реалізації сільськогосподарської продукції у випадку цінового ризику:

Постановка задачі. Запас продукції власника дорівнює 100 тис. т.

Вхідна інформація для визначення оптимального терміну реалізації запасів сільськогосподарської продукції за детермінованих майбутніх цін

Показник	Плановий період				
	жовтень	листопад	грудень	січень	лютий
Майбутня ціна реалізації 1 т продукції, грн.	330	350	390	420	455
Вартість зберігання 1 т продукції до моменту реалізації, грн.	20	45	75	110	150

Випадок цінового ризику

Вихідні дані щодо майбутніх вартісних показників для визначення календарного плану реалізації сільськогосподарської продукції за умов ризику

Показник	Плановий період				
	жовтень	листопад	грудень	січень	лютий
Очікувана ціна реалізації 1 т продукції, грн.	330	350	390	420	455
Стандартне відхилення ціни реалізації 1 т продукції від її очікуваного значення, грн.	10	15	20	30	50
Вартість зберігання 1 т продукції до моменту реалізації, грн.	20	45	75	110	150

9.13. Контрольні питання

1. Охарактеризуйте модель вибору стратегії розвитку малого підприємства
2. В чому полягає модель оптимізації вибору ефективних виробничих ресурсів
3. Наведіть модель визначення обсягу виробництва продукції
4. В чому полягає оптимізація фінансово-господарської програми підприємства
5. Охарактеризуйте модель аналізу кредитного ризику підприємства
6. В чому полягає моделювання руху оборотних засобів
7. Оптимізація вибору товару з врахуванням області звичок споживача.
8. Наведіть модель формування цінового рівня взаємозамінної продукції
9. Наведіть математичну модель оптимізації календарного плану реалізації сільськогосподарської продукції за дермінованих умов
10. Економіка-математична модель оптимізації календарного плану реалізації сільськогосподарської продукції за умов цінового ризику
11. Наведіть систему обмежень моделі оптимізації кормового раціону
12. Економіка-математична модель оптимізації використання машинно-тракторного парку

РОЗДІЛ 10

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Варіант 1.

Завдання 1.

Многокутником розв'язків задачі лінійного програмування на площині є

1. Множина точок перетину півплощин.
2. Область допустимих розв'язків задачі.
3. Многокутник, обмежений лініями.
4. Графік прямих.

Завдання 2.

Якщо при розв'язанні задачі лінійного програмування симплекс-методом зі штучним базисом, в рядку (m+2) всі коефіцієнти дорівнюють нулю, це означає, що

1. Задача розв'язку не має.
2. Всі штучні змінні з базису виведені, переходимо до аналізу (m+1) рядка.
3. План вважається оптимальним.

Завдання 3.

За наведеною симплексною таблицею виписати розв'язок задачі ; перевірити його на оптимальність за симплексним методом; розрахувати наступну симплексну таблицю, якщо це потрібно.

базис	$C_{баз}$	P_0	8	10	0	-5	0	0	P_0/a_{ij}
			X1	x2	x3	X4	X5	X6	
X5	0	450	2	3	4	2	1	0	
X6	0	380	3	2	1	2	0	1	

Завдання 4.

Для наступної стрічки симплексної таблиці побудувати додаткове обмеження за методом Гоморі

X1+1/2*X2–8/3*X3=16/3

1.X1+1/2*X2–2/3*X3≥1/3

2.X1+1/2*X2–2/3*X3≤1/3

3.1/2*X2–2/3*X3≥1/3

4.1/2*X2–2/3*X3≤1/3

5. 1/2*X2+2/3*X3≤1/3

6.вірної відповіді не має

Завдання 5.

Вершини ломаної проходять через...

1. пусті клітинки
2. зайняті клітинки
3. всі клітинки
4. клітинки з мінімальними тарифами
5. клітинки з максимальними тарифами

Завдання 6.

Побудувати економіко-математичну модель задачі та знайти її початковий розв’язок

Постачальники та наявність вантажу в них		Користувачі та їх можливості прийняти вантаж				
		1 100	2 150	3 200	4 100	5 50
1	200	4	6	2	1	5
2	50	2	3	6	1	9
3	150	5	7	5	5	8
4	200	6	1	3	2	2

ВАРІАНТ 2.

Завдання 1.

Лінією рівня задачі лінійного програмування на площині є

1. $2x_1-x_2=c$.
2. $2x_1-x^2_2=c$.
3. $2x_1-x_2+5x_3=c$.
4. $c_1x_1+c_2x_2=const$.

Завдання 2.

Якщо задача лінійного програмування розв‘язуєтьстся на мінімум симплекс-методом зі штучним базисом, в рядку (m+2) всі коефіцієнти від'ємні, це означає, що

1. Задача розв'язку не має.
2. Всі штучні змінні з базису виведені, переходимо до аналізу (m+1) рядка.
3. План вважається оптимальним.

Завдання 3.

За наведеною симплексною таблицею виписати розв’язок задачі ; перевірити його на оптимальність за симплексним методом; розрахувати наступну симплексну таблицю, якщо це потрібно.

базис	$C_{баз}$	P_0	8	10	0	-5	0	0	P_0/a_{ij}
			X1	x2	x3	X4	X5	X6	
X2	10	150	2/3	1	4/5	2/3	1/3	0	
X6	0	80	5/3	0	-5/3	2/3	-2/3	1	

Завдання 4.

Який метод лежить в основі методу Гоморі?

1.метод потенціалів

2.метод найкращого елементу таблиці

3.симплексний метод

4.метод головних компонент

5.метод рент

Завдання 5.

Число, що перерозподіляється по вершинах ломаної визначається як

1. max (a_i, b_j) для тих і та j, що приймають участь в ломаній
2. min (a_i, b_j) для тих і та j, що приймають участь в ломаній
3. max (x_{ij}), для тих x_{ij} біля яких стоїть знак "-"
4. min (x_{ij}), для тих x_{ij} біля яких стоїть знак "-"

Завдання 6.

Графічним методом знайти розв'язок задачі лінійного програмування за умов x1≥0, x2≥0.

$z_{max}=7x_1-4x_2$

$3x_1-2x_2\le15;$

$3x_1-2x_2\ge6;$

$-x_1+2x_2\le4.$

Варіант 3.

Завдання 1.

За наведеною симплексною таблицею виписати розв'язок задачі ; перевірити його на оптимальність за симплексним методом; розрахувати наступну симплексну таблицю, якщо це потрібно.

базис	$C_{баз}$	P_0	8	10	0	-5	0	0	P_0/a_{ij}
			X1	x2	x3	X4	X5	X6	
X2	118	118	0	1	2	2/5	3/5	-2/5	
X1	48	48	1	0	-3	2/5	-2/5	3/5	

Завдання 2.

При розв'язанні задачі лінійного програмування симплекс-методом із штучним базисом елементи нової симплексної таблиці у (m+2) рядку розраховуються за формулою:

1. $a_{ij}^{новне} = \dfrac{a_{ij}^{старе} \times a_{kr} - a_{ir} \times a_{kj}}{a_{kr}}$.

2. $\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_{бi} a_{ij} - c_j,\ j = \overline{1,n}$.

3. $\begin{bmatrix} елемент \\ нової \\ таблиці \end{bmatrix} = \dfrac{1}{\begin{matrix} розв'язувальний \\ елемент \end{matrix}} \times \left(\begin{bmatrix} елемент \\ старої \\ таблиці \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} розв'язувальний \\ елемент \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} елемент \\ розв'язувального \\ стовпця \quad у \\ відповідному \\ рядку \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} елемент \\ розв'язувального \\ рядка \quad у \\ відповідному \\ стовпці \end{bmatrix} \right)$.

Завдання 3.

Чи є економічний зміст додаткових змінних в симплексному методі ?

1.Так

2. Ні

3. Не знаю

4. Так, але не завжди

Завдання 4.

Чому дорівнює дробова чистина числа, що використовується в методі Гоморі (-125/6)

1.5/6	2.1/6	3.–5/6	4. –1/6	5. вірної відповіді не має

Завдання 5.

$d_{ij}=0$ позначає

1. нічого	2. оптимальний план є єдиним	3. оптимальний план не єдиний	4. задача не має розв‘язку	5. цільова функція необмежена

Завдання 6.

Побудувати економіко-математичну модель задачі та знайти її початковий розв’язок

Постачальники та наявність вантажу в них		Користувачі та їх можливості прийняти вантаж				
		1 10	2 15	3 20	4 10	5 50
1	20	14	6	2	8	5
2	50	2	13	6	17	9
3	15	5	7	5	5	8
4	20	6	11	13	21	12

ВАРІАНТ 4.

Завдання 1.

Вектором-градієнтом задачі лінійного програмування на площині для визначення максимального значення функції $z_{max}=3x_1-2x_2$
1. (3;2).
2. (-3;2).
3. (-3;-2).
4. (3;-2).

Завдання 2.

При розв'язанні задачі лінійного програмування симплекс-методом із штучним базисом
1. Змінна, яка стоїть в розв′язувальному рядку, виводиться з базису, а змінна, яка стоїть в розв′язувальному стовпці, вводиться в базис.
2. Змінна, яка стоїть в розв′язувальному рядку, вводиться в базис, а змінна, яка стоїть в розв′язувальному стовпці, виводиться з базису.
3. Змінні міняються місцями.

Завдання 3.

За наведеною симплексною таблицею виписати розв'язок задачі ; перевірити його на оптимальність за симплексним методом; розрахувати наступну симплексну таблицю, якщо це потрібно.

базис	$C_{баз}$	P_0	8	10	0	-5	0	0	0	-M	P_0/a_{ij}
			X1	x2	x3	X4	X5	X6	X7	X8	
X5	0	450	2	3	4	2	1	0	0	0	
X6	0	380	3	2	1	2	0	1	0	0	
X8	-M	9	0	0	1	0	0	0	-1	1	

Завдання 4.

Додаткове обмеження в методі Гоморі вводиться, якщо...
1. в стовпчику P_0 є дробові числа
2.в стовпчику P_0 є від‘ємні числа
3.в стрічці (m+1) є дробові числа
4.в стрічці (m+1) є додатні числа
5. в стрічці (m+1) є від‘ємні числа

Завдання 5.

Заповнених клітинок має бути (n – кількість постачальників, m–кількість користувачів)...

1. m+n-1	2. m+n+1	3. m-n+1	4. m-n-1	5/ n-m+1	6. n-m+1

Задача

Сформулювати двоїсту задачу по відношенню до задачі.

$L=140y_1+560y_2+420y_3 \to max$

$y_1+2y_2-3y_3 \le 6$

$8y_1+31y_2+7y_3 \ge 7$

$-y_1+y_2+3y_3 = 2$

$y_1 \ge 0$

ВАРІАНТ 5.

Завдання 1.

Вектором-градієнтом задачі лінійного програмування на площині для визначення мінімального значення функції z_{max}=-5x_1-2x_2

1. (-5;2).
2. (5;2).
-5. (5;-2).
4. (-5;-2).

Завдання 2.

При розв'язанні задачі лінійного програмування симплекс-методом із штучним базисом коефіцієнти розв'язувального рядка розраховуються за формулою

1. $\dfrac{розвяз.\ елт.}{коеф.\ розв'яз.\ рядка}$.
2. $\dfrac{коеф.\ розв'яз.\ рядка}{розвяз.\ елт.}$.
3. $\sum_{i=1}^{m} c_{бi} a_{ij} - c_j,\ j = \overline{1,n}$.

Завдання 3.

Який тип задач можна розв‘язувати Угорським методом ?

1.вироджені
2.невироджені
3.транспортні
4.балансові
5. цілочисельні
6. нелінійні
7. параметричні

Завдання 4.

За наведеною симплексною таблицею виписати розв’язок задачі ; перевірити його на оптимальність за симплексним методом; розрахувати наступну симплексну таблицю, якщо це потрібно.

базис	$C_{баз}$	P_0	8	10	0	-5	0	0	0	-M	P_0/a_{ij}
			X1	x2	x3	X4	X5	X6	X7	X8	
X5	0	414	2	3	0	2	1	0	4	-4	
X6	0	371	3	2	0	2	0	1	1	-1	
X43	0	9	0	0	1	0	0	0	-1	1	

Завдання 5.

Після кожної ітерації в методі потенціалів кількість заповнених клітинок

1. зменшується
2. збільшується
3. не змінюється
4. кожен раз по-різному

Завдання 6.

Побудувати економіко-математичну модель задачі та знайти її початковий розв'язок

Постачальники та наявність вантажу в них		Користувачі та їх можливості прийняти вантаж			
		1 1000	2 1500	3 1200	4 1100
1	2000	4	6	2	1
2	1000	2	3	6	1
3	1000	5	7	5	5
4	800	6	1	3	2

ВАРІАНТ 6.

Завдання 1.

За наведеною симплексною таблицею виписати розв'язок задачі ; перевірити його на оптимальність за симплексним методом; розрахувати наступну симплексну таблицю, якщо це потрібно.

б зис	$C_{баз}$	P_0	8	10	0	-5	0	0	0	-M	P_0/a_{ij}
			X1	x2	x3	X4	X5	X6	X7	X8	
X2	10	138	2/3	1	0	2/3	1/3	0	4/3	-4/3	
X6	0	93	5/3	0	0	2/3	-2/3	1	-5/3	5/3	
X3	0	9	0	0	1	0	0	0	-1	1	

Завдання 2.

Якщо при розв'язанні задачі лінійного програмування симплекс-методом зі штучним базисом, не всі штучні вектори виключені з базису, в рядку (m+2) всі коефіцієнти дорівнюють нулю, це означає, що

1. Переходимо до аналізу (m+1) рядка.
2. Задача розв'язку не має.
3. Знайдений опорний план є виродженим, базис містить вектори штучного базису.

Завдання 3.

Чи розраховується стовпчик $P_0/\ a_{ij}>0$ при розв'язанні задачі двоїстим симплексним методом?

1.Так
2. Ні
3. Не знаю
4. Так, але не завжди

Завдання 4.

В методі північно- західного кута (задача має n постачальників та m користувачів) першою заповнюється клітинка з координатами (задача на максимум)
1. (1,1)
2. (n,m)
3.(m,n)
4.(n,1)
5. (1,m)
6. відповіді вірної не має

Завдання 5.

Яких з перерахованих класів задач не є задачею математичного програмування
1. лінійне
2. нелінійне
3. динамічне
4. градієнтне
5. стохастичне
6. дробово-лінійне
7. цілочисельне
8. параметричне

Завдання 6.

Побудувати економіко-математичну модель задачі та знайти її початковий розв'язок

Постачальники та наявність вантажу в них		Користувачі та їх можливості прийняти вантаж				
		1 100	2 150	3 200	4 100	5 50
1	200	4	6	2	1	5
2	50	2	3	6	1	9
3	150	5	7	5	5	8

Варіант 7.

Завдання 1.

При паралельному переносі лінії рівня задачі лінійного програмування на площині у напрямку вектора-градієнта значення цільової функції
1. Не змінюється.
2. Зростає.
3. Зменшується.

Завдання 2.

Штучна змінна “M” для задачі лінійного програмування, яка розв'язується симплекс-методом зі штучним базисом
1. Досить мале додатне число.
2. Досить мале від'ємне число.
3. Досить велике додатне число.
4. Досить велике від'ємне число.

Завдання 3.

За наведеною симплексною таблицею виписати розв’язок задачі ; перевірити його на оптимальність за симплексним методом; розрахувати наступну симплексну таблицю, якщо це потрібно.

базис	$C_{баз}$	P_0	8	10	0	-5	0	0	0	-M	P_0/a_{ij}
			X1	x2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	
X2	10	100	0	1	0	-2/5	3/5	-2/5	2	-2	
X1	8	57	1	0	0	2/5	-2/5	3/5	-1	1	
X3	0	9	0	0	1	0	0	0	-1	1	

Завдання 4.

В методі найкращого елемента таблиці (задача має n постачальників та m користувачів) першою заповнюється клітинка з координатами (задача на максимум)
1. (1,1) 2. (n,m) 3.(m,n) 4.(n,1)
5. (1,m)
6. правильної відповіді не має

Завдання 5.

В оптимізацій них задачах обов‘язково має бути
1. система обмежень
2. невід‘ємність змінних
3. цільова функція
4. система обмежень та цільова функція
5. система обмежень та невід‘ємність змінних
6. цільова функція та невід‘ємність змінних

Завдання 6.

За методом потенціалів визначити чи є розв’язок задачі оптимальним. У разі потреби виконати ще одну ітерацію.

Постачальники	Користувачі та їх потреба			
	1	2	3	4
1	5 2000	8 1500	5	- 4
2	2,6	2,8	2,4 560	6
3	7	6	4	5 2800
4	6 1000	5	5	4 1100

5	3	- 1 1800	3 1000	2

Варіант 8.

Завдання 1.

Многокутник розв'язків задачі лінійного програмування на площині
1. Завжди розміщений у першому квадраті Декартової системи координат.
2. Завжди розміщений у другому квадраті Декартової системи координат.
3. Завжди розміщений у третьому квадраті Декартової системи координат.
4. Завжди розміщений у першому і дрцгому квадраті Декартової системи координат.
5. Розміщений у всій Декартової системи координат.

Завдання 2.

За наведеною симплексною таблицею виписати розв’язок задачі ; перевірити його на оптимальність за симплексним методом; розрахувати наступну симплексну таблицю, якщо це потрібно.

базис	$C_{баз}$	P_0	-5	2	0	0	-M	P_0/a_{ij}
			X1	X2	X3	X4	X5	
X5	-M	1	1		-1	0	1	
X4	0	5	2	3	0	1	0	

Завдання 3.

Чи є різниця в економічному змісті двоїстих оцінок основних та додаткових змінних?
1.Так 2. Ні 3. Не знаю 4. Так, але не завжди

Завдання 4.

В методі найкращого елемента таблиці (задача має n постачальників та m користувачів) першою заповнюється клітинка (задача на максимум) де
1. мінімальна вартість перевезень
2.максимальна вартість перевезень
3. довільна вартість перевезень
4.правильної відповіді не має

Завдання 5.

Задача відноситься до класу задач лінійного програмування, якщо
1. цільова функція та система обмежень містять лише змінні в першій степені
2. цільова функція містить лише змінні в першій степені
3. система обмежень містить лише змінні в першій степені
4. є умова невід‘ємності змінних

Завдання 6.

За методом потенціалів визначити чи є розв’язок задачі оптимальним. У разі потреби виконати ще одну ітерацію.

Постачальники	Користувачі та їх потреба			
	1	2	3	4
1	3 20	3,2 15	5	- 4,4
2	2,6	2,8	2,4 50	2
3	2	5,6	4,4	5 20
4	6,0 10	3	5	8 10

5	8	- 5 18	1,6 10	2,0

ВАРІАНТ 9.

Завдання 1.

Число, що перерозподіляється по вершинах ломаної визначається як

5. max (a_i, b_j) для тих і та j, що приймають участь в ломаній
6. min (a_i, b_j) для тих і та j, що приймають участь в ломаній
7. max (x_{ij}), для тих x_{ij} біля яких стоїть знак “-“
8. min (x_{ij}), для тих x_{ij} біля яких стоїть знак “-“

Завдання 2.

Якщо цільова функція однієї з пари двоїстих задач не обмежена

1. То друга задача має єдиний розв'язок.
2. То друга задача не обмежена.
3. То друга задача не має планів.

Завдання 3.

Де знаходяться двоїсті оцінки змінних?

1. в (m+1) стрічці
2.в (m+2) стрічці
3. в стовпчику P_0
4.в стовпчику P_0/ a_{ij}>0

Завдання 4.

Для якого методу побудови першого опорного плану транспортної задачі не має різниці спрямування цільової функції (максимум чи мінімум)?

1. метод подвійної переваги
2.метод найкращого елементу стовпчика
3.метод північно-західного кута
4.симплексного методу
5.методу Гоморі
6. метод найкращого елементу таблиці

Завдання 5.

За наведеною симплексною таблицею виписати розв’язок задачі ; перевірити його на оптимальність за симплексним методом; розрахувати наступну симплексну таблицю, якщо це потрібно.

базис	$C_{баз}$	P_0	-5	2	0	0	-M	P_0/a_{ij}
			X1	X2	X3	X4	X5	
X2	2	1	1	1	-1	0	1	
X4	0	2	-1	0	3	1	-3	

Завдання 6.

За методом потенціалів визначити чи є розв’язок задачі оптимальним. У разі потреби виконати ще одну ітерацію.

Постачальники	Користувачі та їх потреба			
	1	2	3	4
1	3,3	3	5 80	- 4,4
2	2,6	8	2	6

	60	50	50	
3	7 40	6 50	4	5,0
4	6	5,6	5	4 110
5	1	- 1,5	1,6 100	2 200

Варіант 10.

Завдання 1.

$d_{ij}=0$ позначає

5. нічого
6. оптимальний план є єдиним
7. оптимальний план не єдиний
8. задача не має розв‘язку
9. цільова функція необмежена

Завдання 2.

Чому дорівнює кількість змінних у двоїстій задачі по відношенню до прямої задачі?

1. Кількості змінних в прямій задачі.
2. Кількості обмежень в прямій задачі.
3. Кількості обмежень в двоїстій задачі.

Завдання 3.

Чи є різниця в економічному змісті коефіцієнтів заміщення основних та додаткових змінних?

1.Так
2. Ні
3. Не знаю
4. Так, але не завжди

Завдання 4.

Транспортна задача відноситься до відкритого типу, якщо

1. $\Sigma a_i=\Sigma b_j$ 2.$\Sigma ai>\Sigma bj$ 3.$\Sigma a_i<\Sigma b_j$ 4. $\Sigma u_i=\Sigma v_j$ 5.$\Sigma ui>\Sigma vj$ 6.$\Sigma u_i<\Sigma v_j$

Завдання 5.

За наведеною симплексною таблицею виписати розв'язок задачі ; перевірити його на оптимальність за симплексним методом; розрахувати наступну симплексну таблицю, якщо це потрібно.

базис	$C_{баз}$	P_0	2	4	3	4	0	0	0	P_0/a_{ij}
			X1	x2	X3	X4	X5	X6	X7	
X4	4	45	-2	1/2	0	1	-2	0	-1	
X6	0	30	-1	1	0	0	-1	1	0	
X3	3	35	5	3/2	1	0	-1/2	0	2	

Завдання 6.

За методом потенціалів визначити чи є розв'язок задачі оптимальним. У разі потреби виконати ще одну ітерацію.

Постачальники	Користувачі та їх потреба			
	1	2	3	4
1	3,3	3,2 1500	5	- 4,4
2	2,6 200	2,8	2,4 560	3
3	7,2	5,6	4,4	5,0 280

4	6,0 100	5,6	2	4,6 110
5	1	- 1,5 180	1,6 100	2,0

Варіант 11.

Завдання 1.

В чому полягає симплексний метод розв'язку задачі лінійного програмування (за умови, що дана задача має оптимальний план і кожен її опорний план невироджений)?

1. В побудові симплекс таблиць.
2. В переході від одного опорного плану до іншого, в результаті чого значення цільової функції покращується.
3. У збільшенні значення цільової функції в процесі побудови симплекс-таблиць.

Завдання 2.

Вільні члени системи обмежень у двоїстій задачі

1. Є коефіцієнтами при відповідних змінних цільової функції прямої задачі.
2. Є вільними членами системи обмежень прямої задачі.
3. Є коефіцієнтами при відповідних змінних цільової функції двоїстої задачі.

Завдання 3.

Де знаходяться коефіцієнти заміщення для основних змінних?

1. в (m+1) стрічці симплексної таблиці
2. в (m+2) стрічці симплексної таблиці
3. в стрічках симплексної таблиці
4. В стовпчику P_0
5. В останньому стовпчику симплексної таблиці

Завдання 4.

За наведеною симплексною таблицею виписати розв'язок задачі ; перевірити його на оптимальність за симплексним методом; розрахувати наступну симплексну таблицю, якщо це потрібно.

базис	$C_{баз}$	P_0	2	4	8	4	0	0	0	P_0/a_{ij}
			X1	x2	X3	X4	X5	X6	X7	
X4		25	-2	1/2	0	1	-2	0	-1	
X6		30	-1	1	0	0	-1	1	0	
X3		35	5	3/2	1	0	-1/2	0	2	

Завдання 5.

Розв'язок задачі лінійного програмування на площині, коли цільова функція приймає максимальне значення, існує тоді

1. Коли многокутник обмежений лініями.
2. Многокутник розв'язків не пустий і на ньому цільова функція обмежена зверху.
3. Многокутник розв'язків повний.

Завдання 6.

За методом потенціалів визначити чи є розв'язок задачі оптимальним. У разі потреби виконати ще одну ітерацію.

Постачальники	Користувачі та їх потреба			
	1	2	3	4
1	3,3 2000	3,2 1500	5	- 4,4 100
2	2,6	2,8	2,4 560	9
3	7,2	5,6	4,4	5,0

4	6,0 1000	5,6	5	4,6 1100
5	5	- 1,5 1800	1,6 1000	2,0

Варіант 12.

Завдання 1.

Опорний план задачі лінійного програмування

$$\begin{cases} Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ \ (i = 1,\dots,m) \\ x_j \ \geq 0 \qquad (j = 1,\dots,n) \end{cases}$$

є оптимальним, якщо

1. всі $\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_{бi} a_{ij} - c_j, j = \overline{1,n}$..
2. всі $\Delta_j \leq 0$.
3. всі $\Delta_j \geq 0$.

Завдання 2.

Матриця коефіцієнтів системи обмежень двоїстої задачі

1. Оберненій матриці коефіцієнтів системи обмежень прямої задачі.
2. Транспонованій матриці коефіцієнтів системи обмежень двоїстої задачі.
3. Транспонованій матриці коефіцієнтів системи обмежень прямої задачі.

Завдання 3.

За наведеною симплексною таблицею виписати розв'язок задачі ; перевірити його на оптимальність за симплексним методом; розрахувати наступну симплексну таблицю, якщо це потрібно.

базис	$C_{баз}$	P_0	2	4	3	4	0	0	0	P_0/a_{ij}
			X1	x2	X3	X4	X5	X6	X7	
X4		12	-2	1/2	0	1	-2	0	-1	
X6		35	-1	1	0	0	-1	1	0	
X3		8	5	3/2	1	0	-1/	0	2	

Завдання 4.

Транспортна задача може бути розв'язана за методом потенціалів, якщо вона є

1. задачею відкритого типу 2.задачею на максимум 3.задачею екстремальною
4.задачею закритого типу 5. задачею на мінімум

Завдання 5.

Вектором-градієнтом задачі лінійного програмування на площині для визначення максимального значення функції $z_{max}=3x_1+5x_{-5}$

1. (3;-5). 2. (-3;-5). 3. (-3;5). 4. (3;-5).

Завдання 6.

За методом потенціалів визначити чи є розв'язок задачі оптимальним. У разі потреби виконати ще одну ітерацію.

Постачальники	Користувачі та їх потреба			
	1	2	3	4
1	3,3 2000	8 1500	5	- 4,4
2	2,6	5	2,4 560	1
3	7,2	4	4,4	5,0 2800
4	6,0 1000	5,6	8	2 1100

5	6	- 1800 1,5	1000 1,6	2,0

Варіант 13.

Завдання 1.

За наведеною симплексною таблицею виписати розв'язок задачі ; перевірити його на оптимальність за симплексним методом; розрахувати наступну симплексну таблицю, якщо це потрібно.

базис	$C_{баз}$	P_0	12	4	3	4	0	0	0	P_0/a_{ij}
			X1	x2	X3	X4	X5	X6	X7	
X4		45	-2	1/2	0	1	-2	0	-1	
X6		30	-1	1	0	0	-1	1	0	
X3		35	5	3/2	1	0	-1/2	0	2	

Завдання 2.

Якщо в двоїстій задачі є зміна, на яку не накладається умова ≥ 0

1. То в двоїстій задачі відповідне обмеження буде у вигляді рівняння.
2. То в двоїстій задачі відповідне обмеження буде у вигляді нерівності $\leq$.
3. То в двоїстій задачі відповідне обмеження буде у вигляді нерівності $\geq$.

Завдання 3.

Чи можуть коефіцієнти заміщення знаходитись в в (m+2) стрічці симплексної таблиці ?

1.Так
2. Ні
3. Не знаю
4. Так, але не завжди

Завдання 4.

Фіктивний постачальник вводиться якщо

1. $\Sigma a_i=\Sigma b_j$
2. $\Sigma ai>\Sigma bj$
3. $\Sigma a_i<\Sigma b_j$
4. $\Sigma u_i=\Sigma v_j$
5. $\Sigma ui>\Sigma vj$
6. $\Sigma u_i<\Sigma v_j$

Завдання 5.

Вектором-градієнтом задачі лінійного програмування на площині для визначення мінімального значення функції $z_{max}=-3x_1-2x_2$

1. (3;2).
2. (-3;2).
3. (-3;-2).
4. (3;-2).

Завдання 6.

За методом потенціалів визначити чи є розв'язок задачі оптимальним. У разі потреби виконати ще одну ітерацію.

Постачальники	Користувачі та їх потреба			
	1	2	3	4
1	3,3 2000	3,2	5	- 4,4
2	2,6	2,8	2,4 560	11
3	7,2	5,6 150	4,4	5,0 280
4	2 1000	9	8	4 1100

5	5	- 1,5 1800	1,6 1000	6

Варіант 14.

Завдання 1.

За наведеною симплексною таблицею виписати розв'язок задачі ; перевірити його на оптимальність за симплексним методом; розрахувати наступну симплексну таблицю, якщо це потрібно.

базис	$C_{баз}$	P_0	25	41	13	24	0	0	0	P_0/a_{ij}
			X1	x2	X3	X4	X5	X6	X7	
X4		45	-2	1/2	0	1	-2	0	-1	
X6		30	-1	1	0	0	-1	1	0	
X3		35	5	3/2	1	0	-1/2	0	2	

Завдання 2.

Значення цільової функції прямої задачі при оптимальному розв'язку

1. Менше або дорівнює значенню цільової функції двоїстої задачі.
2. Більше або дорівнює значенню цільової функції двоїстої задачі.
3. Дорівнює значенню цільової функції двоїстої задачі.
4. Не дорівнює значенню цільової функції двоїстої задачі.

Завдання 3.

Коефіцієнти заміщення основних змінних позначають...

1. зворотній вплив на значення базисних змінних
2. прямий вплив на значення базисних змінних
3. дифіцітність ресурсу
4. невигідність даного виду діяльності
5. нічого не позначають

Завдання 4.

Фіктивний споживач вводиться якщо

1. $\Sigma a_i = \Sigma b_j$ 2. $\Sigma ai > \Sigma bj$ 3. $\Sigma a_i < \Sigma b_j$
4. $\Sigma u_i = \Sigma v_j$ 5. $\Sigma ui > \Sigma vj$ 6. $\Sigma u_i < \Sigma v_j$

Завдання 5.

Для визначення максимального значення задачі лінійного програмування на площині

1. Лінію рівня, що проходить через многокутник розв'язків просуваємо в напрямку вектора-градієнта до тих пір, поки вона не пройде через останню її загальну точку з многокутником розв'язку.
2. Лінію рівня, що проходить через многокутник розв'язків просуваємо в напрямку, протилежному до напрямку вектора-градієнта до тих пір, поки вона не пройде через останню її загальну точку з многокутником розв'язку.
3. Лінію рівня, що проходить через многокутник розв'язків просуваємо в напрямку, протилежному до напрямку вектора-градієнта до тих пір, поки вона не пройде через останню точку з многокутником.

Завдання 6.

За методом потенціалів визначити чи є розв'язок задачі оптимальним. У разі потреби виконати ще одну ітерацію.

Постачальники	Користувачі та їх потреба			
	1	2	3	4
1	3,3 2000	3,2 1500	5 400	- 4,4
2	2,6	2,8	2,4	-
3	1	2	4,4	5,0 2800
4	6,0 1000	5,6	-	4,6 1100

5	4	- 8 1800	1,6 1000	2,0

Варіант 15.

Завдання 1.

Розв'язувальний стовпчик обирається при розв'язанні задачі лінійного програмування симплекс-методом з природним базисом

1. Обирається розв′зувальний стовпчик j за максимальною по абсолютній величині від‘ємній (при розв‘язанні задачі на мінімум - додатній) оцінці в рядку (m+1). Якщо в рядку (m+1) немає від‘ємних (при розв‘язанні задачі на мінімум - додатних) оцінок, то план вважається оптимальним.

2. Обирається розв′зувальний стовпчик j за максимальною по абсолютній величині додатній (при розв‘язанні задачі на мінімум - від‘ємній) оцінці в рядку (m+1). Якщо в рядку (m+1) немає додатних (при розв‘язанні задачі на мінімум - від‘ємних) оцінок, то план вважається оптимальним.

3. $$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_{бi} a_{ij} - c_j,\ j = \overline{1,n}.$$

Завдання 2.

Для пари двоїстих: якщо пряма задача - на max

1. То двоїста - на min. 2. То і двоїста - на max. 3. Не має різниці.

Завдання 3.

За наведеною симплексною таблицею виписати розв'язок задачі ; перевірити його на оптимальність за симплексним методом; розрахувати наступну симплексну таблицю, якщо це потрібно.

базис	$C_{баз}$	P_0	2	,5	3	7	0	0	0	P_0/a_{ij}
			X1	x2	X3	X4	X5	X6	X7	
X4		10	-2	1 2	0	1	-2	0	-1	
X6		12	-1	1	0	0	-1	1	0	
X3		14	5	3/2	1	0	-1/2	0	2	

Завдання 4.

Визначити тип наведеної задачі

$$z_{\max} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, i = 1, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, j = 1, m$$

$$x_{ij} \geq 0$$

1.нелінійного програмування
2.лінійного програмування
3.оптимізацій на задача
4.квадратичного програмування
5.дробово-лінійного програмування
6.цілочисельного програмування
7. транспортна задача

Завдання 5.

При паралельному переносі лінії рівня задачі лінійного програмування на площині у напрямку вектора-градієнта значення цільової функції

1. Не змінюється. 2. Зростає. 3. Зменшується.

Завдання 6.

За методом потенціалів визначити чи є розв’язок задачі оптимальним. У разі потреби виконати ще одну ітерацію.

Постачальники	Користувачі та їх потреба			
	1	2	3	4
1	3,3 200	3,2 150	5	- 4,4
2	2,6	2,8	2,4 560	1

3	7,2	5,6	4,4	5,0 280
4	6,0	5,6	3	4,6 110
5	5 100	- 1,5 180	1,6 100	2,0

Варіант 16.

Завдання 1.

Розв′язувальний рядок і обирається при розв'язанні задачі лінійного програмування симплекс-методом з природним базисом

1. За мінімальною часткою від ділення елементів стовпця вільних членів b_i на додатні елементи розв′язувального стовпця a_{ij}. Якщо в розв′язальному стовпці немає додатних елементів, то задача не має рішеня.
2. За максимальною часткою від ділення елементів стовпця вільних членів b_i на додатні елементи розв′язувального стовпця a_{ij}. Якщо в розв′язальному стовпці немає додатних елементів, то задача не має рішеня.
3. За мінімальною часткою від ділення елементів стовпця вільних членів b_i на від'ємні елементи розв′язувального стовпця a_{ij}. Якщо в розв′язальному стовпці немає додатних елементів, то задача не має рішеня.
4. $P_0/a_{ij}>0$.

Завдання 2.

За наведеною симплексною таблицею виписати розв'язок задачі ; перевірити його на оптимальність за симплексним методом; розрахувати наступну симплексну таблицю, якщо це потрібно.

базис	$C_{баз}$	P_0	2	4	3	14	0	0	0	P_0/a_{ij}
			X1	x2	X3	X4	X5	X6	X7	
X4		5	-2	1/2	0	1	-2	0	-1	
X6		8	-1	1	0	0	-1	1	0	
X3		9	5	3/2	1	0	-1/2	0	2	

Завдання 3.

Чи можна визначити новий оптимальний розв‘язок задачі використовуючи коефіцієнти останньої симплексної таблиці?

1.Так 2. Ні 3. Не знаю 4. Так, але не завжди

Завдання 4.

Метод потенціалів розв‘язує задачі...

1. лінійного програмування
2.нелінійного програмування
3.динамічного програмування
4.спеціального виду лінійного програмування
5.оптимізацій ні задачі

Завдання 5.

Многокутник розв'язків задачі лінійного програмування на площині

1. Завжди розміщений у першому квадраті Декартової системи координат.
2. Завжди розміщений у другому квадраті Декартової системи координат.
3. Завжди розміщений у третьому квадраті Декартової системи координат.
4. Завжди розміщений у першому і дрцгому квадраті Декартової системи координат.
5. Розміщений у всій Декартової системи координат.

Завдання 6.

За методом потенціалів визначити чи є розв'язок задачі оптимальним. У разі потреби виконати ще одну ітерацію.

Постачаль-ники	Користувачі та їх потреба			
	1	2	3	4
1	3,3 2000	3,2 1500	5	- 4,4
2	2,6	2,8	2,4 560	2
3	7,2	5,6	4,4	5,0 2800
4	6,0	5,6	1	4,6

	1000			1100
5	8	- 1,5 1800	1,6 1000	2,0

Варіант 17.

Завдання 1.

При розв'язанні задачі лінійного програмування симплекс-методом з природним базисом

1. Змінна, яка стоїть в розв′язувальному рядку, виводиться з базису, а змінна, яка стоїть в розв′язувальному стовпці, вводиться в базис.
2. Змінна, яка стоїть в розв′язувальному рядку, вводиться в базис, а змінна, яка стоїть в розв′язувальному стовпці, виводиться з базису.
3. Змінні міняються місцями.

Завдання 2.

Якщо, для пари двоїстих задач, і-та змінна оптимального розв'язку двоїстої задачі дорівнює нулеві

1. То умовний і-й ресурс використовується не використовується.
2. То умовний і-й ресурс використовується не повністю.
3. То умовний і-й ресурс використовується повністю.

Завдання 3.

За наведеною симплексною таблицею виписати розв'язок задачі ; перевірити його на оптимальність за симплексним методом; розрахувати наступну симплексну таблицю, якщо це потрібно.

базис	$C_{баз}$	P_0	8	4	3	4	0	0	0	P_0/a_{ij}
			X1	x2	X3	X4	X5	X6	X7	
X4		4	-2	1/2	0	1	-2	0	-1	
X6		5	-1	1	0	0	-1	1	0	
X3		12	5	3/2	1	0	-1/2	0	2	

Завдання 4.

Критерій оптимальності методу потенціалів при розв‘язанні задачі на мінімум...

1. всі $d_{ij} \le 0$
2. всі $dij<0$
3. всі $d_{ij} \ge 0$
4. всі $d_{ij}>0$
5. всі $d_{ij}=0$
6. $u_i+v_j=0$
7. $u_i+v_j>0$
8. $u_i+v_j<0$

Завдання 5.

Якщо лінія рівня при паралельному переносі у напрямку вектора-градієнта задачі на максимум співпала з останньою загальною стороною АВ многокутника розв'язків задачі лінійного програмування на площині, то

1. Розв'язком задачі лінійного програмування є точка А.
2. Розв'язком задачі лінійного програмування є точка В.
3. Розв'язком задачі лінійного програмування є точки А і В.
4. Розв'язком задачі лінійного програмування є відрізок АВ.
5. Розв'язком задачі лінійного програмування є пряма АВ.
6. Задача лінійного програмування не має розв'язку.

Завдання 6.

За методом потенціалів визначити чи є розв'язок задачі оптимальним. У разі потреби виконати ще одну ітерацію.

Постачальники	Користувачі та їх потреба			
	1	2	3	4
1	3,3 2000	3,2 1500	5	- 4,4
2	2,6	2,8	2,4 560	7
3	7,2	5,6	4,4	5,0 2800
4	6,0 1000	5,6	4	4,6 1100

5	2	- 1800	1,5	1,6 1000	2,0

Варіант 18.

Завдання 1.

За наведеною симплексною таблицею виписати розв'язок задачі ; перевірити його на оптимальність за симплексним методом; розрахувати наступну симплексну таблицю, якщо це потрібно.

базис	$C_{баз}$	P_0	2	4	1	4	0	0	0	P_0/a_{ij}
			X1	x2	X3	X4	X5	X6	X7	
X4		0,6	-2	1/2	0	1	-2	0	-1	
X6		5	-1	1	0	0	-1	1	0	
X3		2,6	5	3/2	1	0	-1/2	0	2	

Завдання 2.

Що в симплексному методі вибирається першим?

1. Розв'язальний рядок
2.Розв'язальна стрічка
3.Розв'язальний елемент
4.розраховуються оцінки стовпчиків
5. розраховуються оцінки стрічок

Завдання 3.

Метод Гоморі призначений для розв'язання задач лінійного програмування...

1.в яких змінні можуть приймати лише дробові значення
2.в яких змінні можуть приймати лише цілі значення
3.всіх задач
4. що мають розподільний характер (транспортні задачі)

Завдання 4.

Метод потенціалів розв'язує задачі...

1. лінійного програмування
2.нелінійного програмування
3.динамічного програмування
4.спеціального виду лінійного програмування
5.оптимізацій ні задачі

Завдання 5.

Якщо лінія рівня при паралельному переносі у напрямку вектора-градієнта задачі на мінімум співпала з останньою загальною стороною АВ многокутника розв'язків задачі лінійного програмування на площині, то

1. Розв'язком задачі лінійного програмування є точка А.
2. Розв'язком задачі лінійного програмування є точка В.
3. Розв'язком задачі лінійного програмування є точки А і В.
4. Розв'язком задачі лінійного програмування є відрізок АВ.
5. Розв'язком задачі лінійного програмування є пряма АВ.
6. Задача лінійного програмування не має розв'язку.
7. Розв'язок невідомий.

Завдання 6.

За методом потенціалів визначити чи є розв'язок задачі оптимальним. У разі потреби виконати ще одну ітерацію.

Постачальники	Користувачі та їх потреба			
	1	2	3	4
1	3,3 2000	3,2 1500	5	- 4,4
2	2,6	2,8	2,4 560	5,6
3	7,2 1000	5,6	4,4	5,0 2800

4	6,0	5,6	7,2	4,6 1100
5	5	- 1,5 1800	1,6 1000	2,0

Варіант 19.

Завдання 1.

Який економічний зміст мають штучні змінні, які вводяться для отримання розширеної форми запису ЗЛП.

1. Ресурс j використано не повністю.
2. Ресурс j використано повністю.
3. Це означає, що i-й ресурс використано повністю.
4. Це означає, що i-й ресурс використано не повністю.
5. Економічного змісту не мають.

Завдання 2.

За наведеною симплексною таблицею виписати розв'язок задачі ; перевірити його на оптимальність за симплексним методом; розрахувати наступну симплексну таблицю, якщо це потрібно.

базис	$C_{баз}$	P_0	2	2	3	4	0	0	0	P_0/a_{ij}
			X1	x2	X3	X4	X5	X6	X7	
X4		5	-2	1/2	0	1	-2	0	-1	
X6		12	-1	1	0	0	-1	1	0	
X3		9	5	3/2	1	0	-1/2	0	2	

Завдання 3.

Додаткове обмеженні в методі Гоморі будується за визначенням

1. стовпчиком
2. стрічкою
3. розв'язальним елементом
4. відношенням P_0/a_{ij}

Завдання 4.

Характеристики вільних клітинок визначаються для

1. вільних клітинок
2. клітинок, що задіяні в ломаній лінії
3. заповнених клітинок
4. постачальників
5. користувачів

Завдання 5.

При розв'язанні задачі лінійного програмування симплекс-методом з природним базисом (m+1) рядок симплексної таблиці розраховується за формулою (для першої таблиці):

1. $a_{ij}^{новне} = \dfrac{a_{ij}^{старе} \times a_{kr} - a_{ir} \times a_{kj}}{a_{kr}}$.

2.. $a_{ij}^{новне} = \dfrac{a_{ij}^{старе} \times a_{kr} - a^{старе}{}_{ir} \times a_{kj}}{a_{kr}}$

3. $\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_{бi} a_{ij} - c_j, \; j = \overline{1,n}$.

Завдання 6.

За методом потенціалів визначити чи є розв'язок задачі оптимальним. У разі потреби виконати ще одну ітерацію.

Постачальники	Користувачі та їх потреба			
	1	2	3	4
1	3,3 2000	3,2 1500	5	- 4,4

2	2,6	2,8	2,4 560	2
3	2	6	4,4	5,0 2800
4	6,0 1000	5	3	4,6 1100
5	4	- 1,5	1	2,0

Варіант 20.

Завдання 1.

Опорний план задачі ЛП називається не виродженим (в задачі n змінних та m обмежень)

1. Якщо він містить рівно n одиничних векторів.
2. Якщо він містить рівно m+n одиничних векторів.
3. Якщо він містить рівно m одиничних векторів.

Завдання 2.

Як в симплексному методі вибирається розв‘язальна стрічка?

1.min P_0/a_{ij}, що менші за 0
2.min P_0/a_{ij}, що більші за 0
3.min P_0, що менші за 0
4.min P_0, що більші за 0

Завдання 3.

За наведеною симплексною таблицею виписати розв'язок задачі ; перевірити його на оптимальність за симплексним методом; розрахувати наступну симплексну таблицю, якщо це потрібно.

базис	$C_{баз}$	P_0	-2	4	3	4	0	0	0	P_0/a_{ij}
			X1	x2	X3	X4	X5	X6	X7	
X4		6	-2	1/2	0	1	-2	0	-1	
X6		41	-1	1	0	0	-1	1	0	
X3		52	5	3/2	1	0	-1/2	0	2	

Завдання 4.

Характеристики вільних клітинок визначаються за формулою (n – кількість постачальників, m–кількість користувачів)

1. $d_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j)$
2. $d_{ij}=c_{ij}-(u_i-v_j)$
3. $d_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$
4. $d_{ij}=c_{ij}+(u_i-v_j)$
5. $d_{ij}=c_{ij}+u_i-v_j$

Завдання 5.

Многокутником розв'язків задачі лінійного програмування на площині є

1. Множина точок перетину півплощин.
2. Область допустимих розв'язків задачі.
3. Многокутник, обмежений лініями.
4. Графік прямих.

Завдання 6.

За методом потенціалів визначити чи є розв'язок задачі оптимальним. У разі потреби виконати ще одну ітерацію.

Постачальники	Користувачі та їх потреба			
	1	2	3	4
1	3,3 2000	3,2 1500	5	- 4,4
2	6	2,8	2,4 560	7
3	7,2	5,6	4,4	5,0 2800

4	6,0 1000	5,6	3	4,6 1100
5	5	- 1,5 1800	1,6 1000	2,0

Варіант 21.

Завдання 1.

План $\overline{X}=(x_1,...,x_j,...,x_n)$ задачі ЛП називається опорним

1. Якщо всі x_i є достатніми.
2. Якщо всі x_i є від‘ємними
3. Якщо всі x_i є достатніми і задовольняється всім обмеженням з системи обмежень
4. Якщо всі x_i є від‘ємними і задовольняється всім обмеженням з системи обмежень

Завдання 2.

Критерій оптимальності в двоїстому симплексному методі (задача на мах)?

1. всі $P_0 \geq 0$
2. всі $\Delta_j \geq 0$
3. всі $P_0 \geq 0$ та всі $\Delta_j \geq 0$
4. всі $P_0 \geq 0$ та всі $\Delta_j \leq 0$
5. всі $P_0 \leq 0$ та всі $\Delta_j \geq 0$
6. всі $P_0 \leq 0$ та всі $\Delta_j \leq 0$

Завдання 3.

Як вибрати стрічку для побудови додаткового обмеження в методі Гоморі?

1.За мінімальною цілою частиною змінної X_i з симплексної таблиці з оптимальним розв'язком задачі

2.За максимальною цілою частиною змінної X_i з будь-якої симплексної таблиці

3. За максимальною дробовою частиною змінної X_i з симплексної таблиці з оптимальним розв'язком задачі

4.За максимальною дробовою частиною змінної X_i з будь-якої симплексної таблиці

Завдання 4.

Потенціали визначаються по...

6. вільним клітинкам
7. клітинкам, що задіяні в ломаній лінії
8. заповненим клітинкам
9. постачальникам
10. користувачам

Завдання 5.

За наведеною симплексною таблицею виписати розв'язок задачі ; перевірити його на оптимальність за симплексним методом; розрахувати наступну симплексну таблицю, якщо це потрібно.

базис	$C_{баз}$	P_0	2	4	3	5	0	0	0	P_0/a_{ij}
			X1	x2	X3	X4	X5	X6	X7	
X4		10	-2	1/2	0	1	-2	0	-1	
X6		5	-1	1	0	0	-1	1	0	
X3		15	5	3/2	1	0	-1/2	0	2	

Завдання 6.

За методом потенціалів визначити чи є розв'язок задачі оптимальним. У разі потреби виконати ще одну ітерацію.

Постачальники	Користувачі та їх потреба			
	1	2	3	4
1	3,3 2000	3,2 1500	5	5 4,4
2	2,6	8	2,4 560	-
3	2	5,6	4,4	5,0 2800
4	6,0	5,6	10	4,6

	1000			1100
5	3,2	- 1,5 1800	1,6 1000	2,0

Варіант 22.

Завдання 1.

Якщо задача лінійного програмування розв‘язуєтьтся на максимум, то в цільову функцію штучні змінні записуються з коефіцієнтом

1. “0”. 2. “-M”. 3. “M”.

Завдання 2.

Знайти оптимальний розв’язок задачі за умови, що значення змінних x1, x2, x3 можуть бути лише цілими числами. (За методом Гоморі).

базис	$C_{баз}$	P_0	21	4	3	4	0	0	0	P_0/a_{ij}
			X1	x2	X3	X4	X5	X6	X7	
X4		10/5	-2/3	1/2	0	1	-2	0	-1	
X6		12/7	-1	1	0	0	-1/8	1	0	
X3		10/3	5	3/2	1	0	-1/2	0	2/5	

Завдання 3.

Чи можна розв‘язати задачу ціль чисельного програмування графічним методом?

1. Ні, в ніякому разі
2. Так, у разі коли змінних є дві
3. Так, коли кількість незалежних змінних є дві
4. Так, вбудь-якому випадку

Завдання 4.

Ломана ліній будується в разі...

1. не оптимальності опорного розв‘язку задачі
2. неопорності оптимального розв‘язку задачі
3. невиконання рівності (m+n-1)
4. для визначення нового опорного розв‘язку задачі

знайдення оптимального розв‘язку задачі

Завдання 5.

При розв'язанні задачі лінійного програмування симплекс-методом з природним базисом елементи нової симплексної таблиці розраховуються за формулою:

1. $a_{ij}^{новне} = \dfrac{a_{ij}^{старе} \times a_{kr} - a_{ir} \times a_{kj}}{a_{kr}}$.

2. $\begin{bmatrix} елемент \\ нової \\ таблиці \end{bmatrix} = \dfrac{1}{\begin{matrix} розв'язувальний \\ елемент \end{matrix}} \times\times \left(\begin{bmatrix} елемент \\ старої \\ таблиці \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} розв'язувальний \\ елемент \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} елемент \\ розв'язувального \\ стовпця \quad у \\ відповідному \\ рядку \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} елемент \\ розв'язувального \\ рядка \quad у \\ відповідному \\ стовпці \end{bmatrix} \right)$.

3. $\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_{бi} a_{ij} - c_j,\ j = \overline{1,n}$.

Завдання 6.

За методом потенціалів визначити чи є розв’язок задачі оптимальним. У разі потреби виконати ще одну ітерацію.

Постачаль-ники	Користувачі та їх потреба			
	1	2	3	4
1	3,3 200	3,2 100	5	- 4,4
2	2,6	2,8	2,4 560	5
3	7,2	5,6	4,4	5,0 280

4	6,0 100	5,6	9	4,6 100
5	5,3	- 1,5 100	1,6 100	2,0

ВАРІАНТ 23.

Завдання 1.

Якщо задача лінійного програмування розв‘язуєтьтся на мінімум симплекс-методом зі штучним базисом, то

1. Розв′язувальний стовпчик j обирається за максимальною від'ємною оцінкою в рядку (m+1).
2. Розв′язувальний стовпчик j обирається за максимальною від'ємною оцінкою в рядку (m+2).
3. Розв′язувальний стовпчик j обирається за максимальною додатною оцінкою в рядку (m+2).
4. Розв′язувальний стовпчик j обирається за максимальною додатною оцінкою в рядку (m+1).

Завдання 2.

Знайти оптимальний розв'язок задачі за умови, що значення змінних x1, x2, x3 можуть бути лише цілими числами. (За методом Гоморі).

базис	$C_{баз}$	P_0	21	4	3	4	0	0	0	P_0/a_{ij}
			X1	x2	X3	X4	X5	X6	X7	
X4		1/8	-2	1/2	0	1	-2	0	-1/9	
X6		12/6	-1/6	1	0	0	-1	1	0	
X3		11/7	5	3/2	1	0	-1/2	0	2/5	

Завдання 3.

Для наступної стрічки симплексної таблиці побудувати додаткове обмеження за методом Гоморі
1/3*x1+8/5*x3-1/3*x4=16/3

1.1/3*x1+3/5*x3+1/3*x4≥1/3
2.1/3*x1+3/5*x3–1/3*x4≥1/3
3.1/3*x1–2/5*x3–1/3*x4≥1/3
4.1/3*x1+3/5*x3+2/3*x4≥1/3
5. 1/3*x1+8/5*x3–1/3*x4≥16/3
6. вірної відповіді не має

Завдання 4.

Вершини ломаної проходять через...

1. пусті клітинки 2. зайняті клітинки 3. всі клітинки
4. клітинки з мінімальними тарифами 5. клітинки з максимальними тарифами

Завдання 5.

Розв'язувальний стовпчик обирається при розв'язанні задачі лінійного програмування симплекс-методом з природним базисом

1. Обирається розв′зувальний стовпчик j за максимальною по абсолютній величині від‘ємній (при розв‘язанні задачі на мінімум - додатній) оцінці в рядку (m+1). Якщо в рядку (m+1) немає від‘ємних (при розв‘язанні задачі на мінімум - додатних) оцінок, то план вважається оптимальним.
2. Обирається розв′зувальний стовпчик j за максимальною по абсолютній величині додатній (при розв‘язанні задачі на мінімум - від‘ємній) оцінці в рядку (m+1). Якщо в рядку (m+1) немає додатних (при розв‘язанні задачі на мінімум - від‘ємних) оцінок, то план вважається оптимальним.
3. $\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_{бi} a_{ij} - c_j,\ j = \overline{1,n}.$

Завдання 6.

За методом потенціалів визначити чи є розв'язок задачі оптимальним. У разі потреби виконати ще одну ітерацію.

Постачаль-ники	Користувачі та їх потреба			
	1	2	3	4
1	10 2000	3 1500	5	- 14

2	12	28	2,4 560	12
3	7,2	5,6	4,4	5 2800
4	6,0 1000	5,6	10	4,6 1100
5	8	- 15 1800	6 1000	20

Варіант 24.

Завдання 1.

Якщо при розв'язанні задачі лінійного програмування симплекс-методом зі штучним базисом, в рядку (m+2) всі коефіцієнти дорівнюють нулю, це означає, що

1. Задача розв'язку не має.
2. Всі штучні змінні з базису виведені, переходимо до аналізу (m+1) рядка.
3. План вважається оптимальним.

Завдання 2.

Чи використовуються штучні змінні в методі потенціалів?

1.Так, завжди 2.Ні, ніколи 3. Так, але не завжди 4. Не можу відповісти

Завдання 3.

Знайти оптимальний розв'язок задачі за умови, що значення змінних x1, x2, x3 можуть бути лише цілими числами. (За методом Гоморі).

базис	$C_{баз}$	P_0	21	4	3	4	0	0	0	P_0/a_{ij}
			X1	x2	X3	X4	X5	X6	X7	
X4		10/6	-2	1/2	0	1	-2	0	-1	
X6		13/5	-1	1/6	0	0	-1	1	-5/9	
X3		16/7	5	3/2	1	0	-1/2	0	2	

Завдання 4.

Число, що перерозподіляється по вершинах ламаної визначається як

9. max (a_i, b_j) для тих і та j, що приймають участь в ломаній
10. min (a_i, b_j) для тих і та j, що приймають участь в ломаній
11. max (x_{ij}), для тих x_{ij} біля яких стоїть знак "-"
12. min (x_{ij}), для тих x_{ij} біля яких стоїть знак "-"

Завдання 5.

Розв′язувальний рядок і обирається при розв'язанні задачі лінійного програмування симплекс-методом з природним базисом

1. За мінімальною часткою від ділення елементів стовпця вільних членів b_i на додатні елементи розв′язувального стовпця a_{ij}. Якщо в розв′язальному стовпці немає додатних елементів, то задача не має рішеня.
2. За максимальною часткою від ділення елементів стовпця вільних членів b_i на додатні елементи розв′язувального стовпця a_{ij}. Якщо в розв′язальному стовпці немає додатних елементів, то задача не має рішеня.
3. За мінімальною часткою від ділення елементів стовпця вільних членів b_i на від'ємні елементи розв′язувального стовпця a_{ij}. Якщо в розв′язальному стовпці немає додатних елементів, то задача не має рішеня.
4. $P_0/a_{ij}>0$.

Завдання 6.

За методом потенціалів визначити чи є розв'язок задачі оптимальним. У разі потреби виконати ще одну ітерацію.

Постачальники	Користувачі та їх потреба			
	1	2	3	4
1	3,3 2000	3,2 1500	5	- 4,4
2	2,6	2,8	2,4 560	-
3	7,2	5,6	4,4	5,0

				2800
4	6,0 1000	5,6	- 200	4,6 1100

Варіант 25.

Завдання 1.

Якщо задача лінійного програмування розв‘язуєтьтся на мінімум симплекс-методом зі штучним базисом, в рядку (m+2) всі коефіцієнти від'ємні, це означає, що

1. Задача розв'язку не має.
2. Всі штучні змінні з базису виведені, переходимо до аналізу (m+1) рядка.
3. План вважається оптимальним.

Завдання 2.

Чи є економічний зміст додаткових змінних в симплексному методі ?

1.Так 2. Ні 3. Не знаю 4. Так, але не завжди

Завдання 3.

Який метод лежить в основі методу Гоморі?

1.метод потенціалів
2.метод найкращого елементу таблиці
3.симплексний метод
4.метод головних компонент
5.метод рент

Завдання 4.

$d_{ij}=0$ позначає

10. нічого
11. оптимальний план є єдиним
12. оптимальний план не єдиний
13. задача не має розв‘язку
14. цільова функція необмежена

Завдання 5.

Побудувати економіко-математичну модель задачі та знайти її початковий розв’язок

Для вирощування двох видів с/г культур використовуються 3 види добрив. Наявність добрив, витрати одиниць добрив на вирощування однієї тони с/г культур наведені в таблиці

Вид ресурсу	Наявність добрив	Витрати на одну тону с/г культур	
		P_1	P_2
азотні	10	1	2
калійні	10	2	1
гумус	не менше 6	1	1

Виручка від реалізації врожаю с/г культур складає 19 тис грн. Витрати на вирощування тони с/г культур P1,P2 відповідно складають 3 та 2 гривні

Необхідно скласти такий план вирощування с/г культур, щоб прибуток був

Завдання 6.

За методом потенціалів визначити чи є розв’язок задачі оптимальним. У разі потреби виконати ще одну ітерацію.

Постачальники	Користувачі та їх потреба			
	1	2	3	4
1	3,3 2000	3,2 1500	5	- 4,4
2	2,6	2,8	2,4 560	3,6
3	7,2	5,6	4,4	5,0 2800

4	6,0 1000	5,6	2,8	4,6 1100
5	4,1	- 1,5 1800	1,6 1000	2,0

Варіант 26.

Завдання 1.

Побудувати економіко-математичну модель задачі та знайти її початковий розв’язок. Визначити оптимальну структуру посівних площ, що забезпечують максимум вартості валової продукції .

Таблиця 1.

Витрати на 1 га	Наявність ресурсу	Витрати на одиницю продукції	
		P_1	P_2
добрива, т	45	3	1
грошові, тис.грн.	144	9	4
трудові, люд.-год.	96	3	4

Прибуток від реалізації одиниці валової продукції P1,P2 відповідно складає 9 та 8 гривні.

Завдання 2.

Де в симплексній таблиці знаходиться розв‘язок задачі, що була розв‘язана двоїстим симплексним методом?

1. в (m+1) стрічці 2.в (m+2) стрічці 3. в стовпчику P_0 4.в стовпчику $P_0/\ a_{ij}>0$

Завдання 3.

Додаткове обмеження в методі Гоморі вводиться, якщо...

1. в стовпчику P_0 є дробові числа
2. в стовпчику P_0 є від‘ємні числа
3. в стрічці (m+1) є дробові числа
4. в стрічці (m+1) є додатні числа
5. в стрічці (m+1) є від‘ємні числа

Завдання 4.

Заповнених клітинок має бути (n – кількість постачальників, m–кількість користувачів)...

1. m+n-1
2. m+n+1
3. m-n+1
4. m-n-1
5. n-m+1
6. n-m+1

Завдання 5.

При розв'язанні задачі лінійного програмування симплекс-методом з природним базисом коефіцієнти розв'язувального рядка розраховуються за формулою

1. $коеф.\ поч.\ рядка = \dfrac{розвяз.\ \ елт.}{коеф.\ розв'яз.\ рядка}$.

2. $коеф.\ поч.\ рядка = \dfrac{коеф.\ розв'яз.\ рядка}{розвяз.\ \ елт.}$.

3. $\Delta_j = \sum\limits_{i=1}^{m} c_{бi} a_{ij} - c_j,\ j = \overline{1,n}$.

Завдання 6.

За методом потенціалів визначити чи є розв’язок задачі оптимальним. У разі потреби виконати ще одну ітерацію.

Постачальники	Користувачі та їх потреба			
	1	2	3	4
1	3,3 2000	3,2 1500	5	- 4,4
2	7,2	5,6	4,4	5,0 2800

3	6,0 1000	5,6	5,4	4,6 1100
4	4	1,5 1800	1,6 1000	2,0

ВАРІАНТ 27.

Завдання 1.

При розв'язанні задачі лінійного програмування симплекс-методом із штучним базисом

1. Змінна, яка стоїть в розв′язувальному рядку, виводиться з базису, а змінна, яка стоїть в розв′язувальному стовпці, вводиться в базис.
2. Змінна, яка стоїть в розв′язувальному рядку, вводиться в базис, а змінна, яка стоїть в розв′язувальному стовпці, виводиться з базису.
3. Змінні міняються місцями.

Завдання 2.

Який тип задач можна розв‘язувати симплексним методом ?

1.вироджені
2.невироджені
3.транспортні
4.балансові
5. цілочисельні
6. нелінійні
7. параметричні

Завдання 3.

Побудувати економіко-математичну модель задачі та знайти її початковий розв'язок

В господарстві для вирощування трьох культур є наступні ресурси:
Рілля, га, –1600
трудові, люд-год, –54000
механізовані роботи,– трактор-зміна,–1380
Нормативи витрат ресурсів наведено в таблиці 1.

Таблиця 1.

показники	Культури		
	Озима пшениця	Кукурудза на зерно	Цукровий буряк
Витрати труда на 1 га, люд-год	24	54	120
Витрати механізованих ресурсів на 1 га, трактор-зміна	0,6	1,2	2,4
Урожайність, ц/га	30	30	250
Ціна реалізації 1 ц , грн	7,6	7	2,9

Потрібно побудувати модель структури посівних площ з критерієм оптимальності – максимум валової продукції в вартісному виразі

Завдання 4.

Після кожної ітерації в методі потенціалів кількість заповнених клітинок

1. зменшується 2. збільшується 3. не змінюється 4. кожен раз по-різному

Завдання 5.

Опорний план задачі ЛП називається не виродженим (в задачі n змінних та m обмежень)

1. Якщо він містить рівно n одиничних векторів.
2. Якщо він містить рівно m+n одиничних векторів.
3. Якщо він містить рівно m одиничних векторів.

Завдання 6.

Побудувати економіко-математичну модель задачі та знайти її початковий розв'язок

Постачальники та наявність вантажу в них		Користувачі та їх можливості прийняти вантаж			
		1 1000	2 1500	3 1200	4 1100
1	2000	4	6	2	1
2	1000	2	3	6	1

3	1000	5	7	5	5
4	800	6	1	3	2

Варіант 28.

Завдання 1.

При розв'язанні задачі лінійного програмування симплекс-методом із штучним базисом коефіцієнти початкового рядка розраховуються за формулою

1. $коеф.поч.рядка = \dfrac{розвяз.елт.}{коеф.розв'яз.рядка}$.

2. $коеф.поч.рядка = \dfrac{коеф.розв'яз.рядка}{розвяз.елт.}$.

3. $\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_{б\,i} a_{ij} - c_j,\ j = \overline{1,n}$.

Завдання 2.

Побудувати економіко-математичну модель задачі та знайти її початковий розв'язок

В господарстві для вирощування трьох овочевих культур виділені наступні ресурси: рілля – 200га, трудові ресурси – 140000люд-год., в тому числі в напружений період – 38500люд.-год. Витрати трудових ресурсів на гектар, урожайність та прибуток з гектару в середньому за три роки наведено в таблиці.

Культури	показники		
	Витрати трудових ресурсів на 1 га (люд-год)		Прибуток (грн./га)
	Всього	В напружений період	
Капуста	500	175	600
Огірки	950	140	350
Томати	2380	210	400

Побудувати модель задачі оптимізації структури посівних площ овочевих культур та розв'язати її симплексним методом за критерієм оптимальності – максимум прибутку.

Завдання 3.

Найкращій елемент транспортної задачі (задача на максимум) – це елемент

1.з найменшим тарифом перевезень

2. з найбільшим тарифом перевезень

3. з максимальним значенням c_{ij}

4. . з мінімальним значенням c_{ij}

5. для якого виконується критерій оптимальності

Завдання 4.

Яких з перерахованих класів задач не є задачею математичного програмування

1. лінійне
2. нелінійне
3. динамічне
4. градієнтне
5. стохастичне
6. дрорбово-лінійне
7. цілочисельне
8. параметричне

Завдання 5.

План $\overline{X}$ =(x_1,...,x_j,...,x_n) задачі ЛП називається опорним

1. Якщо всі x_i є достатніми.
2. Якщо всі x_i є від'ємними
3. Якщо всі x_i є достатніми і задовольняється всім обмеженням з системи обмежень
4. Якщо всі x_i є від'ємними і задовольняється всім обмеженням з системи обмежень

Завдання 6.

За методом потенціалів визначити чи є розв'язок задачі оптимальним. У разі потреби виконати ще одну ітерацію.

Постачальники	Користувачі та їх потреба			
	1	2	3	4
1	5 2000	8 1500	5	- 4
2	2,6	2,8	2,4 560	6
3	7	6	4	5 2800

4	6 1000	5	5	4 1100
5	3	- 1	3	2

Варіант 29.

Завдання 1.

Якщо при розв'язанні задачі лінійного програмування симплекс-методом зі штучним базисом, не всі штучні вектори виключені з базису, в рядку (m+2) всі коефіцієнти дорівнюють нулю, це означає, що

1. Переходимо до аналізу (m+1) рядка.
2. Задача розв'язку не має.
3. Знайдений опорний план є виродженим, базис містить вектори штучного базису.

Завдання 2.

Змінна x3 позначає посівну площу жита. Її двоїста оцінки дорівнює 3. це позначає

1.що якщо вирощувати жито на площі 1 га цільова функція зменшиться на 3 одиниці.
2.змінна x3=0
3.що якщо вирощувати жито на площі 1 га цільова функція збільшиться на 3 одиниці
4.значення змінної x3>0
5. значення змінної x3<0
6. нічого не позначає

Завдання 3.

В методі північно- західного кута (задача має n постачальників та m користувачів) першою заповнюється клітинка з координатами (задача на максимум)

1. (1,1)
2. (n,m)
3.(m,n)
4.(n,1)
5. (1,m)
6. відповіді вірної не має

Завдання 4.

В оптимізацій них задачах обов‘язково має бути

7. система обмежень
8. невід‘ємність змінних
9. цільова функція
10. система обмежень та цільова функція
11. система обмежень та невід‘ємність змінних
12. цільова функція та невід‘ємність змінних

Завдання 5.

Знайти оптимальний розв’язок задачі за умови, що значення змінних x1, x2, x3 можуть бути лише цілими числами. (За методом Гоморі).

базис	$C_{баз}$	P_0	21	4	3	4	0	0	0	P_0/a_{ij}
			X1	x2	X3	X4	X5	X6	X7	
X4		2/3	-2	1/2	0	1	-2	0	-1	
X6		1/2	-1	1	0	0	-1/5	1	6/7	
X3		17/6	5	3/2	1	0	-1/2	0	2	

Завдання 6.

Побудувати економіко-математичну модель задачі та знайти її початковий розв’язок

Постачальники та наявність вантажу в них		Користувачі та їх можливості прийняти вантаж				
		1 100	2 150	3 200	4 100	5 50
1	200	4	6	2	1	5
2	50	2	3	6	1	9
3	150	5	7	5	5	8

Варіант 30.

Завдання 1.

Штучна змінна “М” для задачі лінійного програмування, яка розв'язується симплекс-методом зі штучним базисом

1. Досить мале додатне число.
2. Досить мале від'ємне число.
3. Досить велике додатне число.
4. Досить велике від'ємне число.

Завдання 2.

Чи є різниця в економічному змісті двоїстих оцінок основних та додаткових змінних?

1.Так
2. Ні
3. Не знаю
4. Так, але не завжди

Завдання 3.

Знайти оптимальний розв’язок задачі за умови, що значення змінних x1, x2, x3 можуть бути лише цілими числами. (За методом Гоморі).

базис	$C_{баз}$	P_0	21	4	3	4	0	0	0	P_0/a_{ij}
			X1	x2	X3	X4	X5	X6	X7	
X4		15/3	-2	1/2	0	1	-2	0	-1	
X6		12/7	-1	10/6	0	0	-1/3	1	0	
X3		10/6	5	3/2	1	0	-1/2	0	2	

Завдання 4.

Задача відноситься до класу задач лінійного програмування, якщо

5. цільова функція та система обмежень містять лише змінні в першій степені
6. цільова функція містить лише змінні в першій степені
7. система обмежень містить лише змінні в першій степені
8. є умова невід‘ємності змінних

Завдання 5.

Як в симплексному методі вибирається розв‘язальна стрічка?

1.min P_0/a_{ij}, що менші за 0
2.min P_0/a_{ij}, що більші за 0
3.min P_0, що менші за 0
4.min P_0, що більші за 0

Завдання 6.

Побудувати економіко-математичну модель задачі та знайти її початковий розв’язок

Постачальники та наявність вантажу в них		Користувачі та їх можливості прийняти вантаж				
		1 100	2 150	3 200	4 100	5 50
1	200	4	2	2	4	5
2	250	2	3	6	1	2
3	50	5	7	5	5	8

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абрамов Л. М., Капустин В. Ф. Математическое программирование. Л., Изд-во Ленинград. ун-та, 1976, 184 с.
2. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах. М.: Высш. шк., 1985.
3. Аналітична економія : макроекономіка і мікроекономіка : у 2 кн. / [за ред. С. Панчишина, П. Островерха]. – К. : Знання, 2006. – Кн. 2 : Мікроекономіка. – 437 с.
4. Армстронг Г., Котлер Ф. Маркетинг Загальний курс. – 5–е видання.:Пер. з англ.: Уч. пос.:М.: Видавничий дім "Вільямс", 2001, 608 с.
5. Ашманов С. А. Линейное программирование. М.: Наука, 1981.
6. Бадзь 6. К.М., Вовк В.М. До питання моделювання фінансово-господарської діяльності підприємства. // Вісник Львівського університету. Серія економічна. Проблеми становлення ринкової економіки. Вип.26. Львів. 1995.
7. Бадзь 7. К.М., Вовк В.М. Оптимізація рішень в інвестиційній діяльності // Вісник львівського університету. Серія економічна. Вип.27. Львів. 1996
8. Балабанов И.Т. Основы финансового менеджмента. М.: Финансы и статистика, 2000, 458 с.
9. Белман Р. Динамическое программирование. М.: Изд-во иностранной литературы, 1960.
10. Белман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. М.: Наука, 1965.
11. Бережная Е. В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем : учеб. пособ. – [2–е изд., перераб. и доп.]. М. : Финансы и статистика, 2006, 432 с.
12. Вагнер Г. Основы исследования операций. – Т. 1-3. М.: Мир, 1972.
13. Василенко В.О. Антикризове управління підприємством. К., 2003, 504 с.
14. Василик О.Д. Теорія фінансів: підручник. К.: Ніос, 2000, 416 с.
15. Вентцель Е. С. Исследование операций. М.: «Сов. радио», 1972, 552 с.

16. Вентцель Е. С. Элементы динамического программирования. М.: Наука, 1964.

17. Вітлінський В. В., Скіцько В.І. Концептуальні засади моделювання та управління логістичним ризиком підприємства // Проблеми економіки. 2013, № 4, С. 246-253. - URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Pekon_2013_4_32.

18. Вітлінський В.В. Аналіз, оцінка і моделювання економічного ризику. К.: Деміур, 1996, 212 с.

19. Вітлінський В.В., Наконечний С.І., Терещенко Т.О. Математичне програмування. К.: КНЕУ, 2001, 248с.

20. Вітлінський В.В., Наконечний С.І., Терещенко Т.О. Математичне програмування: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. К.: КНЕУ, 2001

21. Вовк В.М., Камінська Н.І. , Прийма С.С. Моделювання економічних процесів підприємства: монографія. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2011, 448 с.

22. Вовк В.М., Пославська І.М. Інвестування: Навч. посіб. Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2011, 465 с.

23. Вовк В.М., Пославська І.М. Інвестиції та їхні оптимізаційні моделі: Навч. посіб. Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2009, 286 с.

24. Вовк В. М. Математичні методи дослідження операцій в економіко-виробничих системах : монографія. Львів : Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007, 584 с.

25. Геєць В. Ще раз про складові економічного піднесення в Україні // Економіка України, 1998, № 11, С. 17– 29.

26. Глушков В.М. Введение в АСУ. Киев: Техніка, 1974, 320 с.

27. Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. М.: Наука, 1969.

28. Гончаренко Я.В. Математичне програмування. К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2010, 184 с.

29. Гриб В.В., Лысенко Ю.Г., Петренко В.Л., Пономаренко О.Н.Моделирование процесса принятия решения при выборе инвестиционного портфеля // Модели управления капиталом. Новое в экономической кибернетике, 1999, № 2, С. 4–28.

30. Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщение и приложения. М.: Прогресс, 1966.

31. Енциклопедія кібернетики [У 2 т.] – К: УРЕ, 1973.
32. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій: Підручник. — 4-те вид., перероб. і допов. К., 2000, 688 с.
33. Зангвилл У. Нелинейное программирование. Единый подход. М.: «Сов.радио», 1973, 312 с.
34. Злупко С.М., Стефанишин О.В., Швайка Л.А. Підприємництво: основи, особливості, механізми. Львів, ЛНУ ім. І.Франка, 2000 369 с.
35. Калихман И. Л. Сборник задач по математическому программированию. М.: Высшая шк., 1975.
36. Калихман И. Л., Войтенко М. А. Динамическое программирование в примерах и задачах. М.: Высш. шк., 1973.
37. Камінська Н.І. Аналіз виробничого потенціалу підприємства // Вісник Львівського національного університету імені Івана Франка. Серія економічна. 2007, № 38, С.291–296.
38. Камінська Н.І., Камінська Н.І., Комар М.І. Формування інвестиційних стратегій у секторі малого підприємництва // Вісник Львівського національного університету імені Івана Франка. Серія економічна, 2010, № 44, С.699–705.
39. Карагодова О.О., Кігель Р.В., Рожок В.Д. Дослідження операцій: навчальний посібник. К.: Центр учбової літератури, 2007
40. Кини Р.Л, Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предложения и замечания. М.: Радио и связь, 1981, 560 с.
41. Кігель В.Р. Моделі і методи прийняття рішень в ринковій економіці. К.: КЕІМ, 2003
42. Кігель В.Р. Узагальнена методика багатокритеріальної оптимізації економічних рішень // Моделювання та інформаційні системи в економіці: Міжвідом. наук.2000, № 64 С. 82–89, Издатель К.: КНЕУ
43. Кігель Р.В., Елементи лінійного, цілочисельного лінійного і нелінійного програмування: навч. посібник. К.: ІСДО, 1995
44. Кігель В.Р. Методи і моделі підтримки прийняття рішень у ринковій економіці: Монографія. К.: ЦУЛ, 2003
45. Коробов М.Я. Фінансово-економічний аналіз діяльності підприємств: Навч. посіб. К.: товариство “Знання”, 2001, 378 с.
46. Костіна Н.І., Алексеєв А.А., Василик О.Д. Фінанси: система моделей і прогнозів. К.: „Четверта Хвиля”, 1998,303 с.

47. Кремер Н. Ш., Путко Б. А., Тришин И. М., Фридман М. Н.; Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. Исследование операций в экономике: учеб. Пособие для вузов. М.: ЮНИТИ, 2002, 407 с.

48. Кузин Б., Юрьев В. Методы и модели управления фирмой. Санкт–Петербург, 2001, 544с.

49. Левицька Г. Моделювання фінансово-господарської діяльності підприємства. // Вісник львівського університету. Серія економічна. Випуск 32. Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 2003, С. 704–709.

50. Лысенко Ю.Г., Белый А.П., Гнатушенко В.В., и др.. Модели управления проектами в нестабильной экономической бреде. Донецк: ООО “Юго–восток, ЛТД”, 2003, 292 с.

51. Методы принятия решений /[пер. с англ. под ред. И.И. Елисеевой] . – М.: Аудит ЮНИТИ, 1997. – 590 с.

52. Наконечний С. І., Савіна С. С. Математичне програмування: Навч. посіб. К.: КНЕУ, 2003, 452 с.

53. Наконечний С. І., Гвоздецька Л. В. Збірник задач з курсу «Математичне програмування». Частина 1.: Навч. посібник. К.: ІСОД, 1996, 128 с.

54. Наконечный С. И., Андрийчук В. Г. Математическое моделирование экономических процессов сельскохозяйственного производства. Учеб. Пособие. Киев: КИНХ, 1982, 106 с.

55. Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М.: Иностр. лит., 1960, 708 с.

56. Нёльке, Матиас. Учимся принимать решения. Быстро, точно, правильно . [пер. с нем. Д.В. Ковалевой]. М. : Омега–Л, 2006, 127.

57. Порохня В.М. Моделювання економіки: монографія. Запоріжжя: ЗДІА, 2001, 360 с.

58. Портер М. Конкуренция. Киев: Изд. дом «Вильямс», 2000, 627 с.

59. Портер М. Стратегія конкуренції. [пер. з англ.]. – К. : Основи, 1998, 486 с.

60. Правдюк Н.Л., Потапова Н.А., Волонтир Л.О .Економетрія: Навчальний посібник. Вінниця: ПП Балюк І.Б., 2009, 274 с.

61. Райс Т., Койли Б. Финансовые инвестиции и риск. [Пер. с англ.], К.: Торгово–издат. бюро BHV, 1995,592 с.

62. Рязанова Н.С. Фінансове рахівництво: Навч. посіб. К.: Знання – прес, 2002, 246 с.

63. Саати Т. , К. Кернс. Аналитическое планирование. Организация систем. М. : Радио и связь, 1991, 223 с.

64. Сергеева Л.Н. Нелинейная экономика: модели и методы. Запорожье: Полиграф, 2003, 218 с.

65. Ситник В.Ф., Олексюк О.С.Системи підтримки прийняття рішень. К.: Техніка, 1995, 162 с.

66. Скрипник А.В. Державне регулювання трансформаційної економіки (аспекти моделювання): Монографія. Ірпінь. Академія державної податкової служби України, 2002, 312с.

67. Стасюк В.П. Модели адаптивного управления предприятием. Донецк: Юго–восток, 2003, 224 с.

68. Трухаев Р.И. Модели принятия решений в условиях неопределенности. М: Наука, 1981, 258 с.

69. Цегелик Г.Г. Лінійне програмування. Львів: Світ, 1995, 216 с.

70. Шиш І.М. Оптимізація інвестування малих підприємств // Формуваня ринкової економіки в Україні: проблеми економічної кібернетики: Спецвипуск, Львів: «Інтереко», 2007, № 16, С. 242–251.

71. Шиш І.М. Передумови і проблеми розвитку малого бізнесу в Україні // Формуваня ринкової економіки в Україні: проблеми економічної кібернетики: Спецвипуск, Львів: «Інтереко», 2008, № 18, С. 222–226.

72. Шиш І. Економіко-математичне моделювання визначення обсягу виробництва продукції підприємства // Вісник Львівського національного університету імені Івана Франка. Серія економічна, Л.: ЛНУ ім. І. Франка, 2009, Випуск 41, С. 508–513.

Науково-методичне видання

Л.О.Волонтир, Н.А. Потапова, І.М. Ушкаленко, І.А.Чіков

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ В ПІДПРИЄМНИЦЬКІЙ ДІЯЛЬНОСТІ

Навчальний посібник

У авторській редакції
Технічний редактор ***І.М.Ушкаленко***
Комп'ютерне верстання ***Л.О.Волонтир***

Формат 60х84 $^{1}/_{16}$.
Умовн. друк. арк. 18,6 .
Тираж 300. Зам. №

Вінницький національний аграрний університет
вул. Соняшна, 3, м. Вінниця, 21050