МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ВІННИЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина І

Л.І. Новицька, Т.Є. Хрипко

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Вінниця 2020

УДК 51 (072)
Н73

Рекомендовано Вченою радою Вінницького національного аграрного університету Міністерства освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів III-IV ступенів акредитації (протокол №10 від 31 березня 020 р.).

Н73 Вища математика. Частина І. Навчальний посібник / Л.І. Новицька, Т.Є. Хрипко – Вінниця : ТОВ «ТВОРИ», 2020. – 258 с.

Рецензенти:

Іскович-Лотоцький Р.Д., доктор технічних наук, професор кафедри галузевого машинобудування Вінницького національного технічного університету;

Ковтонюк М.М., доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри математики та інформатики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського;

Іванов М.І., кандидат технічних наук, професор кафедри машин та обладнання сільськогосподарського виробництва Вінницького національного аграрного університету.

Посібник складений відповідно до програми навчальної дисципліни «Вища математика» і містить теоретичний матеріал з класичних розділів вищої математики: елементи лінійної та векторної алгебри, аналітичної геометрії; основи диференціального й інтегрального числення, а також типові задачі та приклади з розв’язками, список рекомендованої літератури, питання для самоконтролю.

Матеріали навчального посібника можуть бути використані для організації самостійної роботи студентів спеціальностей інженерно-технологічного факультету ВНАУ, які вивчають основи вищої математики.

Для студентів вищих навчальних закладів III-IV рівнів акредитації денної та заочної форм навчання галузей знань – 20 «Аграрні науки та продовольство», 14 «Електрична інженерія», спеціальностей 208 «Агроінженерія», 141 «Електроенергетика, електротехніка, електромеханіка».

УДК 51 (072)

ISBN 978-966-949-445-0

ЗМІСТ

ВСТУП

У Законах України “Про освіту”, “Про вищу освіту”, Національній доктрині розвитку освіти України у XXI столітті зазначено необхідність підвищення професійного та загальнокультурного рівня випускників. Важливим і актуальним сьогодні є створення системи неперервного навчання й виховання для досягнення високих освітніх стандартів, формування інтелектуального потенціалу нації, забезпечення можливостей духовного збагачення особистості.

Вдосконалення навчального процесу, підвищення якості підготовки фахівців у нових умовах розвитку аграрних вищих навчальних закладів вимагають ґрунтовної математичної підготовки. Сучасного інженера неможливо уявити без оволодіння ним знаннями в галузі математичного моделювання виробничих процесів та інформаційних технологій, без уміння аналізувати явища, узагальнювати закономірності, обґрунтовувати власні міркування, приймати виважені рішення.

Особливе значення в підготовці фахівців має оволодіння математичними методами, вміння логічного мислення, оскільки інженерна діяльність в аграрному секторі пов’язана зі здатністю досягати кінцевого результату через вплив великої кількості випадкових і неконтрольованих факторів. До того ж ці знання необхідні для вимірювання, вивчення, перетворення й прогнозування технологічних явищ в умовах ринкової економіки та нових умовах господарювання в галузях аграрного виробництва.

Навчальний посібник складено на основі досвіду роботи викладачів у Вінницькому національному аграрному університеті. В основу конспекту лекцій покладено програми вищої математики для студентів денної і заочної форм навчання інженерно-технологічного факультету. Доцільність підготовки посібника зумовлена суттєвим зменшенням кількості аудиторних годин, передбачених програмою навчальної дисципліни, що впливає як на обсяг матеріалу, так і на методику викладання.

Матеріали посібника містять такі основні теми вищої математики як елементи лінійної та векторної алгебри, аналітичної геометрії, основи диференціального й інтегрального числення, які вивчаються студентами першого курсу. Достатня кількість розв'язаних типових задач і прикладів дає змогу студентам самостійно опанувати даний курс вищої математики й підготуватися до складання іспиту чи заліку. В роботі наведено також питання та тести для самоконтролю, список рекомендованої літератури.

РОЗДІЛ 1 ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1.1 Системи лінійних рівнянь

1.1.1 Системи лінійних рівнянь

Предметом розгляду лінійної алгебри є насамперед теорія систем лінійних рівнянь, які в загальному вигляді можна подати так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (1.1).$$

Така система називається *системою m лінійних рівнянь з n невідомими*, де x_1, x_2, ..., x_n – невідомі; $a_{ij}\left(i=\overline{1;m};\ j=\overline{1;n}\right)$ – коефіцієнти системи рівнянь; $b_i\left(i=\overline{1;m}\right)$ – вільні члени.

Розв'язком системи рівнянь є множина таких чисел у результаті підстановки яких замість невідомих x_1, x_2, ..., x_n у кожне з рівнянь системи останні перетворюються на правильні числові рівності.

Якщо система рівнянь не має жодного розв'язку, вона називається *несумісною*, а якщо має хоча б один розв'язок — *сумісною*. Сумісна система рівнянь називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, і *невизначеною*, якщо розв'язків більш як один.

1.1.2 Визначники. Властивості визначників

Розглянемо спочатку системи рівнянь, в яких кількість невідомих дорівнює кількості рівнянь, тобто m=n. Нехай, наприклад, n=m=2, тоді маємо систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

Визначником другого порядку називається вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (1.2)$$

Приклад 1

Обчислити визначник $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$

Розв'язання

Визначник другого порядку обчислимо за формулою (1.2)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3-(-1)\cdot 4=10.$$

Відповідь: 10

Якщо n=m=3, то маємо систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases}$$

Визначником третього порядку називається вираз:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \quad (1.3)$$

Для запам'ятовування правила обчислення визначника третього порядку пропонуємо ***правило трикутників*** (Рис. 1.1):

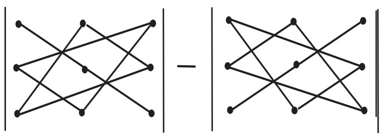

Рисунок 1.1 Схема розв'язку визначника третього порядку правилом трикутника

Позначимо точками елементи визначника, тоді доданки зі знаком «плюс» — це добутки елементів a_{11}, a_{22}, a_{33}, розміщених на *головній діагоналі* визначника, і добутки елементів a_{13}, a_{21}, a_{32} і a_{12}, a_{23}, a_{31}, розміщених у вершинах рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні головній діагоналі. Зі знаком «мінус» беруться доданки, що є добутками елементів a_{13}, a_{22}, a_{31}, розміщених на сторонній діагоналі визначника та у вершинах рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні сторонній діагоналі визначника — a_{11}, a_{23}, a_{32} і a_{12}, a_{21}, a_{33}.

Основні властивості визначників

1. Значення визначника не змінюється, якщо всі його рядки замінити відповідними стовпцями (стовпці при цьому замінюються відповідними рядками).

2. Визначник, що має нульовий рядок (стовпець) дорівнює нулю.

3. Якщо визначник має два однакових рядки (стовпці), то він дорівнює нулю.

4. При перестановці двох рядків (стовпців) визначник змінює знак.

5. Спільний множник елементів деякого рядка (стовпця) можна винести множником за знак визначника.

6. Визначник не змінюється, якщо до елементів одного рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число.

7. Визначник, що має два пропорційні рядки (стовпці), дорівнює нулю.

8. Якщо у визначнику деякий (наприклад, i-й) рядок є сумою двох доданків, то цей визначник можна подати у вигляді суми двох визначників, у яких усі рядки, крім i-го, будуть такі, як у даному визначнику; i-й рядок першого визначника складатиметься з перших доданків, а i-й рядок другого визначника складається з других доданків.

Приклад 2

Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ за правилом трикутника.

Розв'язання

Визначник третього порядку обчислимо за формулою (1.3)

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 3 + 5 \cdot 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot 5 \cdot 3 = -10 \cdot$$

Відповідь: -10

1.1.3 Мінори та алгебраїчні доповнення

Нехай визначник має *n* рядків і *n* стовпців.

Мінором k-го порядку $k\in[1;\ n-1]$ називається визначник, утворений з елементів, розміщених на перетині будь-яких *k* рядків і *k* стовпців визначника. Мінор першого порядку — це будь-який елемент визначника.

Приклад 3

Утворити кілька мінорів другого і один мінор третього порядку такого визначника:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 6 & -7 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

$$M_2^1=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},\ M_2^2=\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 0 & -1 \end{vmatrix},\ M_2^3=\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix},\ \dots,\quad M_3^1=\begin{vmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 2 & -7 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Мінором M_{ij} ***елемента*** a_{ij} ***визначника третього порядку*** Δ *називається визначник другого порядку, який утворюється з* Δ *в результаті викреслювання рядка й стовпця, що містять* a_{ij}.

Розглянемо визначник третього порядку $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. *Для кожного з дев'яти елементів цього визначника існує свій мінор. Наприклад, мінором елемента* a_{12} *є визначник* $M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$. *Його можна дістати з елементів визначника, викресливши у ньому перший рядок і другий стовпчик.*

Алгебраїчним доповненням A_{ij} ***елемента*** a_{ij} ***визначника третього порядку*** *називають його мінор* M_{ij}, *взятий зі знаком* $(-1)^{i+j}$, *тобто*

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}. \tag{1.4}$$

Теорема 1. *Кожний визначник можна подати як суму добутків елементів одного якого-небудь рядка (або стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.*

Наприклад, розкладання визначника $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ *за елементами другого стовпця здійснюємо за формулою* $\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$,

де $A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$; $A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$; $A_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$.

Приклад 4

Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$, розкладаючи його за елементами третього рядка.

Розв'язання

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 9 \cdot$$

Відповідь: 9

1.1.4 Правило Крамера

Розглянемо систему (1.1) лінійних рівнянь з *n* невідомими:

Теорема 2. Якщо визначник Δ, складений із коефіцієнтів при невідомих системи, відмінний від нуля, то така система рівнянь (1.1) має єдиний розв'язок, який обчислюється за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \tag{1.5}$$

Формули (1.5) називають **формулами Крамера.**

де Δ – визначник системи, який утворюється з коефіцієнтів при невідомих у лівій частині системи;

Δ_j – визначник, який утворюється заміною j-го стовпця в головному визначнику на стовпець вільних членів.

Розглянемо систему трьох лінійних рівнянь із трьома невідомими x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Щоб розв'язати систему запишемо визначники третього порядку Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3.

Визначник Δ, який називається *визначником системи*, записується так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Визначники Δ_1, Δ_2, і Δ_3, утворюються з даного визначника відповідно заміною першого, другого і третього стовпців стовпчиком вільних членів:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

При розв'язуванні даної системи рівнянь можуть бути такі випадки:

1. $\Delta \neq 0$, тоді система має єдиний розв'язок***:***

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

2. Якщо $\Delta = 0$, а принаймні один із визначників Δ_1, Δ_2, Δ_3 не дорівнює нулю, то система розв'язків не має.

3. Якщо $\Delta = 0$, $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$, то система має безліч розв'язків.

Приклад 5

Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера:

$$\begin{cases} x - y + z = 0; \\ 2x + y + z = 5; \\ 2y - z = 3. \end{cases}$$

Розв'язання

Знаходимо визначники Δ, Δ_x, Δ_y, Δ_z:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

Остаточно маємо:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-2}{-1} = 2, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Відповідь: (1;2;1)

Завдання для самостійного розв'язування

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 35 & 59 & 71 & 52 \\ 42 & 70 & 77 & 54 \\ 43 & 68 & 72 & 52 \\ 29 & 49 & 65 & 50 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$.

Відповідь: а) 90; б) 27; в) 52; г) 10; д) 100.

2. Розв'язати за правилом Крамера системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11 \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40 \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -6 \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 = -8 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = -8 \end{cases}$; г) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7 \end{cases}$.

Відповідь: а) $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$;

б) $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 2$, $x_4 = 0$;

в) $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$;

г) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = \frac{1}{3}$, $x_4 = -\frac{3}{2}$.

3. Побудувати всі можливі мінори другого порядку визначника:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 8 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 3 & 1 \\ 7 & 7 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

Скільки таких мінорів?

1.2 Елементи теорії матриць

1.2.1 Матриці. Дії над матрицями

Матрицею називається прямокутна таблиця чисел, яка має m рядків і n стовпців. Якщо повернутися до системи рівнянь (1.1), то коефіцієнти при невідомих у лівій частині якраз і утворюють таку прямокутну таблицю:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1.6)$$

Числа a_{ij} називаються *елементами матриці*, а запис $m \times n$ означає її *розмір*. Зауважимо, що на першому місці в цьому запису зазначено кількість рядків матриці, а на другому — кількість стовпців. Наприклад, запис розміру матриці 5×3 означає, що в ній п'ять рядків і три стовпці. Якщо кількість рядків матриці дорівнює кількості її стовпців, то матриця називається *квадратною*.

Дві матриці *рівні між собою*, якщо вони мають однаковий розмір і всі їх відповідні елементи рівні між собою.

Елементи з двома однаковими індексами a_{11}, a_{22}, a_{33}, ... a_{nn} утворюють *головну діагональ* матриці. Якщо $a_{ij} = a_{ji}$, то матриця називається *симетричною*.

Квадратна матриця, в якої елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, а всі інші - нулю, називається *одиничною матрицею*:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Коли всі елементи матриці, що містяться по один бік від головної діагоналі, дорівнюють нулю, то матриця *називається трикутною.*

Кожній квадратній матриці (1.6) можна поставити у відповідність визначник, який складається з тих самих елементів:

$$\Delta(A) = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1.7)$$

Якщо такий визначник відмінний від нуля, то матриця називається *неособливою*, або *невиродженою*. Якщо визначник дорівнює нулю, то матриця *особлива*, або *вироджена*.

Дії з матрицями

1. *Сумою матриць* одного й того самого порядку $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ називається матриця $C = A + B$; $C = (c_{ij})$, будь-який елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць *A і B*: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Приклад 6

Знайти матрицю C=A+B, де A=$\begin{pmatrix} 5 & -8 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & -7 & 10 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Розв'язання

Обидві матриці A=$\begin{pmatrix} 5 & -8 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & -7 & 10 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ мають розмір 3×4, тому за означенням можна утворити їх суму — матрицю:

$$C = \begin{pmatrix} 5+0 & -8+1 & 0+2 & 2-1 \\ 4+5 & 3+6 & 1-7 & 2+10 \\ -1+1 & 2-3 & -7+4 & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 2 & 1 \\ 9 & 9 & -6 & 12 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. *Добутком матриці* $A = (a_{ij})$ *на деяке число* α називається така матриця *C*, кожен елемент якої c_{ij} утворюється множенням відповідних елементів матриці *A* на α, $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$

Приклад 7

Знайти матрицю C=α·A, де $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $\alpha=-2$;

Розв'язання

$C=\alpha A=\begin{pmatrix}-4 & -2 & 2\\ -6 & -2 & -4\end{pmatrix}$.

Очевидно, що для суми матриць і добутку матриць на число виконуються рівності:

1) $A+B=B+A$;

2) $\alpha\cdot A=A\cdot\alpha$;

3) $\alpha\cdot(A+B)=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B$;

4) $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$,

5) $\alpha\cdot(\beta\cdot A)=(\alpha\cdot\beta)\cdot A$.

3. Добутком матриці $A=(a_{ij})$ розміру $m\times p$ на матрицю $B=(b_{ij})$ розміру $p\times n$ називається така матриця $C=AB$ розміру $m\times n$, $C=(c_{ij})$, кожний елемент можна знайти за формулою:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}\ . \qquad (1.8)$$

Кожний елемент матриці *C* утворюється як сума добутків відповідних елементів *i*-го рядка матриці *A* на відповідні елементи *j*-го стовпця матриці *B*, тобто за схемою: (Рис. 1.2)

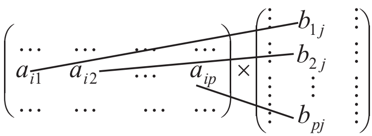

Рисунок 1.2 Схема обчислення добутку двох матриць

Зазначимо, що в результаті множення дістанемо матрицю розміру $m\times n$.

З означення випливає, що добуток матриць *некомутативний*: $AB\neq BA$.

Повернемось до системи рівнянь (1.1) і утворимо матриці: *A* — коефіцієнтів при невідомих, *X* — невідомих, *B* — вільних членів:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тоді, за означенням добутку матриць систему рівнянь (1.1) можна записати в матричному вигляді:

$$AX = B, \tag{1.9}$$

який значно скорочує запис системи рівнянь.

Приклад 8

Знайти добуток двох матриць C та D,

де $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

$$C\cdot D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot 3+0\cdot 1+(-3)\cdot(-1) & 1\cdot(-4)+0\cdot(-2)+(-3)\cdot 2 & 1\cdot 7+0\cdot 0+(-3)\cdot(-3) \\ (-1)\cdot 3+4\cdot 1+2\cdot(-1) & (-1)\cdot(-4)+4\cdot(-2)+2\cdot 2 & (-1)\cdot 7+4\cdot 0+2\cdot(-3) \\ 0\cdot 3+3\cdot 1+5\cdot(-1) & 0\cdot(-4)+3\cdot(-2)+5\cdot 2 & 0\cdot 7+3\cdot 0+5\cdot(-3) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 6 & -10 & 16 \\ -1 & 0 & -13 \\ -2 & 4 & -15 \end{pmatrix}.$$

Задача 1

Цех випускає деталі двох сортів, використовуючи при цьому матеріали трьох типів. Витрати матеріалу на виробництво деталей задаються матрицею

$$S=(s_{ij})=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

де s_{ij} – кількість одиниць матеріалу $i-го$ типу, що використовується на виготовлення однієї деталі $j-го$ сорту. План щоденного випуску деталей передбачає 120 деталей першого сорту і 90 деталей другого сорту. Вартість одиниці кожного типу матеріалу відповідно дорівнює 8, 5, 10 грн. Визначити загальні витрати матеріалу V, необхідного для щоденного випуску продукції, а також загальну вартість C цього матеріалу.

Розв'язання

Запишемо план випуску деталей у вигляді $P = \begin{pmatrix} 120 \\ 90 \end{pmatrix}$. Тоді загальні витрати матеріалів планового випуску деталей можна знайти як добуток матриць S і P, тобто

$$V = S \cdot P = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 120 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 120 + 4 \cdot 90 \\ 3 \cdot 120 + 1 \cdot 90 \\ 2 \cdot 120 + 3 \cdot 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 960 \\ 450 \\ 510 \end{pmatrix}.$$

Отже, для щоденного випуску деталей використовується 960, 450, 510 одиниць матеріалів першого, другого, третього типів відповідно.

Задамо вартість одиниці кожного типу матеріалу матрицею $Q = (8,\ \ 5,\ \ 10)$. Тоді загальна вартість матеріалу становить:

$$C = Q \cdot V = (8,\ \ 5,\ \ 10) \cdot \begin{pmatrix} 960 \\ 450 \\ 510 \end{pmatrix} = (8 \cdot 960 + 5 \cdot 450 + 10 \cdot 510) = 15030 \quad \text{(грн.)}$$

Відповідь: 15030 грн.

1.2.2. Обернена матриця

Матриця A^{-1} називається ***оберненою матрицею до квадратної матриці*** A, якщо виконується співвідношення: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Квадратна матриця $\mathbf{A}$ називається *виродженою*, якщо $\det A = 0$ *і* *невиродженою*, якщо $\det A \neq 0$.

Теорема 3. *Для існування оберненої матриці* $\mathbf{A}^{-1}$ *необхідно і достатньо, щоб матриця* $\mathbf{A}$ *була невиродженою*.

Обернена матриця знаходиться за формулою

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (1.10)$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} визначника матриці $\mathbf{A}$.

Приклад 9

Знайти матрицю $\mathbf{A}^{-1}$, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

Обчислимо визначник матриці $\mathbf{A}$:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -2.$$

Матриця $\mathbf{A}$ невироджена, тому обернена матриця знаходиться за формулою (1.10). Знаходимо алгебраїчні доповнення всіх елементів даної матриці:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -11;\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -13;\ A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -19;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -8;\ A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -10;\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -14;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 7;\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 9;\ A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 13.$$

Запишемо обернену матрицю

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -11 & -8 & 7 \\ -13 & -10 & 9 \\ -19 & -14 & 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 11 & 8 & -7 \\ 13 & 10 & -9 \\ 19 & 14 & -13 \end{pmatrix}.$$

Задача 2

Три заводи виготовляють два види продукції. Матрицею A подано об'єми виготовленої продукції на кожному заводі за перший місяць, матрицею В–за другий місяць:

$$A=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\\4&5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&4\\0&2\\3&4\end{pmatrix}.$$

Знайти: а) об'єм продукції за два місяці; б) приріст об'ємів виробництва за другий місяць у порівнянні з першим за видами продукціїі; в) вартісне вираження виробленої продукції за два місяці в умовних одиницях, якщо $\mu=27$ – курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

Розв'язання

а) Об'єм продукції за два місяці визначається сумою матриць A та B:

$$C=A+B=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\\4&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&4\\0&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&7\\1&4\\7&9\end{pmatrix}.$$

б) Приріст об'ємів виробництва за другий місяць у порівнянні з першим виражається різницею матриць:

$$D=B-A=\begin{pmatrix}3&4\\0&2\\3&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&3\\1&2\\4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\\-1&-1\end{pmatrix}.$$

Додатні елементи показують, що на заводі об'єм продукції збільшився, від'ємні – зменшився, нульові – не змінився.

в) Для знаходження вартісного вираження виробленої продукції за два місяці потрібно знайти добуток $\mu\cdot C.$

$$P=\mu C=\begin{pmatrix}135&189\\27&108\\189&243\end{pmatrix}$$

Завдання для самостійного розв'язування

1. Обчислити добутки матриць:

а) $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}5&8&-4\\6&9&-5\\4&7&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&2&5\\4&-1&3\\9&6&5\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 70 & 34 & -107 \\ 52 & 26 & -68 \\ 101 & 50 & -140 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -18 & 10 \\ 31 & -17 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Знайти матрицю $A = (2B - 3C)D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -5 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Піднести матрицю до степеня:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$.

Відповідь: а) $\begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, якщо n — парне; $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, якщо n — непарне.

4. Знайти значення

$f(A) = 3A^2 - 2A + 5$ і $f(B) = B^3 - 7B^2 + 13B - 5$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $f(A) = \begin{pmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 4 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{pmatrix}$; $f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Знайти матриці, обернені до матриць:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Результат перевірити множенням.

6. Розв'язати матричні рівняння:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$;

г) $X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$.

Відповідь: а) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

7. Знайти визначники матриць:

а) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$.

Відповідь: а) 2; б) 3; в) 2.

1.3 Розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

1.3.1 Розвязування систем лінійних рівнянь матричним методом

Повернемось тепер до виразу (1.9) – запису системи рівнянь у матричному вигляді. Припустимо, що система складається з n лінійних рівнянь з n невідомими, матриця A– квадратна і $\Delta(A) \neq 0$– матриця невироджена. Тоді для матриці A знайдемо обернену A^{-1}. Помножимо тепер рівність $AX = B$ зліва на матрицю A^{-1}, дістанемо:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B,$$

або остаточно $X = A^{-1}B$.

Останній вираз – це розв’язок системи лінійних рівнянь.

Приклад 10

Розв’язати систему рівнянь матричним методом

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_2 - x_2 + 4x_3 = -4 \end{cases}.$$

Розв’язання

Запишемо систему в матричному вигляді $AX = B$,

де $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Знайдемо обернену матрицю

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 10 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 10 & -5 \end{vmatrix} = 15 - 10 = 5 .$$

$\det A \neq 0$ – отже обернена матриця існує.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Остаточно маємо:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \\ 2 - \frac{12}{5} + \frac{12}{5} \\ 0 - \frac{1}{5} - \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$ – розв'язок системи.

Відповідь: (1;2;-1)

Задача 3

В таблиці наведені дані, що характеризують кількість деталей, необхідних для виготовлення деяких виробів.

Найменування деталей	**Тип виробу**		
	1	**2**	**3**
1. Колесо	5	2	8
2. Вісь	4	3	1
3. Корпус	1	2	1

Записати в матричній формі залежність між кількістю деталей та кількістю виробів.

Розв'язання

Загальна кількість деталей може бути записана у вигляді наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases} y_1 = 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 \\ y_2 = 4x_1 + 3x_2 + x_3 \\ y_3 = x_2 + 2x_2 + x_3 \end{cases},$$

де y_i – загальна кількість деталей, x_j – кількість виробів

($i = \overline{1,2,3}; j = \overline{1,2,3}$).

У матричній формі ці рівняння можна записати так:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

або $y = A\,x$, де $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

1.3.2 Розвязування систем лінійних рівнянь методом Гауса

Розглянемо метод Гауса на прикладі розв'язання системи трьох рівнянь з трьома невідомими, яка має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases},$$

де a_{ij} – задані коефіцієнти системи. Числа b_i називають також вільними членами системи.

Суть методу полягає в тому, щоб застосуванням так званих елементарних перетворень над рядками розширеної матриці системи $\overline{A} = \overline{A|B}$, звести дану матрицю до трапецієвидного вигляду, коли всі числа, що розташовані нижче головної діагоналі – нулі. З третього рядка знаходиться невідома x_3, потім з другого рядка при знайденій x_3 знаходиться невідома x_2, і, нарешті, при знайдених x_3 та x_2 знаходиться невідома x_1. Цим реалізується прямий хід методу Гауса.

До елементарних перетворень рядків (стовпців) розширеної матриці системи належать такі перетворення:

1) заміна місцями двох рядків або двох стовпців матриці;

2) множення рядка або стовпця матриці на довільне відмінне від нуля число;

3) додавання елементів одного рядка або стовпця до відповідних елементів іншого рядка або стовпця, попередньо помноженого на деяке число, відмінне від нуля.

Приклад 11

Розв'язати систему рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_2 - x_2 + 4x_3 = -4 \end{cases}$$

Розв'язання

Реалізуємо прямий хід метода Гауса

$$\overline{A} = A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

З третього рядка останньої матриці маємо $x_3 = -1$. З другого рядка $x_2 + 3x_3 = -1$, звідки $x_2 = 2$. Нарешті, з першого рядка маємо: $x_1 + x_3 = 0$, звідки $x_1 = 1$.

Отже, розв'язки системи $x_1 = 1,\ \ x_2 = 2,\ \ x_3 = -1.$

Відповідь: (1;2;-1)

Завдання для самостійного розв'язування

1. Розв'язати системи рівнянь методом оберненої матриці:

а) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 7 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -7 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -8 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_4 = -13 \end{cases}$ г) $\begin{cases} -4x_1 + x_2 - 5x_3 = -8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ -2x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 6 \end{cases}$

Відповідь: а) $x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = -2, x_4 = 2$;

б) $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -3, x_4 = 1$;

в) $x_1 = -3, x_2 = 2, x_3 = 1$;

г) $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$.

2. Розв'язати системи рівнянь методом Гауса:

а) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8 \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3 \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7 \end{cases}$

Відповідь: а) $x_3 = 6 - 15x_1 + 10x_2; x_4 = -7 + 18x_1 - 2x_2$;

б) система несумісна;

в) $x_3 = 2 - \frac{27}{13}x_1 + \frac{9}{13}x_2,\ x_4 = -1 + \frac{3}{13}x_1 - \frac{1}{13}x_2$;

г) $x_1 = -\frac{6}{7} + \frac{8}{7}x_4$, $x_2 = \frac{1}{7} - \frac{13}{4}x_4$, $x_3 = \frac{15}{7} - \frac{6}{7}x_4$.

Тести до розділу «Лінійна алгебра»

1. При множенні визначника начисло:

   a) всі його елементи множаться на це число;

   b) всі елементи довільного рядка або стовпця множаться на це число;

   c) його діагональні елементи множаться на це число;

   d) один з його елементів множиться на це число.

2. Які знаведених нижче тверджень є правильними?

   a) визначник дорівнює сумі добутків елементів першого рядка на їх алгебраїчні доповнення;

   b) спільний множник елементів головної діагоналі виноситься за знак визначника;

   c) визначник, який містить два пропорціональні рядки, дорівнює нулю;

   d) визначник матриці A дорівнює визначнику матриці A^T .

3. Матриця A має розмірність 2×3. Тоді матриця A^T має розмірність:

   a) 6×3.

   b) 3×3.

   c) 3×2.

   d) 2×2.

4. Матриці A та B мають однакову розмірність 4×3. Над ними можна виконати дію:

   a) відняти;

   b) перемножити B на A ;

   c) перемножити A на B ;

   d) поділити A на B .

5. Визначник матриці $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ дорівнює:

a) 0;
b) –1;
c) 1;
d) 0.

6. Алгебраїчне доповнення до елемента a_{12} визначника матриці $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ дорівнює:

a) 4;
b) – 4;
c) –3;
d) –14.

7. Визначник матриці $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ дорівнює:

a) 0;
b) 3;
c) -3;
d) 5.

8. Алгебраїчне доповнення елемента a_{23} визначника матриці $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ дорівнює.

a) 10;
b) -14;
c) 14;
d) -10.

9. Вказати розв’язок системи лінійних рівнянь $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - 2y + 3z = -4 \\ 3x - y - z = 3 \end{cases}$

a) (1;1;–1);
b) (2;–1;0);
c) (0;0;–1);
d) (0;0; 1).

10.За теоремою про розкладання обчислюється:

a) обернена матриця;

b) визначник;

c) алгебраїчне доповнення;

d) елементи матриці.

11. Формули Крамера використовуються для:

a) знаходження оберненої матриці;

b) обчислення визначника;

c) знаходження скалярного добутку векторів;

d) розв'язування системи рівнянь.

12. Обернену матрицю знаходять при розв'язуванні системи лінійних рівнянь:

a) за формулами Крамера;

b) матричним методом;

c) методом Гаусса.

13. Які з наведених нижче тверджень є правильними?

a) якщо всі елементи головної діагоналі дорівнюють 1, то визначник дорівнює 1;

b) визначник не зміниться, якщо від усіх елементів деякого стовпця відняти одне і те ж число, відмінне від нуля;

c) сума добутків елементів деякого рядка визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка дорівнює нулю;

d) визначник, який містить пропорціональні стовпці, дорівнює нулю.

14. Визначник добутку матриць дорівнює:

a) сумі їх визначників;

b) добутку їх визначників;

c) більшому з їх визначників;

d) меншому з їх визначників.

15. Нульовою називається така матриця, у якої:

a) всі елементи першого рядка є нулями;

b) визначник дорівнює нулю;

c) всі елементи довільного стовпця є нулями;

d) всі елементи є нулями.

16. Одиничною матрицею називається:

a) матриця, всі елементи першого рядка якої є одиницями;

b) квадратна матриця, визначник якої дорівнює 1;

c) квадратна матриця, на головній діагоналі якої стоять одиниці, а всі інші елементи – нулі;

d) матриця, всі елементи якої є одиницями.

17. Які з наступних тверджень є правильним? Величина визначника квадратної матриці не зміниться, якщо:

a) матрицю транспонувати;

b) поміняти місцями два рядки;

c) до елементів деякого стовпця додати відповідні елементи іншого стовпця, помножені на одне і те ж число;

d) домножити будь-який рядок на –1.

18. Система лінійних рівнянь називається однорідною, якщо:

a) вона не має жодного розв’язку;

b) всі вільні члени дорівнюють нулю;

c) вона має більше, ніж один розв’язок;

d) вона має єдиний розв’язок;

e) інша відповідь.

19. Для квадратної матриці A обернена існує тоді і тільки тоді, коли:

a) всі її елементи ненульові;

b) всі елементи на головній діагоналі ненульові;

c) $\det A \neq 0$;

d) всі елементи першого рядка ненульові;

e) інша відповідь.

20. Для квадратної матриці A оберненою називається така матриця A^{-1} що:

a) $A^{-1} \cdot A = O$;

b) $A^{-1} \cdot A = E$;

c) $A \cdot A^{-1} = E$;

d) $A^{-1} = -A$;

e) інша відповідь.

21. Матриці A та B мають однакову розмірність 4×5. Над ними можна виконати дію:

a) відняти;

b) перемножити B на A;

c) перемножити A на B;

d) поділити A на B.

22. Які з наведених нижче тверджень є правильними?

a) якщо всі елементи головної діагоналі дорівнюють 0, то визначник дорівнює 0;

b) визначник не зміниться, якщо від усіх елементів деякого стовпця відняти одне і те ж число, відмінне від нуля;

c) сума добутків елементів деякого рядка визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка дорівнює нулю;

d) визначник, який містить пропорціональні стовпці, дорівнює нулю.

РОЗДІЛ 2 ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

2.1 Поняття вектора. Дії над векторами.

Вектором називається спрямований відрізок прямої. Позначати вектори будемо $\vec{a}, \vec{b}$, ... Якщо, точка A – початок вектора, а B – його кінець, то маємо вектор $\vec{AB}$.

Вектор, в якого початок і кінець збігаються, називається *нульовим вектором*.

Вектор вважається заданим, коли відома його довжина $|\vec{AB}|$ і напрям.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *рівними,* коли вони:

1) колінеарні;

2) однаково напрямлені;

3) їхні довжини рівні.

Вектор називається нульовим, або нуль-вектором, якщо всі його координати дорівнюють нулю. Нульовий вектор позначається $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ Вектор $-\vec{a} = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_m)$ називається *протилежним* вектору $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$.

Проекцією вектора $\vec{AB}$ *на вісь* l називається довжина $A'B'$ спрямованого відрізка $\vec{A'B'}$ на осі l. Зазначимо, що $A'B' = |\vec{A'B'}|$, якщо напрям $\vec{A'B'}$ збігається з напрямом l і $A'B' = -|\vec{A'B'}|$, якщо напрям $\vec{A'B'}$ протилежний напряму l.

Позначається проекція вектора $\vec{AB}$ на вісь l – $пр_l \vec{AB}$. Формула знаходження проекції вектора на вісь:

$$пр_l \vec{AB} = \left|\vec{AB}\right| \cos\varphi, \tag{2.1}$$

де φ – кут між вектором і віссю.

В прямокутній декартовій системі координат проекції вектора $\overrightarrow{AB}$ на кожну з осей мають вигляд:

$$Ox:\ a_x = x_2 - x_1,\quad Oy:\ a_y = y_2 - y_1,\quad Oz:\ a_z = z_2 - z_1. \qquad (2.2)$$

Довжина вектора обчислюється за формулою:

$$|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (2.3)$$

Якщо позначити α, β, γ — кути між вектором $\vec{a}$ і відповідними осями системи координат, то їх косинуси можна знайти за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}. \qquad (2.4)$$

Їх називають *напрямними косинусами* вектора $\vec{a}$. Після піднесення кожної з формул до квадрата, дістанемо: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Дії над векторами

1. *Сумою векторів* $\vec{a}$ та $\vec{b}$, позначається $\vec{a}+\vec{b}$, називається такий вектор $\vec{c}$, якому відповідає діагональ паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (Рис. 2.1)

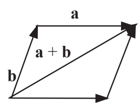

Рисунок 2.1 Сума векторів

В декартових координатах сума векторів обчислюється за формулою:

$$\vec{a}+\vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z). \qquad (2.5)$$

2. Різницею векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, позначається $\vec{a}-\vec{b}$, називається такий вектор $\vec{c}$, який іде з кінця вектора $\vec{a}$ в кінець вектора $\vec{b}$, за умови, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають спільний початок.

Щоб побудувати різницю векторів $\vec{a}-\vec{b}$ будуємо трикутник, зі сторонами, що утворюють ці вектори. Тоді вектор, початок якого збігається з кінцем вектора $\vec{a}$, а кінець – із кінцем вектора $\vec{b}$, є різницею векторів $\vec{a}-\vec{b}$.(Рис. 2.2)

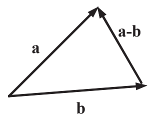

Рисунок 2.2 Різниця векторів

В декартових координатах різниця векторів обчислюється за формулою:

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z). \qquad (2.6)$$

3. Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ називається вектор $\lambda\vec{a}$, який паралельний вектору $\vec{a}$ і має довжину $|\lambda\vec{a}|$; напрям його при $\lambda > 0$ той самий, що й вектора $\vec{a}$, при $\lambda > 0$ — протилежний напряму $\vec{a}$. (Рис. 2.3)

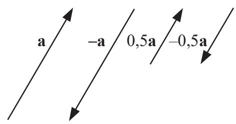

Рисунок 2.3 Множення вектора на число

В декартових координатах добуток вектора $\vec{a}$ на число λ обчислюється за формулою:

$$\lambda\vec{a} = \left(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\right). \qquad (2.7)$$

Для лінійних операцій з векторами використовуються формули:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

2. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$.

3. $\alpha\left(\beta\vec{a}\right) = \left(\alpha\beta\right)\vec{a}$.

4.. $\left(\alpha + \beta\right)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$

5. $\alpha\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.

Нехай вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ такі, що за напрямом збігаються відповідно з осями *Ox*, *Oy*, *Oz* і $\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1$. Такі вектори будемо називати *одиничними* векторами осей системи координат. Тоді

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}. \tag{2.8}$$

Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називаються колінеарними (паралельними), якщо їх відповідні координати пропорційні:

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}. \tag{2.9}$$

Приклад 1

Знайти вектори:

1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix};$

2) $3\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, -2\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, 3\vec{a} - 2\vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Завдання для самостійного розв'язування

1. Дано: $\vec{a} = (3; -5; 4); \vec{b} = (-1; 0; 2).$

Знайти: $\overrightarrow{-2\vec{a}}; -3\vec{b} + \vec{a}; |\vec{a}|; |\vec{b}|.$

2. Яку властивість повинні мати вектори, щоб виконувалися співвідношення:

1) $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \left|\vec{a} - \vec{b}\right|;$

2) $\vec{a} + \vec{b} = \lambda\left(\vec{a} - \vec{b}\right);$

3) $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|};$

4) $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = |\vec{a}| + \left|\vec{b}\right|;$

5) $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = |\vec{a}| - \left|\vec{b}\right|;$

6) $\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = [\vec{a}[+ \left|\vec{b}\right|?$

Відповідь: 1) $\vec{a} \perp \vec{b}$; 2) $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — колінеарні; 3) $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають однаковий напрям; 4) $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — колінеарні й мають однаковий напрям; 5), 6), $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — колінеарні, але протилежно спрямовані.

3. Обчисліть проекцію вектора $\vec{a} = 3\vec{i} - 12\vec{j} + 4\vec{k}$ на вектор $\vec{b} = \left(\vec{i} - 2\vec{k}\right) \times \left(\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}\right)$.

Відповідь: $\frac{6}{7}$.

4. Дано вершини трикутника A (3, 2); B (–1, –1); C (11, –6). Знайти довжини його сторін.

2.2 Лінійна залежність векторів

Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ називаються *лінійно незалежними,* якщо рівність $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n = 0$ виконується лише при $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$.

Якщо дана рівність виконується тоді, коли всі коефіцієнти $x_1, x_2, \ldots, x_n$ не є рівними нулю, то вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ називаються *лінійно залежними.*

На прямій, будь-який ненульовий вектор є лінійно незалежним, а будь-які два вектори вже лінійно залежні.

На площині довільні два вектори лінійно незалежні, якщо вони неколінеарні. Будь-які три вектори лінійно залежні, оскільки кожний третій вектор може бути виражений через два інші.

У тривимірному просторі три вектори будуть лінійно залежними, якщо вони паралельні одній площині, тобто компланарні. Якщо три вектори не компланарні, то вони лінійно незалежні.

Система m лінійно незалежних векторів в m-вимірному просторі R^m називається ***базисом.***

Вектор $\vec{a}_0$ називається ***лінійною комбінацією*** векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, якщо існують сталі числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такі, що справджується рівність $\vec{a}_0 = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n$.

Теорема 1. Якщо система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ утворює базис простору V, то кожний вектор $\vec{a}$ цього простору подається єдиним чином у вигляді лінійної комбінації векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$:

$$\vec{a} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n \quad .(2.10)$$

Приклад 2

Показати, що вектори $\vec{a}=\{3;\,4;\,-3\}$, $\vec{b}=\{-5;5;\,0\}$, $\vec{c}=\{2;\,1;\,-4\}$ утворюють базис у тривимірному просторі. Знайти компоненти вектора $\vec{d}=\{8;\,-16;\,17\}$ у цьому базисі.

Розв'язання

За означенням три вектори тривимірного простору утворюють базис, якщо вони лінійно незалежні, тобто, якщо з рівні нулю їх лінійної комбінації

$\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}+\lambda_3\vec{c}=\vec{0}$ випливає $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

Запишемо векторну рівність у координатній формі:

$$\begin{cases} 3\lambda_1-5\lambda_2+2\lambda_3=0; \\ 4\lambda_1+5\lambda_2+\lambda_3=0; \\ -3\lambda_1 \quad -4\lambda_3=0. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему за формулами Крамера:

$$\lambda_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\lambda_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\lambda_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Обчислюємо визначник системи:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ -3 & 0 & -4 \end{vmatrix}=60+15+30-80=25\neq 0\,.$$

Легко побачити, що $\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0$, тому $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

З цього випливає, що вектори $\vec{a},\,\vec{b},\,\vec{c}$ лінійно незалежні і тому утворюють базис. Будь-який четвертий вектор $\vec{d}$ тривимірного простору є їх лінійною комбінацією:

$$\vec{d}=\alpha_1\vec{a}+\alpha_2\vec{b}+\alpha_3\vec{c}$$

$$\bar{d}=\alpha_1\left(3\bar{i}+4\bar{j}-3\bar{k}\right)+\alpha_2\left(-5\bar{i}+5\bar{j}+0\bar{k}\right)+\alpha_3\left(2\bar{i}+\bar{j}-4\bar{k}\right)=\left(3\alpha_1-5\alpha_2+2\alpha_3\right)\bar{i}+\left(4\alpha_1+5\alpha_2+\alpha_3\right)\bar{j}+$$
$$\left(-3\alpha_1+0a_2-4\alpha_3\right)\bar{k}=8\bar{i}-16\bar{j}+17\bar{k}$$

де α_1, α_2, α_3 – координати вектора $\vec{d}$ у базисі $\vec{a},\,\vec{b},\,\vec{c}$.

Знайдемо їх.

Рівність $\vec{d}=\alpha_1\vec{a}+\alpha_2\vec{b}+\alpha_3\vec{c}$ в координатній формі має вигляд

$$\begin{cases} 3\alpha_1 - 5\alpha_2 + 2\alpha_3 = 8; \\ 4\alpha_1 + 5\alpha_2 + \alpha_3 = -16; \\ -3\alpha_1 \qquad - 4\alpha_3 = 17. \end{cases}$$

Розв’язки цієї системи: $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = -3,\ \alpha_3 = -5.$

Отже, $\vec{d} = \vec{a} - 3\vec{b} - 5\vec{c}$.

Завдання для самостійного розв’язування

1. Знайти лінійно незалежні системи векторів:

а) $\begin{matrix} \vec{a}_1 = (1, & 2, & 3, & 4), \\ \vec{a}_2 = (2, & 3, & 4, & 5), \\ \vec{a}_3 = (3, & 4, & 5, & 6), \\ \vec{a}_4 = (4, & 5, & 6, & 7); \end{matrix}$ б) $\begin{matrix} \vec{a}_1 = (1, & 2, & 3), \\ \vec{a}_2 = (2, & 3, & 4), \\ \vec{a}_3 = (3, & 2, & 3), \\ \vec{a}_4 = (4, & 3, & 4), \\ \vec{a}_5 = (1, & 1, & 1); \end{matrix}$

в) $\begin{matrix} \vec{a}_1 = (5, & 2, & -3, & 1), \\ \vec{a}_2 = (4, & 1, & -2, & 3), \\ \vec{a}_3 = (1, & 1, & -1, & -2), \\ \vec{a}_4 = (3, & 4, & -1, & 2); \end{matrix}$ г) $\begin{matrix} \vec{a}_1 = (2, & 1, & -3, & 1), \\ \vec{a}_2 = (4, & 2, & -6, & 2), \\ \vec{a}_3 = (6, & 3, & -9, & 3), \\ \vec{a}_4 = (1, & 1, & 1, & 1). \end{matrix}$

Відповідь: а) Будь-які вектори;

б) будь-які три вектори, крім $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2, \vec{a}_5$ і $\vec{a}_3,\ \vec{a}_4,\ \vec{a}_5$;

в) $\vec{a}_1, \vec{a}_2,\ \vec{a}_4$, тому що $\vec{a}_3 = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$;

г) 1) $\vec{a}_1,\ \vec{a}_1$; 2) $\vec{a}_2, \vec{a}_4$; 3) $\vec{a}_3, \vec{a}_4$.

2. Знайти всі значення λ, при яких вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

а) $\vec{a}_1 = (3, 4, 2),\ \vec{a}_2 = (6, 8, 7),\ \vec{b} = (9, 12, \lambda).$

б) $\vec{a}_1 = (4, 4, 3),\ \vec{a}_2 = (7, 2, 1),\ \vec{a}_3 = (4, 1, 6),\ \vec{b} = (5, 9, \lambda).$

в) $\vec{a}_1 = (3, 2, 5),\ \vec{a}_2 = (2, 4, 7),\ \vec{a}_3 = (5, 6, \lambda),\ \vec{b} = (1, 3, 5).$

Відповідь: а) λ — будь-яке; б) λ — будь-яке; в) λ ≠ 12.

3. Знайти лінійно незалежну підсистему системи векторів і всі вектори системи, що не входять до підсистеми, виразити через вектори підсистеми.

а) $\begin{matrix} \vec{a}_1 = (5, & 2, & -3, & 1) \\ \vec{a}_2 = (4, & 1, & -2, & 3) \\ \vec{a}_3 = (1, & 1, & -1, & -2) \\ \vec{a}_4 = (3, & 4, & -1, & 2) \end{matrix}$ б) $\begin{matrix} \vec{a}_1 = (2, & -1, & 3, & 5) \\ \vec{a}_2 = (4, & -3, & 1, & 3) \\ \vec{a}_3 = (3, & -2, & 3, & 4) \\ \vec{a}_4 = (4, & -1, & 15, & 17) \\ \vec{a}_5 = (7, & -6, & -7, & 0). \end{matrix}$

Відповідь: а) Наприклад: $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4$; $\vec{a}_3 = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$;

б) наприклад: $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$; $\vec{a}_4 = 2\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2 + 4\vec{a}_3$.

4. Знайти: а) $\vec{x} = (7,\ 14,\ -1,\ 2)$ в базисі $\vec{e}_1 = (1,\ 2,\ -1,\ -2)$, $\vec{e}_2 = (2,\ 3,\ 0,\ -1)$, $\vec{e}_3 = (1,\ 2,\ 1,\ 4)$, $\vec{e}_4 = (1,\ 3,\ -1,\ 0)$;

б) $\vec{x} = (6,\ 2,\ -7)$ у базисі $\vec{e}_1 = (2,\ 1,\ -3)$, $\vec{e}_2 = (3,\ 2,\ -5)$, $\vec{e}_3 = (1,\ -1,\ 1)$.

Відповідь: а) $(0,\ 2,\ 1,\ 2)$; б) $(1,\ 1,\ 1,\ 1)$.

2.3 Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів

2.3.1 Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними. Якщо хоча б один із векторів дорівнює нулю, то кут між векторами не визначений і за означенням скалярний добуток дорівнює нулю.

Отже:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi, \tag{2.11}$$

де φ – кут між векторами. Використовуючи формулу (2.11) проекції вектора, можна також записати:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|\,np_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\,np_{\vec{a}}\vec{b} \qquad (2.\ 12)$$

Властивості скалярного добутку:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
2. $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$.
3. $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$
4. $(\vec{a} \cdot \vec{a}) = |\vec{a}|^2; \sqrt{(\vec{a})^2} = |\vec{a}|$.

5. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0,$ якщо $\vec{a}\perp\vec{b},$ і навпаки: $\vec{a}\perp\vec{b},$ якщо $\vec{a}\cdot\vec{b}=0,\ \vec{a}\neq 0, \vec{b}\neq 0$

Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задано в координатах, тоді, використовуючи властивості скалярного добутку, умови $\vec{i}\perp\vec{j}\perp\vec{k},$ маємо:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(\vec{a}_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=$$
$$=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Отже, $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$ (2.13)

1. Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0. \quad (2.14)$$

2. Кут між двома векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна знайти за формулою:

$$\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \quad (2.15)$$

Приклад 3

Дано три точки *A* (1, 1, 1), *B* (2, 2, 1) і *C* (2, 1, 2). Знайти $\angle BAC$.

Розв'язання

Знайдемо вектори $\vec{AB}$= (1, 1, 0), $\vec{AC}$= (1, 0, 1).

За формулою $\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$ маємо:

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot1+1\cdot0+0\cdot1}{\sqrt{1^2+1^2+0}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{1}{2}$$, отже, $\varphi = 60°$.

Відповідь: 60°

2.3.2 Векторний добуток векторів

Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ який задовольняє таким умовам:

1) *довжина вектора* $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, (2.16)

де φ– кут між двома векторами;

2) *вектор* $\vec{c}$ *перпендикулярний* до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

3) *вектор* $\vec{c}$ *спрямований* так, що коли дивитися з його кінця на площину, в якій лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то поворот вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ відбувається на найменший кут проти годинникової стрілки.

Модуль векторного добутку двох неколінеарних векторів дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах як на сторонах.

Властивості векторного добутку:

1. $\vec{a}\times\vec{b}=0$, якщо $\vec{a}\neq 0$ і $\vec{b}\neq 0$ — колінеарні вектори.

2. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$.

3. $\left(\lambda\vec{a}\times\vec{b}\right)=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$.

4. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

Знайдемо координати вектора $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, якщо $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$. Маємо:

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\cdot\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=$$
$$=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{i}+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)\vec{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\vec{k},$$

або

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \qquad (2.17)$$

Приклад 4

Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=(5, 2, 7)$, $\vec{b}=(1, 2, 4)$ як на сторонах.

Розв'язання

Знайдемо векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & 2 & 7\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 7\\ 2 & 4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}5 & 7\\ 1 & 4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}5 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}\vec{k}=-6\vec{i}-14\vec{j}+8\vec{k}.$$

Знайдемо $|\vec{c}| = \sqrt{6^2 + 14^2 + 8^2} = 2\sqrt{74}$ кв. од.

Відповідь: $2\sqrt{74}$ кв. од.

Задача 1

Сила $\vec{F} = \{2\,;-4\,;5\}$ прикладена до точки $O\,(0\,;2\,;1)$. Визначити момент цієї сили відносно точки $A(-1;\,2;\,3)$.

Розв'язання

Моментом сили $\vec{F}$ відносно точки A є вектор $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{OA} \times \vec{F}$. Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{OA}$ та шуканого вектора $\overrightarrow{M}$: $\overrightarrow{OA} = \{-1\,;0\,;2\}$,

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{OA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + 9\vec{j} + 4\vec{k},$$

тобто $\overrightarrow{M} = \{8;\,9;\,4\}$.

Відповідь: (8;9;4).

2.3.3 Мішаний добуток векторів

Мішаним добутком векторів $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}$ на векторний добуток векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$, тобто $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

Розглянемо геометричний зміст мішаного добутку. Для цього побудуємо на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ паралепіпед, вважаючи, що вони не лежать в одній площині, тобто не компланарні.

Знайдемо об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$. Площа основи його дорівнює модулю векторного добутку векторів

$\left|\vec{b} \times \vec{c}\right|$ $s = |\vec{b} \times \vec{c}| = |\vec{c}||\vec{b}|\sin\varphi$. Висота дорівнює $|\vec{a}|\cos\alpha$.

Отже, остаточно маємо:

$$V = |\vec{a}|\cos\alpha \cdot |\vec{b}||\vec{c}|\sin\varphi = |\vec{a}||\vec{b}\times\vec{c}|\cos\alpha = |\vec{a}(\vec{b}\times c)| \tag{2.18}$$

З останнього випливає, що модуль мішаного добутку чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$. З останньої рівності маємо умову компланарності трьох векторів $\vec{a};\ \vec{b};\ \vec{c}$:

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=0\,. \tag{2.19}$$

Враховуючи формули знаходження скалярного і векторного добутків, маємо:

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\left(\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}\vec{j}+\right.$$

$$\left.+\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}\vec{k}\right)=a_x\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}-a_y\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}+a_z\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix},$$

або

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{2.20}$$

Властивості мішаного добутку:

1. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=\vec{c}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$.
2. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=-\vec{b}\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)$.

Приклад 5

Задано чотири точки *A* (1; 1; 1), *B* (4; 4; 4), *C* (3; 5; 5), *D* (2; 4; 7).

Знайти об'єм піраміди *ABCD*.

Розв'язання

Відомо, що об'єм піраміди *ABCD* дорівнює одній шостій об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$, а об'єм, у свою чергу, дорівнює модулю мішаного добутку. Отже, маємо:

$\overrightarrow{AB}=(3;\ 3;\ 3)$, $\overrightarrow{AC}=(2;\ 4;\ 4)$, $\overrightarrow{AD}=(1;\ 3;\ 6)$;

$$V_{\text{пр}} = \frac{1}{6}\left|\vec{AB}\left(\vec{AC}\cdot\vec{AD}\right)\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3 \text{ (куб. од.)}$$

Відповідь: 3 куб. од.

2.3.4 Найпростіші задачі аналітичної геометрії

Поділ відрізка у заданому відношенні.

Число λ – називається відношенням, в якому точка M ділить відрізок M_1M_2, якщо

$$\lambda = \frac{|M_1M|}{|MM_2|}.$$

Нехай задано λ і координати точок $M_1(x_1,\, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$, потрібно знайти координати точки $M\,(x, y)$.

З теореми про пропорційні відрізки, що відтинають паралельні прямі на сторонах кута, випливають співвідношення:

$$\frac{|x - x_1|}{|x_2 - x|} = \frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \lambda .$$

Оскільки числа $x - x_1$ і $x_2 - x$ одного й того самого знака (при $x_1<x_2$ вони додатні, а при $x_1>x_2$ – від'ємні), то $\left|\frac{x - x_1}{x_2 - x}\right| = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

Отже, $$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda . \qquad (2.21)$$

Звідси:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

Аналогічно до попереднього дістанемо формулу для знаходження координати y

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Наслідок. Якщо точка M $(x,\ y)$ – середина відрізка M_1M_2, то справедлива рівність:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2} \; . \qquad (2.22)$$

Площа трикутника

Нехай задано координати вершин деякого трикутника A (x_1, y_1), $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

Знайдемо площу цього трикутника. Площу трикутника ABC можна знайти як $S_{\Delta ABC} = S_{ADEC} + S_{BCEF} - S_{ABFD}$, де $S_{ADEC}, S_{DCEF}, S_{ABFD}$- площі відповідних трапецій, які визначаються за формулами:

$$S_{ADEC} = |DE|\frac{|AD| + |CE|}{2} = \frac{(x_3 - x_1)(y_3 + y_1)}{2};$$

$$S_{BCEF} = |EF|\frac{|EC| - |BF|}{2} = \frac{(x_2 - x_3)(y_2 - y_3)}{2};$$

$$S_{ABFD} = |DF|\frac{|AD| + |BF|}{2} = \frac{(x_2 - x_1)(y_1 + y_2)}{2}.$$

Підставивши знайдені площі у вираз для площі трикутника, дістанемо:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)\,(y_2 + y_3) + (x_3 - x_1)\,(y_3 + y_1)\,| =$$
$$= \frac{1}{2}|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_3 - y_1)|.$$

Записавши останній вираз у вигляді визначника, дістанемо остаточну формулу:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{matrix}\right\| \qquad (2.23).$$

Приклад 6

Знайти площу S і висоту BD трикутника, вершинами якого є точки $A(1; -2; 8)$; $B(0; 0; 4)$; $C(6; 2; 0)$.

Розв'язання

Знайдемо вектори $\overrightarrow{AB} = (-1; 2; -4)$ і $\overrightarrow{AC} = (5; 4; -8)$. Модуль векторного добутку буде дорівнювати подвійній площі трикутника, побудованого на цих векторах:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 2 & -4\\ 5 & 4 & -8\end{vmatrix}=-28\vec{j}-14\vec{k};$$

звідки $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=7\sqrt{5}$ (кв.од.)

Висота трикутника за відомої довжини основи буде

$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{105};\quad h=\frac{2s}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{2}{3}\sqrt{21}.$

Завдання для самостійного розв'язування

1. Визначити відстань точки A (12;–3; 4) від початку координат і від осей координат.

Відповідь: 13,5; $4\sqrt{10}$; $3\sqrt{17}$.

2. Три вектори $\overrightarrow{AB}=\vec{a};\ \overrightarrow{BC}=\vec{b};\ \overrightarrow{CA}=\vec{c}$ є сторонами трикутника. За допомогою $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ знайти вектори, що збігаються з медіанами трикутника: $\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{BN},\ \overrightarrow{CP}$.

3. У паралелограмі $ABCD$ позначаємо: $\overrightarrow{AC}=\vec{a},\ \overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Виразити через $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вектори $\overrightarrow{MA},\ \overrightarrow{MB},\ \overrightarrow{MC}$ і $\overrightarrow{MD}$, де M — точка перетину діагоналей паралелограма.

4. Обчислити довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=5\vec{p}+2\vec{g};\ \vec{b}=\vec{p}-3\vec{g}$, коли відомо, що $|\vec{p}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{g}|=3$, $\left(\widehat{pg}\right)=-\frac{\pi}{4}$.

Відповідь: 15 і $\sqrt{593}$.

5. Обчислити довжину вектора $\vec{a}=6\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ і кути, які він утворює з осями.

*Відповідь:*7; $\arccos\frac{6}{7};\ \arccos\left(-\frac{2}{7}\right);\ \arccos\frac{3}{7}$.

6. Знайти $3\vec{m}^2-2(\vec{m}\vec{n})+4\vec{n}^2$, якщо $|m|=\frac{1}{3};\ |\hat{n}|=b;\ \left(\widehat{mn}\right)=\frac{\pi}{3}$.

*Відповідь:*143.

7. Знайти $|\vec{a}\,|$, якщо $\vec{a} = 2\vec{m} - 4\vec{n}$; $|\vec{m}| \widehat{=} |\vec{n}| = 1$ $\left(\widehat{mn}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Відповідь: 5.

8. Знайти проекцію вектора $\vec{a} = 10\vec{m} - 2\vec{n}$ на напрям вектора $b = 5\vec{m} - 12\vec{n}$, де $\vec{m}$ і $\vec{n}$ одиничні орти.

Відповідь: 2.

9. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$; $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n}$, якщо $|\vec{m}| = 5$; $|n| = 1$ і $\left(\widehat{mn}\right) = 30^\circ$.

Відповідь: 125 кв. од.

10. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$; $b = \vec{j} + \vec{k}$.

Відповідь: $\sqrt{35}$ кв. од.

11. Обчисліть проекцію вектора $\vec{a} = 3\vec{i} - 12\vec{j} + 4\vec{k}$ на вектор $\vec{b} = \left(\vec{i} - 2\vec{k}\right) \times \left(\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}\right)$.

Відповідь: $\frac{6}{7}$.

12. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$; $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

13. Обчислити висоту паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$; $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{i} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, якщо його основа побудована на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Відповідь: $\frac{49}{\sqrt{232}}$.

14. Дано вершини трикутника $A(3;2)$; $B(-1; -1)$; $C(11;-6)$. Знайти довжини його сторін та точку перетину медіан.

15. Знайти вершини трикутника, знаючи середини його сторін $M(3;-2)$, $N(1;6)$, $P(-4;2)$.

Відповідь: $A(-2;-6)$, $B(8;2)$, $C(-6;10)$.

16. Дано три вершини паралелограма $A(4;2)$, $B(5;7)$, $C(-3;4)$. Знайти четверту вершину D, яка протилежна вершині B.

17. Відрізок між точками $A(3;2)$, $B(15;6)$ поділити на п'ять рівних частин. Знайти координати точок ділення.

18. Обчислити периметр і площу трикутника, якщо $A(-2;1)$, $B(2;-2)$, $C(8;6)$.

19. Дано трикутник $A(4;1)$, $B(7;5)$, $C(-4;7)$. Знайти точку перетину бісектриси кута A з протилежною стороною BC.

Тести до розділу «Векторна алгебра»

1. Знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо дано координати точок $A(2;\ -1;\ 0)$ і $B(0;\ 0;\ 1)$.
   a) $\{-2;\ 1;\ 1\}$;
   b) $\{2;\ -1;\ -1\}$;
   c) $\{2;\ -1;\ 1\}$

2. Для того, щоб три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ були компланарні необхідно, щоб:
   a) їхні координати були компланарні;
   b) вони лежали на одній прямій;
   c) їх скалярний добуток дорівнював нулеві;
   d) їх мішаний добуток дорівнював нулеві.

3. Вектори $\vec{a}\{1;\ 3;\ -1\}$, $\vec{b}\{2;\ 6;\ -2\}$
   a) колінеарні;
   b) компланарні;
   c) перпендикулярні;
   d) інша відповідь.

4. Довжина вектора $\overrightarrow{AB}\{2;\ -3;\ 1\}$ дорівнює:
   a) $\sqrt{6}$;
   b) 0;

c) $\sqrt{14}$;

d) 1.

5. Модуль векторного добутку $\vec{a}\times\vec{b}$ дорівнює:

a) $|\vec{a}|\times|\vec{b}|$;

b) площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$;

c) $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$;

d) $Пр_{\vec{b}}\vec{a}$

6. Довжина (модуль) вектора $\overrightarrow{OM}\ \{x;\ y;\ z\}$ визначається за формулою:

a) $\sqrt{x+y+z}$;

b) $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

c) $x^2+y^2+z^2$;

d) $x+y+z$.

7. Векторний добуток вектора $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ на вектор $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$ обчислюється за формулою:

a) $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$;

b) $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$;

c) $\sqrt{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}$;

d) $\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_1 & y_1 & z_1\end{vmatrix}$.

8. Вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих, називаються:

a) колінеарними;

b) рівними;

c) компланарними;

d) протилежними.

9. Векторним добутком двох векторів називається:

a) добуток їх довжин на косинус кута між ними;

b) добуток їх довжин на синус кута між ними;

c) добуток їх довжин;

d) синус кута між ними;

e) інша відповідь.

10. Для того, щоб вектори $\vec{a}=\{x_1;\, y_1;\, z_1\}$ та $\vec{b}=\{x_2;\, y_2;\, z_2\}$ були перпендикулярні, необхідно, щоб:

a) $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$;

b) $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$;

c) $Пр_{\vec{b}}\vec{a}=0$;

d) $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi=0$.

11. Скалярний добуток $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $\varphi=90^0$ дорівнює:

a) 0;

b) 6;

c) –6;

d) інша відповідь.

12. Нехай $\varphi-$ кут між векторами $\vec{a}=\{x_1;\; y_1;\; z_1;\}$ та $\vec{b}=\{x_2;\; y_2;\; z_2;\}$. Тоді скалярним добутком цих векторів називається число, яке дорівнює:

a) $\sqrt{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}$;

b) $|\vec{a}|\cdot Пр_{\vec{a}}\vec{b}$;

c) $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$;

d) $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

13. Для того, щоб вектори були колінеарні, необхідно, щоб:

a) їх скалярний добуток дорівнював нулеві;

b) їхній мішаний добуток дорівнював нулеві;

c) їх координати були пропорційні;

d) сума добутків їх відповідних координат дорівнювала нулеві.

14. Об’єм трикутної піраміди, яка побудована на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, дорівнює:

a) $\frac{1}{2}\left|\bar{a} \cdot \bar{b}\right|$;

b) $\left|\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle\right|$;

c) $\frac{1}{6}\left|\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle\right|$;

d) $\frac{1}{2}\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|$.

15. Скалярний добуток векторів $\vec{a}\{2;\ -4;\ 1\}$, $\vec{b}\{-1;\ 0;\ 2\}$ дорівнює:

a) 0;

b) –4;

c) $\{-2;\ 0;\ 2\}$

d) $\{1;\ -4;\ 3\}$.

16. Який з векторів має одиничну довжину:

a) $\{1; 1; 1\}$;

b) $\{0; 1; 1\}$;

c) $\left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right\}$;

d) $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.

17. Проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ дорівнює:

a) $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$;

b) $|\vec{b}| \cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$;

c) $|\vec{a}| \sin\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$;

d) $|\vec{a}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$.

18. Відстань між точками $A=(2;\,1)$ і $B=(6;\,4)$ дорівнює:

a) 6;

b) 5;

c) 4;

d) 7.

19. Скалярним добутком двох векторів називається:

a) добуток їх довжин на синус кута між ними;

b) добуток їх довжин;

c) добуток їх довжин на косинус кута між ними;

d) косинус кута між ними;

e) інша відповідь.

20. Мішаним добутком трьох векторів називається:

a) векторний добуток першого вектора на векторний добуток другого і третього;

b) скалярний добуток першого вектора на векторний добуток другого і третього;

c) добуток першого вектора наскалярний добуток другого і третього;

d) добуток їх довжин;

e) інша відповідь.

21. Скалярним добутком двох векторів називається:

a) добуток їх довжин на косинус кута між ними;

b) добуток їх довжин на синус кута між ними;

c) добуток їх довжин;

d) синус кута між ними;

e) інша відповідь.

РОЗДІЛ 3 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

3.1 Пряма на площині

3.1.1 Прямокутна система координат. Відстань між точками

Три взаємно перпендикулярні осі x, y, z, які проходять через деяку точку O, утворюють *прямокутну (декартову) систему координат* у просторі. Точка O називається *початком координат,* прямі x, y, z – *осями координат* (x – вісь абсцис, y – вісь ординат, z — вісь аплікат), а площини xOy, yOz, zOx – *координатними площинами.* За одиницю масштабу для всіх трьох осей беруть довільний відрізок.

Відклавши на осях x, y, z у додатному напрямі відрізки OA, OB, OC, що дорівнюють одиниці масштабу, дістанемо три вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, які називаються *основними векторами,* або *ортами,* і позначаються відповідно i, j, k.

Розміщення будь-якої точки M у просторі можна визначити трьома координатами. Для цього через т.M проводимо площини, які паралельні відповідно площинам yOz, zOx, xOy. У перетині з осями дістанемо точки M_x, M_y, M_z. Числа x, y, z, якими вимірюють відрізки OM_x, OM_y, OM_z у вибраному масштабі, називають **декартовими координатами** точки M, і записують $M(x;y;z)$.

Відстань між точками

Нехай на площині xOy задано дві точки $M_1(x_1;\, y_1)$, $M_2(x_2;\, y_2)$. Знайдемо відстань d між ними.

За теоремою Піфагора маємо:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Звідси знаходимо відстань $d = |M_1 M_2|$.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ . \tag{3.1}$$

Якщо $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$, $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$ – дві точки у просторі, то відстань d між ними визначається так:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\ . \qquad (3.2)$$

3.1.2 Поділ відрізка в заданому відношенні

Нехай точка $M(x; y)$ лежить на відрізку M_1M_2 і ділить його у відношенні $\lambda=\dfrac{M_1M}{MM_{2.}}$. Тоді координати точки M визначаються через координати точок $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$ за формулами:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \qquad (3.3)$$

Координати середини відрізка M_1M_2 (при $\lambda=1$):

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}. \qquad (3.4)$$

3.1.3 Полярна система координат

Найважливішою після прямокутної системи координат є *полярна система координат.* Вона задається точкою *O*, яка називається *полюсом*, і променем Op, що виходить з полюса і називається *полярною віссю*. Задаються також одиниці масштабу: лінійна – для вимірювання довжин відрізків і кутова – для вимірювання кутів.

Розглянемо полярну систему координат і візьмемо на площині довільну точку M. Нехай $\rho=\left|\overline{OM}\right|$ – відстань від точки O до точки M і $\varphi=\angle(Op,\overline{OM})$ – кут, на який потрібно повернути полярну вісь *проти годинникової стрілки*, щоб сумістити її з вектором $\overline{OM}$ (Рис. 3.1).

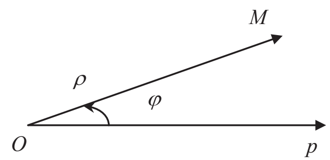

Рисунок 3.1 Полярна система координат

Полярними координатами точки M називаються числа ρ і φ. При цьому число ρ вважається першою координатою і називається *полярним радіусом*, а число φ – другою координатою і називається *полярним кутом*. Точка M з полярними координатами позначається так: $M(\rho;\varphi)$. Очевидно, що полярний радіус може набувати довільних невід’ємних значень: $0 \le \rho < \infty$ полярний кут вважається таким, що змінюється в межах $0 \le \varphi < \infty$.

Виразимо декартові координати точки M через полярні. Вважатимемо, що початок прямокутної системи збігається з полюсом, а вісь Ox – з полярною віссю Op. Якщо точка M має декартові координати x і y та полярні ρ і φ, то

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \tag{3.5}$$

звідки

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = arctg\frac{y}{x}. \tag{3.6}$$

Зауважимо, що друга з формул дає два значення кута φ, оскільки він змінюється від 0 до 2π. З цих двох значень кута потрібно взяти те, для якого задовольняються формули (3.5). Формули (3.5) називають *формулами переходу від полярних координат до декартових*, а формули (3.6) – *формулами переходу від декартових координат до полярних.*

3.1.4 Рівняння прямої на площині

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Нехай задано деяку пряму, знайдемо її рівняння.

Точка M (x; y) лежить на прямій тоді і тільки тоді, коли виконується умова $\dfrac{NM}{BN} = \mathrm{tg}\alpha$.

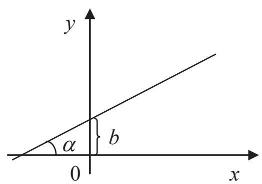

Рисунок 3.2 Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Позначимо $\mathrm{tg}\alpha = k$ і назвемо цю величину *кутовим коефіцієнтом* прямої лінії. Тоді, враховуючи, що $NM = y - b$, $BN = x$, маємо *рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом* (Рис. 3.2) $y = kx + b$.

Рівняння прямої, що проходить через точку із заданим кутовим коефіцієнтом

Нехай деяка точка $M_1(x_1;\ y_1)$ належить заданій прямій, тоді $y_1 = kx_1 + b$. Знайдемо з цього рівняння значення b і, підставивши його в рівняння прямої, дістанемо:

$$y - y_1 = k\,(x - x_1) \tag{3.7}$$

що є рівнянням прямої, яка проходить через задану точку $M_1(x_1;\ y_1)$.

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Нехай ще одна точка $M_2(x_2;\ y_2)$ також належить заданій прямій, тоді за означенням лінії маємо: $y_2 - y_1 = k\,(x_2 - x_1)$.

Знайдемо значення k з останнього співвідношення і, підставивши його в рівняння прямої $y_2 - y_1 = k\,(x_2 - x_1)$, дістанемо:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{3.8}$$

Останнє рівняння називається *рівнянням прямої*, *що проходить через дві задані точки*.

Приклад 1

Записати рівняння прямої, яка проходить через точки $A(-1;\ 2)$ і $B(2;\ 1)$.

Розв'язання

З рівняння $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$, підставивши до нього $x_1 = -1,\ y_1 = 2,\ x_2 = 2,$ $y_2 = 1,$ дістанемо:

$$\frac{y-2}{1-2} = \frac{x+1}{2+1} \Leftrightarrow \frac{y-2}{-1} = \frac{x+1}{3}.$$

Задача 1

Ріст врожайності зернових у фермерському господарстві за останніх 5 років заданий графіком на Рис. 3.3 (на осі ординат відкладено врожайність, а на осі абсцис – роки).

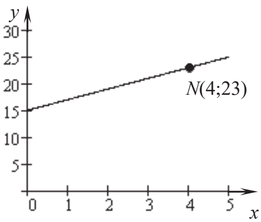

Рисунок 3.3

1. Визначити врожайність зернових у фермерському господарстві 5 років тому.
2. На скільки центнерів щорічно зростає врожайність зернових у господарстві?
3. В якому році урожайність досягне 24 ц з 1 га?
4. Чи належить точка $K\,(2;\,19)$ графіку функції?

Розв'язання

Оскільки дана залежність є лінійною, то для її запису скористаємось рівнянням прямої, що проходить через дві точки (0;15) та (4;23). Маємо $\dfrac{x-0}{4-0}=\dfrac{y-15}{23-15}$ або $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-15}{8}$, звідки $y=2x+15$.

Підставимо у формулу $y=2x+15$ значення $x=-5$, звідси дістанемо $y=5$.

Кутовий коефіцієнт $k=2>0$, що вказує на щорічне зростання врожайності, тобто на 2 ц/га. Розв'язуємо рівняння $24=2x+15$, звідки $x=4{,}5$. Бачимо, що точка *К* належить прямій, оскільки її координати задовольняють рівняння прямої $19=2\cdot 2+15$. Тому можна стверджувати, що врожайність другого року становить 19 ц/га.

Отож, врожайність зернових п'ять років тому становила 5 ц/га. Зростання врожаю відбувалось протягом останніх років на 2 ц/га в рік. Врожайність становитиме 24 ц/га через 4,5 роки. Врожайність на другому році становила 19 ц/га.

Канонічне рівняння прямої

Нехай задано вектор $\vec{S}=\{l,\,m\}$, паралельний деякій прямій, і точку $M_0(x_0;y_0)$ на цій прямій. Складемо рівняння прямої. Нехай $M(x;\,y)$ – довільна точка на прямій. Вектор M_0M паралельний вектору $\vec{S}=\{l,\, m\}$, який називається *напрямним*вектором прямої.

За умовою паралельності дістанемо рівняння

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}, \tag{3.9}$$

яке називається *канонічним рівнянням прямої.*

Вектор $\vec{S}=\{l,\, m\}$ називається *напрямним* вектором прямої.

Параметричне рівняння прямої

Якщо відомі канонічні рівняння прямої $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}$, то з них можна вивести параметричні рівняння прямої.Нехай t – коефіцієнт пропорційності векторів M_0M і $\vec{S}=\{l,\, m\}$, тобто $M_0M = t\cdot\vec{S}$.

З рівняння $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=t$, маємо рівняння

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases} \tag{3.10}$$

яке називається *параметричним рівнянням прямої.*

Коли параметр t змінюється від $-\infty$ до $+\infty$, точка $M(x,\, y)$, де x, y, визначаються рівнянням (3.10), пробігає всю пряму.

Загальне рівняння прямої

Розглянемо на площині прямокутну систему координат xOy і знайдемо рівняння прямої, коли відомий вектор $\vec{N}\{A,B\}$, перпендикулярний до прямої і задано точку $M_0(x_0,\, y_0)$ на цій прямій. Нехай $M(x,\, y)$ – довільна точка шуканої прямої.

За умовою вектор $M_0M=\{x-x_0\,,\, y-y_0\}$ перпендикулярний до вектора $\vec{N}\{A,B\}$. Тому їх скалярний добуток $\vec{N}\cdot\vec{M}_0\vec{M}=0$. Звідси маємо рівняння

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \tag{3.11}$$

або

$$Ax+By+C=0 \tag{3.12}$$

де $C = -Ax_0 - By_0$

Рівняння 3.12 називається *загальним рівнянням прямої.*

Вектор $\vec{N}\{A, B\}$ називається *нормальним* вектором прямої $Ax + By + C = 0$.

Рівняння прямої у відрізках

Щоб побудувати графік прямої, достатньо знати дві її різні точки і через них провести пряму. Якщо пряма перетинає осі координат у точках $M_1(a;\ 0)$, $M_2(0;b)$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, то її рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{3.13}$$

яке називається рівнянням *прямої у відрізках.*

Приклад 2

Знайти кут між прямими $3x - 4y + 1 = 0$ і $5x - 12y + 3 = 0$.

Розв'язання

За формулою кута між прями $\cos\varphi = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^{\ 2} + B_1^{\ 2}}\sqrt{A_2^{\ 2} + B_2^{\ 2}}}$. ми маємо

$$\cos\varphi = \frac{3 \cdot 5 + (-4)\cdot(-12)}{\sqrt{3^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \frac{15 + 48}{5 \cdot 13} = \frac{63}{65} \approx 0.96.$$

$\varphi = \arccos 0{,}96$.

Відповідь: $\varphi = \arccos 0{,}96$

Приклад 3

Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A(-8;\ 1)$ паралельно прямій $2x - y + 7 = 0$.

Розв'язання

Приведемо задане рівняння до вигляду: $y = 2x - 7$, де кутовий коефіцієнт прямої $k = 2$.

Оскільки, шукана і задана прямі паралельні, то за умовою паралельності двох прямих їх кутові коефіцієнти рівні між собою, тому, скориставшись рівнянням $y - y_0 = k(x - x_0)$, дістанемо $y - 1 = 2(x + 8)$ або $y - 2x - 17 = 0$.

Приклад 4

Дано трикутник з вершинами $A(1;-2)$, $B(5;4)$, $C(-2;\ 0)$. Скласти рівняння медіани CM, висоти BN та бісектриси AP.

Розв'язання

Якщо $M(x_1;y_1)$ – середина сторони AB, то $x_1=\dfrac{1+5}{2}=3$, $y_1=\dfrac{-2+4}{2}=1$, звідси $M(3;\ 1)$. Рівняння медіани CM, знайдемо як рівняння прямої, що проходить через дві точки $C(-2;\ 0)$, $M(3;1)$.

За формулою (3.8) маємо

$$\frac{x+2}{3+2}=\frac{y-0}{1-0} \quad \Rightarrow \quad x-5y+2=0.$$

Оскільки висота BN проходить через точку B і має вектор нормалі $\overrightarrow{AC}(-2-1;0+2)=(-3;2)$, то дістанемо рівняння прямої BN

$$-3(x-5)+2(y-4)-7=0 \quad \Rightarrow \quad 3x-2y-7=0.$$

Для визначення рівняння прямої AP скористаємося властивістю бісектриси

$$\frac{BP}{PC}=\frac{AB}{AC}.$$

Маємо

$$AB=\sqrt{(5-1)^2+(4+2)^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}, AC=\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{13}, \text{ тому}$$

$$\frac{BP}{PC}=\frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{13}}=2.$$

Оскільки точка $P(x;y)$ ділить відрізок BC у відношенні $\lambda=2$, то за формулами

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, y=\frac{y_1+\lambda x_2}{1+\lambda},$$

дістанемо

$x=\dfrac{5+2(-2)}{1+2}=\dfrac{1}{3}, y=\dfrac{4+2+0}{1+2}=\dfrac{4}{3}$ і тоді координати точки $P\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{4}{3}\right)$.

Отже, рівняння бісектриси AP, знайдемо як рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(1;-2)$ і $P\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$. Маємо

$$\frac{x-1}{\frac{1}{3}-1}=\frac{y+2}{\frac{4}{3}+2} \text{ або } \frac{10}{3}(x-1)=-\frac{2}{3}(y+2) \text{ або } 5x+y-3=0.$$

Завдання для самостійного розв'язування

1. Скласти рівняння катетів прямокутного рівнобедреного трикутника, якщо $y = 3x+5$ — рівняння гіпотенузи, A (4, –1) — вершина прямого кута.

Відповідь: $y=-2x+7$; $y=\frac{1}{2}x-3$.

2. Дано вершини трикутника A (4; 6), B (–4; 0), C (–1; –4).

Скласти рівняння: а) трьох його сторін; б) медіани, проведеної з вершини C; в) бісектриси кута B; г) висоти, опущеної з вершини A.

3. Дано трикутник з вершинами в точках $A\left(-\frac{1}{7};-\frac{3}{28}\right)$, $B(4;3)$, $C(2;-1)$. Обчислити довжини його висот.

Відповідь: $h_A=\frac{27\sqrt{5}}{28}$.

4. З точок перетину прямої $3x+5y-15=0$ з осями координат встановлено перпендикуляри до цієї прямої. Знайти їх рівняння.

Відповідь: $5x-3y+9=0$; $5x-3y-25=0$.

5. Дано дві вершини трикутника A (–6; 2), B (2; –2) і H (1; 2) — точку перетину його висот. Обчислити координати третьої вершини.

Відповідь: C (2; 4).

6. Рівняння бічних сторін рівнобедреного трикутника $y=3$; $x-y+4=0$. Скласти рівняння основи, якщо вона проходить через початок системи координат.

Відповідь: $y=\left(-1\pm\sqrt{2}\right)x$.

7. Скласти рівняння сторін квадрата, якщо $A(2;-4)$ — його вершина, $M(5;2)$ — точка перетину діагоналей.

Відповідь: $3x + y = 2;\ x - 3y = 14;\ x - 3y = -16;\ 3x + y = 32.$

8. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо $A(3;\ 5)$, $B(6;\ 1)$ — його вершини, $M(4;\ 0)$ — точка перетину медіан.

Відповідь: $4x + 3y = 27,\ x = 3,\ 7x - 3y = 39.$

9. Скласти рівняння прямої, що поділяє відрізок AB, $A(-3;\ 2)$, $B(5;\ -2)$ навпіл і утворює з відрізком AB кут, удвічі більший, ніж із віссю Ox.

Відповідь: $x - 2y - 1 = 0.$

10. Через точку $A(5;\ 2)$ провести пряму, що відтинає рівні відрізки на осях системи координат.

Відповідь: $x + y = 7.$

11. Знайти дотичні до кола $x^2 + y^2 = 29$, що проходить через точку $A(7;\ -3)$.

Відповідь: $5x + 2y = 29,\ 2x - 5y = 29.$

12. У трикутнику $A(1;\ 2)$, $B(3;\ 7)$, $C(5;\ -13)$ обчислити довжину перпендикуляра, опущеного з вершини B на медіану, проведену з вершини A.

Відповідь: $\dfrac{25}{\sqrt{34}}.$

3.2 Кутові співвідношення між прямими

3.2.1 Кутові співвідношення між двома прямими, що задані у вигляді рівняння з кутовим коефіцієнтом

Розглянемо дві прямі l_1: $y = k_1x + b_1$ і l_2: $y = k_2x + b_2$.

Пригадуючи, що $\mathrm{tg}\alpha_1 = k_1$; $\mathrm{tg}\alpha_2 = k_2$, а також, що виконується очевидне співвідношення між кутами $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, маємо:

$$\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\mathrm{tg}\alpha_2 - \mathrm{tg}\alpha_1}{1 + \mathrm{tg}\alpha_2\alpha_1}.$$

Остаточно $$\mathrm{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1}. \quad (3.14)$$

Якщо кут φ– це кут між l_1 і l_2, то кут між l_2 і l_1 дорівнюватиме $\pi - \varphi$.

З формули $\mathrm{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}$ легко дістати умови *паралельності* і *перпендикулярності* прямих.

Так, коли $l_1 \parallel l_2$, кут φ між ними дорівнює нулю – маємо:

$\mathrm{tg}\,\varphi = 0 \Rightarrow k_1 = k_2$.

Якщо $l_1 \perp l_2$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$; $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha_1$; $\mathrm{tg}\alpha_2 = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1\right) = -\mathrm{ctg}\alpha_1 = -\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha_1}$.

Підставляючи значення кутових коефіцієнтів, маємо: $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

3.2.2 Кутові співвідношення між прямими, що задані у вигляді загального рівняння.

Розглянемо дві прямі, які задано загальними рівняннями:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0,$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0.$$

Точку перетину $M(x;\ y)$ цих прямих знаходимо, розв’язуючи систему рівнянь, оскільки координати x, y точки M є розвязком обох цих рівнянь.

Кут φ між прямими дорівнює куту між їх нормальними векторами $\vec{N}_1 = \{A_1,\ B_1\}$, $\vec{N}_2 = \{A_2,\ B_2\}$.

Отже, маємо такі залежності:

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ – умова паралельності прямих.

Якщо прямі збігаються, то їх коефіцієнти пропорційні:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$ – умова перпендикулярності прямих.

Скориставшись формулою скалярного добутку векторів, знайдемо кут φ:

$$\cos\varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad .(3.15)$$

3.2.3 Відстань від точки до прямої

Дано загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ і точку $M_1(x_1; y_1)$. Знайдемо відстань d від точки M_1 до цієї прямої. Візьмемо точку $M_0(x_0; y_0)$ на цій прямій.

Тоді відстань від точки M_1 до прямої дорівнює проекції вектора M_0M_1 на вектор нормалі $\vec{N} = \{A, B\}$.

Записуємо вираз для шуканої відстані:

$$d = \left|np_N M_0M_1\right| = \frac{\left|N \cdot M_0M_1\right|}{|N|} = \frac{\left|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0)\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Оскільки $-Ax_0 - By_0 = C$, то остаточно маємо:

$$d = \frac{\left|Ax_1 + By_1 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{3.16}$$

Приклад 5

Знайти відстань від точки $N(-1;-1)$ до прямої $10x - 24y - 1 = 0$.

Розв'язання

Маємо

$$d = \frac{\left|10 \cdot (-1) - 24 \cdot (-1) - 1\right|}{\sqrt{10^2 + 24^2}} = \frac{13}{26} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Відповідь: 0,5

Задача 2.

Знайти найменшу відстань від озера, берегова лінія якого описується функцією $y = x^2 - 4x + 6$, до шосе, яке визначається прямою $x + y - 2 = 0$.

Розв'язання

На кривій $y = x^2 - 4x + 6$ знаходимо точки, в яких дотичні пралельні заданій прямій $x + y - 2 = 0$. Визначаємо відстань від цих точок до прямої, після чого вибираємо з них найменшу. Оскільки дана пряма має кутовий коефіцієнт $k = -1$, то паралельні їй дотичні мають той самий кутовий коефіцієнт $y' = 2x - 4 = -1$, звідки маємо $x = 3/2$, $y(3/2) = 9/4$. Тобто маємо точку $B(3/2; 9/4)$, тому за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

відстань дорівнює $d = \frac{7}{4\sqrt{2}}$. це і буде шукана відстань від озера до шосе.

Відповідь: $\frac{7}{4\sqrt{2}}$

Завдання для самостійного розв'язування

1. На осі абсцис знайти точку, яка знаходиться на відстані *a* від прямої $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Відповідь: $\left(0;\ b \pm \sqrt{a^2 + b^2}\right)$.

2. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку (2; – 1) і утворює з віссю Ox удвічі більший кут, ніж кут, що його утворює з тією самою віссю пряма $x - 3y + 4 = 0$.

Відповідь: $3x - 4y - 10 = 0$.

3. Знайти рівняння прямої, паралельної прямій $12x+5y-52=0$, що знаходиться від неї на відстані 2 лін. од.

Відповідь: $12x + 5y - 26 = 0$, $12x + 5y - 78 = 0$.

4. Скласти рівняння прямої, що проходить посередині між прямими $4x - 6y = 3$, $2x - 3y = -7$.

Відповідь: $8x - 12y + 11 = 0$.

5. Знайти точку, симетричну точці $A(-2; -9)$ відносно прямої $2x + 5y = 38$.

Відповідь: (10; 21).

6. Дано рівняння двох суміжних сторін паралелограма $x - y = 1$, $x - 2y = 0$ і т.M (3;–1) — точка перетину діагоналей. Записати рівняння двох інших сторін паралелограма.

Відповідь: $x - y = 7$, $x - 2y = 10$.

7. Відоме рівняння $3x+2y+6=0$ однієї сторони кута і $x-3y+5=0$ — рівняння його бісектриси. Скласти рівняння другої сторони кута.

Відповідь: $6x+17y=15$.

8. У трикутнику *ABC* відомі *AB*: $4x + y - 12 = 0,$ висота *BH*: $5x - 4y = 15,$ висота *AK*: $2x + 2y - 9 = 0.$ Записати рівняння сторін *AC*; *BC*.

Відповідь: $4x + 5y = 20;\ x - y = 3.$

9. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо *A*(– 4; 2) — одна з його вершин і $3x - 2y + 2 = 0$ і $3x + 5y - 12 = 0$ — рівняння двох його медіан.

Відповідь: $2x + y = 8;\ x - 3y = -10,\ x + 4y = 4.$

10. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну з його вершин *A*(3; – 4) і рівняння висот: $7x - 2y = 1,;2x - 7y = 6.$

Відповідь: $2x + 7y + 22 = 0; 7x + 2y - 13 = 0; x - y + 2 = 0.$

3.3 Рівняння площини

3.3.1 Рівняння площини

Рівняння площини, що проходить через задану точку, перпендикулярно заданому вектору

Запишемо рівняння площини, узявши точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на цій площині і вектор $\bar{N} = \{A, B, C\}$, перпендикулярний до неї (вектор нормалі). Нехай $M(x, y, z)$ – довільна точка на площині. Ця точка належить площині тоді і тільки тоді, коли вектор $\vec{M}_0\vec{M}$ перпендикулярний до вектора $\bar{N}$.

За умовою вектор $M_0M = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ перпендикулярний до вектора $\bar{N}\{A, B\}$. Тому їх скалярний добуток $\bar{N} \cdot \vec{M}_0\vec{M} = 0$. Звідси маємо рівняння

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{3.17}$$

Дістали *рівняння площини, що проходить через задану точку* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *перпендикулярно до заданого вектора* $\bar{N} = \{A, B, C\}$.

Загальне рівняння площини

Якщо ввести позначення $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, то останнє рівняння набуде вигляду

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{3.18}$$

Це рівняння називається *загальним рівнянням площини.*

Рівняння площини у відрізках

У загальному випадку, коли жодний із коефіцієнтів рівняння відрізняється від нуля, рівняння площини можна звести до вигляду

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{3.19}$$

Площина, що визначається рівнянням $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, перетинає осі координат у точках $x = a$, $y = b$, $z = c$. Тому це рівняння називається *рівнянням площини у відрізках.*

Приклад 6

Записати рівняння площини $2x+3y+z-6=0$ у відрізках.

Розв'язання

Для цього поділимо обидві його частини на 6: $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{6}=1$.

Отже, площина перетинає осі координат у точках

$x = 3$, $y = 2$, $z = 6$.

Рівняння площини, що проходить через три задані точки.

Нехай дано три точки $M_1\,(x_1;y_1;z_1)$, $M_2\,(x_2;y_2;z_2)$, $M_3\,(x_3;y_3;z_3)$, які не лежать на одній прямій. Знайдемо рівняння площини, яка проходить через ці три точки. Візьмемо довільну точку площини $M\,(x, y, z)$. Розглянемо три вектора:

$M_1M=\{x-x_1;y-y_1;z-z_1\}$, $M_1M_2=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$,

$M_1M_3=\{x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1\}$.

Оскільки вони лежать в одній площині, то вони компланарні, отже, їх мішаний добуток дорівнює 0. В координатній формі маємо:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \tag{3.20}$$

Це рівняння є рівнянням *площини, що проходить через три точки.*

Приклад 7

Записати рівняння площини, яка проходить через три точки $M_1(1;1;1)$, $M_2(2;3;4)$, $M_3(4;3;1)$.

Розв'язання

Підставимо в рівняння (3.20) координати відповідних точок:

Маємо

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2-1 & 3-1 & 4-1 \\ 4-1 & 3-1 & 1-1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкривши визначник, дістанемо рівняння

$6x - 9y + 4z - 1 = 0$.

Відстань від точки до площини

Дано площину $Ax + By + Cz + D = 0$ і точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ поза нею. Знайдемо відстань від точки M_1 до площини. Нехай точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежить на площині. Тоді відстань d від точки M_1 до площини дорівнює модулю проекції вектора M_0M_1 на вектор нормалі до площини.

Отже, $d = \dfrac{|\vec{N} \cdot M_0M_1|}{|\vec{N}|} = \dfrac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Оскільки $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$, то остаточно маємо формулу:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (3.21)$$

Приклад 8

Знайти відстань d від точки $M_1(1;\ 2;\ 3)$ до площини, заданої рівнянням $2x - y + 2z + 3 = 0$.

Розв'язання

За формулою (3.21), маємо:

$$d = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 3.$$

Відповідь: 3

3.3.2 Взаємне розміщення площин

Нехай задано дві площини, які визначаються загальними рівняннями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 .$$

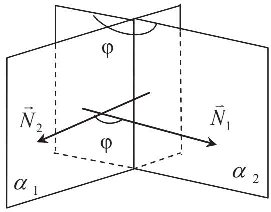

Рисунок 3.4 Кут між площинами

Розглянемо вектори нормалей до кожної з площин: $\vec{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$, $\vec{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$.

Кут між площинами визначається кутом між нормальними векторами $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$. (Рис. 3.4) Отже, справедлива рівність:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} . \qquad (3.22)$$

Умова перпендикулярності площин:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 . \qquad (3.23)$$

Умова паралельності площин:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (3.24)$$

Дві площини збігаються, якщо $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$.

Приклад 9

Знайти кут між площинами $3x–4y–z–1=0$ і $2x+3y–6z–2=0$.

Розв'язання

Маємо

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = \frac{3\cdot 2 + (-4)\cdot 3 + (-1)(-6)}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2}\ \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{6 - 12 + 6}{\sqrt{26}\ \sqrt{49}} = 0 .$$

Оскільки $\cos\varphi = 0$, то площини будуть перпендикулярними одна до одної $\varphi = 90^{\circ}$.

Відповідь: 90°

Завдання для самостійного розв'язування

1. Записати рівняння площини, паралельної площині xOy, що проходить через точку (2;–5;3).

Відповідь: $z + 3 = 0$.

2. Скласти рівняння площини, якщо відстань її від трьох точок $A(6;1;-1)$, $B(0;5;4)$ і $C(5;2;0)$ дорівнюють відповідно 1, 2, 0.

Відповідь: $x+2y+2z-9=0$ і $y-2=0$.

3. На осі Oz знайти точку, рівновіддалену від двох площин:

$$x+4y-3z-2=0 \text{ і } 5x+z+8=0.$$

Відповідь: M_1 (0; 0; 3), M_2 (0; 0; $-\frac{5}{2}$).

4. Знайти точку, симетричну з початком координат відносно площини $6x + 2y - 9z + 121 = 0$.

Відповідь:(– 12; – 4; 18).

5. Дано дві точки $A(1;\ 3;\ -2)$, $B(7;\ -4;\ 4)$. Записати рівняння площини, що проходить через точку B перпендикулярно до $\vec{AB}$ і знайти її відстань від точки A.

Відповідь: $6x - 7y + 6z - 94 = 0;\ 11.$

6. Через вісь Oz проходить площина, що утворює кут $60°$ з площиною $2x + y - \sqrt{5}z - 7 = 0.$

Записати рівняння даної площини.

Відповідь: $x + 3y = 0;\ 3x - y = 0.$

7. На відстані трьох одиниць від площини $3x - 6y - 2z + 14 = 0$ проходить паралельна їй площина.

Відповідь: $3x-6y-2z+35=0$.

3.4 Пряма та площина в просторі

3.4.1 Канонічне та параметричне рівнянняпрямої

Нехай дано точку $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ на прямій і вектор $\vec{S}=\{l;m;n\}$, паралельний цій прямій. Складемо рівняння прямої. Нехай $M(x;\, y;\, z)$ – довільна точка на прямій. Вектор M_0M паралельний вектору $\vec{S}$, який називається *напрямним вектором прямої.*

За умовою паралельності дістанемо рівняння

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}, \qquad (3.25)$$

яке називається *канонічним рівнянням прямої.*

Якщо дано дві точки $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$, $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$ на прямій, то за напрямний вектор $\vec{S}$ можна взяти $\vec{S}=\{x_2-x_1,\, y_2-y_1,\, z_2-z_1\}$. Тоді рівняння прямої набуде вигляду

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}, \qquad (3.26)$$

яке називається *рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки.*

Приклад 10

Скласти рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(1;2;3)$ і $M_2(3;5;7)$.

Розв'язання

З рівняння $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ маємо: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$.

Якщо відомі канонічне рівняння, то з нього можна вивести *параметричні рівняння прямої.* Нехай t – коефіцієнт пропорційності векторів M_0M і $\vec{S}$, тобто $M_0M=t\cdot\vec{S}$.

З рівняння $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t$

маємо рівняння

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}, \qquad (3.27)$$

яке називається *параметричним рівнянням прямої*.

Коли параметр t змінюється від $-\infty$ до $+\infty$, точка M (x; y; z), пробігає всю пряму.

Будь-яка пряма лінія у просторі подається системою двох рівнянь які задають дві різні площини, що проходять через цю пряму:

$$\begin{cases} A_1 x + D_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + D_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (3.28)$$

Напрямний вектор $\vec{S}$ цієї прямої перпендикулярний до кожної з нормалей $\vec{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$, $\vec{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$.

Отже, можна вважати що $\vec{S} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$.

Приклад 11

Перейти від загального рівняння прямої

$x + y + 2z + 4 = 0$, $x - y - 2z - 6 = 0$ до канонічного.

Розв'язання

Візьмемо $z_1 = 0$, та із системи рівнянь $x_1 + y_1 + 4 = 0$, $x_1 - y_1 - 6 = 0$ знайдемо $x_1 = 1$, $y_1 = -5$.

Нехай $z_2 = 1$, то із системи рівнянь $x_2 + y_2 + 6 = 0$, $x_2 + y_2 - 8 = 0$ знайдемо $x_2 = 1$, $y_2 = -7$.

Маємо канонічне рівняння прямої:

$$\frac{x-0}{0} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z}{1}.$$

3.4.2 Пряма і площина в просторі

Дано площину $Ax + By + Cz + D = 0$, а також пряму з канонічним рівнянням $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$.

Знайдемо кут φ між цією прямою і заданою площиною. Обчислимо кут $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ між вектором нормалі $\vec{N}$ і напрямленим вектором прямої $\vec{S}$

$\vec{N} = \{A, B, C\}$, $\vec{S} = \{l, m, n\}$.

За формулою

$\sin\varphi = \cos\theta = \frac{\vec{N} \cdot \vec{S}}{|\vec{N}||\vec{S}|}$ маємо:

$$\sin\varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \tag{3.29}$$

Умова паралельності площини та прямої:

$\vec{N} \cdot \vec{S} = 0$, $Al + Bm + Cn = 0$.

Умова перпендикулярності площини та прямої:

$\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}$.

3.4.3 Взаємне розміщення прямих та площин в просторі

Відстань від точки до прямої

Для того, щоб знайти відстань d від точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ до прямої $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$, яка проходить через точку $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, побудуємо паралелограм на векторах M_0M і $\vec{S}$.

Площу S цього паралелограма можна знайти за формулою

$S = |M_0M \times \vec{S}|$, $S = d|\vec{S}|$.

Звідси маємо:

$$d = \frac{|M_0M \times \vec{S}|}{|\vec{S}|} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ l & m \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ l & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z - z_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \tag{3.30}$$

Приклад 12

Обчислити відстань від точки $M_0(1;\ 2;\ -1)$ до прямої $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

Розв'язання

За формулою $d=\dfrac{\left|M_0M\times\vec{S}\right|}{\left|\vec{S}\right|}$ дістаємо:

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}0 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}0 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}-3 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{3}.$$

Відповідь: $2\sqrt{3}$

Приклад 13

Скласти рівняння площини, що проходить через дану точку $M_1(1;\ 2;\ -3)$ паралельно до прямих

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-7}{3},\quad \frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{-1}.$$

Розв'язання

Використаємо рівняння площини, що проходить через дану точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$:

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, у якому *A, B, C* – координати нормального вектора до площини. Задача зводиться до знаходження цього нормального вектора.

Очевидно, в якості нормального вектора можна взяти вектор, що є векторним добутком напрямних векторів даних прямих, або колінеарних до нього.

Отже, знайдемо $\bar{s}_1=\{2;\ -3;\ 3\}$, $\quad \bar{s}_2=\{3;\ 2;\ -1\}$.

$$\bar{s}_1\times\bar{s}_2=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -3 & 3\\ 3 & -2 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3 & 3\\ -2 & -1\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & -2\end{vmatrix}\bar{k}=9\bar{i}+11\bar{j}+5\bar{k}.$$

Покладемо $\vec{N}=\{A;\ B;\ C\}=\{9;\ 11;\ 5\}$. Тоді з рівняння

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ маємо:

$9(x - 1) + 11(y - 2) + 5(z+ 3) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; 9x+ 11y+ 5z– 16 = 0.$

Відповідь: 9x+11y+5z-16=0

Взаємне розміщення двох прямих

Нехай задано дві прямі, що визначаються рівняннями

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},\qquad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

Прямі паралельні, якщо виконується умова: $\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$.

Прямі перпендикулярні, якщо $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$.

Кут між прямими в просторі визначається кутом між напрямними векторами цих прямих:

$$\cos\theta=\frac{\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2}{\left|\vec{S}_1\right|\left|\vec{S}_2\right|},\quad \cos\theta=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}. \tag{3.31}$$

Приклад 14

Показати, що дві прямі

$$\begin{cases}x-z+2=0\\ y-2z-1=0\end{cases}\ \text{і}\ \ \frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-2}{1}$$

Перетинаються. Записати рівняння площини, в якій вони розташовані.

Розв'язання

Дві прямі лежатимуть в одній площині, коли їх напрямні вектори $\vec{S}_1$ і $\vec{S}_2$ та вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ будуть компланарними. Точка $M_1(-2;1;0)$ належить першій прямій, а $M_2(2;\,4;\,2)$ – другій. Вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=(4;\,3;\,2)$. Напрямний вектор

$$\vec{S}_1=\vec{N}_1\times\vec{N}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}==\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k};\;\; \vec{S}_2=(3;1;1).$$

Мішаний добуток трійки вказаних векторів буде наступним

$$\left(\vec{S}_1 \times \vec{S}_2\right) \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Отже, прямі лежать в одній площині. Для запису рівняння цієї площини знайдемо

вектор $\vec{N} = \vec{S}_1 \times \vec{S}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$.

Точка $M_1(-2; 1; 0)$ належить цій площині. Отже, маємо

$$x + 2 + 2(y-1) - 5z = 0$$

або остаточно рівняння площини має вигляд $x + 2y - 5z = 0$.

Відповідь: x+2y-5z=0.

Завдання для самостійного розв'язування

1. Через точку (2;– 5; 3) проходить пряма, паралельна даній прямій

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ 5x + 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$$

Записати рівняння шуканої прямої.

Відповідь: $\dfrac{x-2}{-11} = \dfrac{y+5}{17} = \dfrac{z-3}{13}$.

2. З усіх прямих, що перетинають дві прямі:

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z}{1} \text{ і } \frac{x-10}{3} = \frac{y+7}{4} = \frac{z}{1},$$

знайти ту, яка паралельна прямій $\dfrac{x+2}{8} = \dfrac{y-1}{7} = \dfrac{z-3}{1}$.

Відповідь: $\dfrac{x}{8} = \dfrac{y+8}{7} = \dfrac{z+9}{1}$.

3. Визначити кут між двома прямими

$$\begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} 4x + y - 6z = 2 \\ y - 3z = -2. \end{cases}$$

Відповідь: $\cos\alpha = \dfrac{98}{195}$.

4. Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A(2;\ 3;\ 1)$ на пряму $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$.

Відповідь: $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{-1}$.

5. Скласти рівняння спільного перпендикуляра до двох прямих $\frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1}$ і $\frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$.

Відповідь: $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{4}$.

6. Чи лежить пряма $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+2}{5}$ на площині $4x+3y-z+8=0$.

7. Знайти проекцію прямої $\frac{x}{4}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+1}{-3}$ на площину $x-y+3z+8=0$.

Відповідь: $\frac{x+9}{7}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{-1}$.

8. На прямій $\frac{x}{1}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-3}{-1}$ знайти точку, найближчу до точки (3, 2, 6).

Відповідь: (3; – 1; 0).

9. Знайти найкоротшу відстань між двома прямими, що не перетинаються $\frac{x-9}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{1}$ і $\frac{x}{-2}=\frac{y+7}{9}=\frac{z-2}{2}$.

Відповідь: d = 7лін. одн.

10. Записати рівняння площини, що проходить через точку $A(3;\ 1;\ -2)$ і через пряму $\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$.

Відповідь: $8x-9y-22z-59=0$.

11. Записати рівняння площини, що проходить через перпендикуляри, опущені з точки $A(-3;2;5)$ на площини $4x+y-3z+13=0$ та $x-2y+z-11=0$.

Відповідь: $4x+5y-2z=0$.

12. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(4;\ -3;\ 1)$ і паралельну прямим:

$\frac{x}{6}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-3}$ і $\frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{2}$.

Відповідь: $16x-27y+14z-159=0$.

13. Через точку $A(1;\ 0;\ 7)$ паралельно площині $2x-y+2z=15$ проходить пряма, яка перетинає пряму $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z}{1}$.

Записати рівняння шуканої прямої.

Відповідь: $\frac{x-1}{68}=\frac{y}{70}=\frac{z-7}{-67}$.

14. Знайти точку, симетричну точці $A(4;\ 3;\ 10)$ відносно прямої $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$.

Відповідь:(2; 9; 6).

3.5 Криві другого порядку

Розглянемо криві другого порядку, які на площині в загальному випадку можна записати таким рівнянням:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0. \qquad (3.32)$$

Дане рівняння описує всі криві другого порядку в загальному випадку.

3.5.1 Коло

Колом називають множину точок площини, відстані яких від заданої точки площини (центра кола) дорівнюють сталому числу (радіусу).

Рівняння кола радіуса R з центром в точці $C(a;b)$:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (3.33)$$

або

$$x^2+y^2+mx+ny+p=0. \qquad (3.34)$$

Щоб від рівняння (3.34) перейти до рівняння (3.33), потрібно в лівій частині рівняння (3.34) виділити повні квадрати:

$$\left(x+\frac{m}{2}\right)^2+\left(y+\frac{n}{2}\right)^2=\frac{m^2}{4}+\frac{n^2}{4}-p.$$

3.5.2 Еліпс

Еліпсом називають множину всіх точок площини, сума відстаней яких від двох даних точок цієї площини, які називаються фокусами, є величиною сталою і більшою від відстані між фокусами.

Нехай (Рис. 3.5) $F_1M+F_2M=2a$ $(a>0)$.

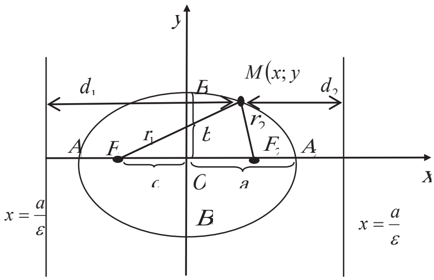

Рисунок 3.5 Графік еліпса

Точки F_1 і F_2 називаються *фокусами* еліпса, а відстань F_1F_2 – *міжфокусною відстанню;* вона позначається через $2c$: $F_1F_2=2c$.

Якщо взяти пряму F_1F_2 (Рис. 3.5) за вісь абсцис і середину O відрізка F_1F_2 – за початок прямокутної декартової системи координат, то одержимо канонічне (найпростіше) рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{3.35}$$

Еліпс, заданий рівнянням (3.35), симетричний відносно осей координат.

Параметри a і b називаються *півосями еліпса*. Якщо $a>b$, тоді відрізок A_1A_2 між точками перетину еліпса з віссю x – *велика вісь еліпса*, відрізок B_1B_2 між точками перетину еліпса з віссю y – *мала вісь еліпса*; в цьому разі фокуси $F_1 i F_2$ знаходяться на осі Ox на відстані $c=\sqrt{a^2-b^2}$ від центра.

Відношення $\frac{F_1F_2}{A_1A_2}$ міжфокусної відстані до великої осі, тобто величина $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$ називається *ексцентриситетом еліпса.*

Відстані від точки $M(x;y)$ еліпса до його фокусів (*фокальні радіуси-вектори)* визначаються за формулами: $r_1 = a - \varepsilon x$ $\quad r_2 = a + \varepsilon x$. Якщо в рівнянні $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $a < b$, тоді фокуси еліпса знаходяться на осі Oy. Отже, $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, $\quad \varepsilon = \frac{c}{b}$.

Властивості еліпса, заданого канонічним рівнянням ($a > b$):

- еліпс симетричний відносно осей координат і початку координат $O(0,0)$;
- координати фокусів $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$;
- еліпс – обмежена крива.

Прямі $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ називаються директрисами еліпса.

Відношення фокальних радіусів довільної точки еліпса до відстаней цієї точки від відповідних директрис є величиною сталою і дорівнює ексцентриситету еліпса $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$.

Приклад 15

Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо задано точку $M_1(2;-\frac{5}{3})$ еліпса і його ексцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{3}$.

Розв'язання

Виходячи з умови, рівняння еліпса має вигляд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b)$.

Потрібно знайти значення параметрів a, b. Координати точки еліпса $M_1(2;-\frac{5}{3})$ задовольняють рівнянню еліпса, отже $\frac{4}{a^2}+\frac{25}{9b^2}=1.$

Крім того, $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{2}{3}$.

Розв'язавши систему, знаходимо: $a^2=9$, $b^2=5$.

Отже, рівняння еліпса має вигляд: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

3.5.3 Гіпербола

Гіперболою називається множина всіх точок площини, модуль різниці відстаней яких від двох даних точок цієї площини, що називаються фокусами, є величиною сталою і меншою відстані між фокусами.

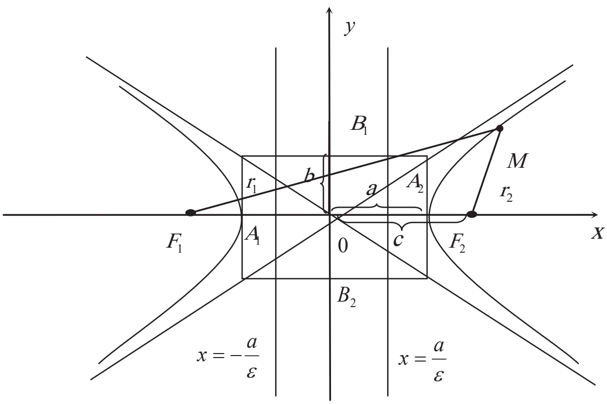

Рисунок 3.6. Графік гіперболи

Позначимо через F_1 і F_2 фокуси гіперболи, відстань між ними – через $2c$, а модуль різниці відстаней від довільної точки гіперболи до фокусів – через $2a$. Точка $M(x;y)$ площини лежить на гіперболі тоді і лише тоді, коли $|F_1M-F_2M|=2a$, $(0<2a<F_1F_2)$. Якщо M ближче до фокуса F_2, ніж до фокуса F_1, то точки M утворюють одну гілку гіперболи, для якої $F_1M-F_2M=2a$ (Рис. 3.6

права гілка). Ті точки, для яких $F_2M - F_1M = 2a,$ утворюють другу гілку (Рис. 3.6 ліва гілка). Середина відрізка F_1F_2 – точка O називається *центром* гіперболи.

Канонічне (найпростіше) рівняння гіперболи дістаємо у випадку, якщо приймаємо пряму F_1F_2 за вісь абсцис і середину O відрізка F_1F_2 – за початок координат. Тоді, дане рівняння має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3.36}$$

Гіпербола, задана рівнянням (3.36), симетрична відносно осей координат. Вона перетинає вісь Ox у точках $A_1(a;0), A(-a;0)$ – *вершинах гіперболи,* і не перетинає вісь Oy. Відрізок $A_1A_2 = 2a$ (а часто й пряма A_1A_2) називається *дійсною віссю* гіперболи. Гіпербола має також уявну вісь, яка проходить через її центр, але не перетинає її. На уявній осі прийнято відкладати від центра відрізки $B_1O = OB_2 = b$. Параметр a називається *дійсною* піввіссю, b – *уявною* піввіссю. Параметр $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ є відстанню від фокуса до центра. Відношення $\frac{F_1F_2}{A_1A_2} = \frac{c}{a}$ міжфокусної відстані до дійсної осі називається *ексцентриситетом* гіперболи і позначається літерою ε: $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$.

Прямі $y = \pm\frac{b}{a}x$ називаються *асимптотами* гіперболи. Асимптотою деякої кривої називається пряма, відстань до якої від точки, що рухається по нескінченній кривій, прямує до нуля.

Відстань від точки $M(x, y)$ гіперболи до її фокусів (*фокальні радіуси-вектори*) визначаються за формулами $r_1 = |\varepsilon \cdot x - a|$; $r_2 = |\varepsilon \cdot x + a|$.

Гіпербола, в якій $a = b$, називається *рівнобічною*, її рівняння: $x^2 - y^2 = a^2$, а рівняння асимптот: $y = \pm x$.

Дві гіперболи називаються *спряженими*, якщо вони мають спільний центр O і спільні осі, але дійсна вісь однієї з них є уявною віссю іншої. Якщо

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ є рівнянням однієї із спряжених гіпербол, тоді інша подається рівнянням $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$. Спряжені гіперболи мають спільні асимптоти.

Властивості гіперболи, заданої канонічним рівнянням (3.36):

- гіпербола є симетричною відносно осей координат;
- координати фокусів: $F_1(-c,0), F_2(c,0)$;
- гіпербола – нескінченна крива.

Прямі $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$, де a – дійсна піввісь гіперболи, а ε - її ексцентриситет, називаються *директрисами гіперболи*. Директриси гіперболи мають ту саму властивість, що й директриси еліпса.

Приклад16

Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо її фокуси лежать на осі Oy і відстань між ними дорівнює 20, а дійсна вісь гіперболи дорівнює 16.

Розв'язання

Шукане рівняння гіперболи матиме вигляд $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$, де b– дійсна, а a – уявна піввісь гіперболи. За умовою $2c=20$, звідки $c=10$, $2b=16, b=8$.

Уявну вісь знайдемо із співвідношення

$a^2=c^2-b^2 \Rightarrow a^2=100-64=36.$

Отже, рівняння гіперболи $\frac{y^2}{64}-\frac{x^2}{36}=1.$

3.5.4 Парабола

Параболою називається множина всіх точок площини, кожна з яких знаходиться на однаковій відстані від даної точки, що називається *фокусом*, і від даної прямої, яка називається *директрисою* і не проходить через фокус.

Відстань від фокуса до директриси p називається *параметром* параболи.

Канонічне рівняння параболи, симетричної відносно осі Ox (Рис. 3.7): $y^2 = 2px$; канонічне рівняння параболи, симетричної відносно осі Oy: $x^2 = 2py$.

З Рис. 3.7 видно, що парабола $y^2 = 2px$ має фокус $F(\frac{p}{2};0)$ і директрису $x = -\frac{p}{2}$; фокальний радіус-вектор точки M на ній $r = x + \frac{p}{2}$.

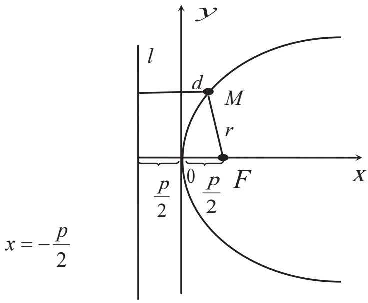

Рисунок 3.7 Графік параболи

Приклад 17

Скласти рівняння параболи, що має фокус $F = (0; -3)$ і проходить через початок координат, знаючи, що її віссю є вісь Oy.

Розв'язання

Оскільки фокус знаходиться у нижній півплощині, то й парабола, що міститься у нижній півплощині, симетрична відносно осі Oy. Її рівняння $x^2 = -2py$. Фокус має координати $F\left(0; -\frac{p}{2}\right)$. За умовою $-\frac{p}{2} = -3 \Rightarrow \quad p = 6$.

Отже, рівняння параболи $x^2 = -12y$.

Завдання для самостійного розв'язування

1. Знайти центр і радіус кола $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$.

Відповідь: $a = 4$; $b = -3$; $R = 2$.

2. Записати рівняння дотичних, проведених із початку системи координат до кола $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 = 0$.

Відповідь: $y = 0$; $20x - 21y = 0$.

3. На еліпсі $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ знайти точку, відстань якої від правого фокуса в чотири рази більша за відстань від лівого фокуса.

Відповідь: $M_1\left(-\frac{15}{2}, \frac{3\sqrt{7}}{2}\right), M_2\left(-\frac{15}{2}, -\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$.

4. Еліпс проходить через точку $P\left(3; \frac{12}{5}\right)$ і дотикається до прямої $4x + 5y - 25 = 0$. Записати рівняння цього еліпса і знайти координати точки дотику.

Відповідь: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, $\left(4; \frac{9}{5}\right)$; $\frac{16x^2}{225} + \frac{y^2}{16} = 1$, $\left(\frac{9}{4}, \frac{16}{5}\right)$.

5. Знайти рівняння кола, описаного навколо трикутника з вершинами $A(7; 7)$, $B(0; 8)$, $C(-2; 4)$.

Відповідь: $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$.

6. Записати рівняння кола з центром у точці (6; 7), що дотикається до прямої $5x - 12y = 24$.

Відповідь: $(x-6)^2 + (y-7)^2 = 36$.

7. В еліпс $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ вписано правильний трикутник так, що одна з його вершин збігається з правим кінцем великої осі. Знайти координати двох інших вершин.

Відповідь: $\left(\frac{6}{7}; \frac{12\sqrt{3}}{7}\right), \left(\frac{6}{7}; \frac{-12\sqrt{3}}{7}\right)$.

8 Записати рівняння прямої, що дотикається до еліпса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ у точці (2;–3).

Відповідь: $x - 2y = 8$.

9. Знайти рівняння тих дотичних до еліпса $3x^2 + 8y^2 = 45$, відстань яких від центра еліпса дорівнює 3.

Відповідь: $\pm 3x \pm 4y + 15 = 0.$

10. Гіпербола дотикається до прямої $x - y = 2$ у точці (4; 2). Скласти рівняння гіперболи.

Відповідь: $\dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{4} = 1.$

11. До параболи $y^2 = 12x$ проведена дотична паралельно прямій $2x + y - 7 = 0.$ Знайти рівняння дотичної.

Відповідь: $4x + 2y + 3 = 0.$

12. Знайти кут між асимптотами гіперболи, в якої:

а) ексцентриситет $\varepsilon = 2.$

б) відстань між фокусами вдвічі більша за відстань між директрисами.

*Відповідь:*а) 120°; б) 90°.

13. Записати рівняння прямої, що дотикається до гіперболи $\dfrac{x^2}{5} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ у точці (5, – 4).

Відповідь: $x + y = 1.$

14. Знайти найкоротшу відстань параболи $y^2 = 64x$ до прямої $4x + 3y + 46 = 0.$

Відповідь:2 *лін. одн.*

15. Визначити типи таких кривих:

а) $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0,$

б) $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0,$

в) $x^2 + 4xy + 3y^2 + 2x - 2y = 0,$

г) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x - 2y - 1 = 0,$

д) $9x^2 - 6xy + y^2 - 6x + 2y = 0.$

*Відповідь:*а) гіпербола; б) еліпс; в) пара прямих, що перетинаються;

г) парабола; д) пара паралельних прямих.

Тести до розділу «Аналітична геометрія»

1. Кутовий коефіцієнт k прямої $3x-7y+3=0$ дорівнює

   a) 3;

   b) $-\frac{3}{7}$;

   c) $\frac{3}{7}$;

   d) 7.

2. Дві прямі $\frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{-1}$ та $\frac{x-5}{4}=\frac{y+8}{-1}$:

   a) паралельні;

   b) перпендикулярні;

   c) збігаються;

   d) мимобіжні.

3. Дано точки $A(2;\ 1;\ -4)$, $B(3;\ 2;\ -2)$. Вектор $\overrightarrow{AB}$ перпендикулярний до площини:

   a) $x+y+2z+3=0$;

   b) $2x+y-4z+3=0$;

   c) $3x+2y-2z+3=0$;

   d) $x+y-2z+3=0$.

4. Рівняння прямої, паралельної прямій $2x-y-3=0$ буде:

   a) $2x-y=0$;

   b) $2x+y=0$;

   c) $x+2y=0$;

   d) $2x-y-3=0$.

5. Прямій $3x-7y-27=0$ належить точка з координатами:

a) $(-2\ \ 3)$;

b) $(3;\ -7)$;

c) $(2;\ -3)$;

d) $(-0\ \ 3)$.

6. Площина $2x-3y+z+5=0$ паралельна прямій:

a) $\dfrac{x+4}{1}=\dfrac{y-5}{-1}=\dfrac{z-2}{-5}$;

b) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$;

c) $\dfrac{x+5}{-2}=\dfrac{y+9}{-1}=\dfrac{z-2}{-1}$;

d) $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y+6}{-6}=\dfrac{z+1}{2}$.

7. Відстань від точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ до площини $Ax+By+Cz+D=0$ обчислюється за формулою:

a) $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}$;

b) $d=\dfrac{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$;

c) $d=\dfrac{\sqrt{A^2+B^2+C^2+D^2}}{|x_0^2+y_0^2+z_0^2|}$;

d) $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

8. Вектор, перпендикулярний до площини $2x-3y+z-1=0$ буде мати координати:

a) $\{2;\ -3;\ 1\}$;

b) $\{1/2;\ -1/3;\ 1\}$;

c) $\{-2;\ 3;\ -1\}$;

d) $\{-2;\ -3;\ -1\}$.

9. Відстань від точки $N(-1;\ -1)$ до прямої $x-y-1=0$ дорівнює

a) 2;

b) -2;

c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$;

d) 0.

10. Умовою перпендикулярності прямих $y=k_1x+b_1$ та $y=k_2x+b_2$ є рівність:

a) $k_1\cdot k_2=-1$;

b) $k_1\cdot k_2=1$;

c) $\frac{k_1}{k_2}=-\frac{b_1}{b_2}$;

d) $k_1b_2=k_2b_1$.

11. Площина $-3x-2y+z+4=0$ перпендикулярна до площини:

a) $3x+2y-z+5=0$;

b) $2x+2y+10z+1=0$;

c) $2x+3y-z-4=0$;

d) $\frac{x}{-3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{1}=\frac{1}{4}$.

12. Відносно прямої $3x-4y+1=0$ вектор $\overline{N}=\{3;\ -4\}$ є:

a) паралельним;

b) перпендикулярним;

c) належить прямій;

d) утворює з нею тупий кут.

13. Точка A належить площині $2x-3y+z-2=0$, якщо її координати:

a) $(1;\ 1;\ 1)$;

b) $(1;\ 0;\ 0)$;

c) $(2;\ -1;\ 3)$;

d) $(0;\ 0;\ 0)$.

14. Площина $3x-2y+z-5=0$ перпендикулярна до прямої:

a) $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{1}$;

b) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+1}{1}$;

c) $\frac{x+3}{-1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{1}$;

d) $\frac{x-1}{-6}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+1}{-2}$.

15. Площина $3x+5y-2z+1=0$ паралельна площині:

a) $-3x-5y-2z-1=0$;

b) $3x-5y+2z=5$;

c) $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{z}{-2}+1=0$;

d) $-6x-10y+4z+1=0$.

16. Вказати точку, яка належать площині $x+y+z-2=0$:

a) $M_1(1;\ 1;\ 0)$;

b) $M_2(1;\ 0;\ -1)$;

c) $M_3(0;\ -1;\ 1)$;

d) $M_4(1;\ 1;\ 1)$;

e) $M_5(0;\ 0;\ 1)$.

17. Перетином прямих $2x-y=1$ та $x+y=5$ є точка:

a) $A(3;\ 2)$;

b) $B(2;\ -1)$;

c) $C(2;\ 3)$;

d) $D(0;\ -1)$.

18. Прямі $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+5}{-2}$ та $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{0}=\frac{z+5}{-2}$:

a) взаємно перпендикулярні;

b) паралельні;

c) мимобіжні;

d) збігаються.

19. Нормальний вектор площини $2x = y$ має вигляд:

a) $\{2;\ 1;\ 1\}$;

b) $\{2;\ -1;\ 1\}$;

c) $\{2;\ -1;\ 0\}$;

d) $\{2;\ 0;\ 1\}$.

20. Відстань від точки $M_0(x_0;\ y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ дорівнює:

a) $|Ax_0 + By_0 + C|$;

b) $\dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$;

c) $\dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$;

d) $\sqrt{Ax_0 + By_0 + C}$.

20. Дві прямі ℓ_1: 2x-y+3=0 та ℓ_2: -4x+2y-1=0

a) перпендикулярні;

b) паралельні;

c) перетинаються під гострим кутом.

21. Вектор $\vec{s} = \{2;\ -7\}$ паралельний прямій:

a) $\dfrac{x+4}{7} = \dfrac{y-5}{-2}$;

b) $\dfrac{x+4}{2} = \dfrac{y-5}{-7}$;

c) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+7}{-1}$;

d) $\dfrac{x-2}{-7} = \dfrac{y+7}{2}$.

22. Прямі $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-5}{4} = \dfrac{z+7}{-10}$ та $\dfrac{x-2}{-6} = \dfrac{y-5}{-8} = \dfrac{z+7}{20}$:

a) паралельні;

b) збігаються;

c) мимобіжні;

d) перпендикулярні.

23. Направляючий вектор прямої $\frac{x-5}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-4}{1}$ паралельний вектору:

a) $\{-5;1;-4\}$;

b) $\{5;-1;4\}$;

c) $\{6;-4;-1\}$;

d) $\{-6;\ 4;\ -2\}$.

24. Пряма $\frac{x-2}{3}=\frac{y+5}{4}$ проходить через точку:

a) $M_1(3;\ 4)$;

b) $M_2(-2;\ 5)$;

c) $M_3(-3;\ -4)$;

d) $M_4(2;\ -5)$.

25. Площина $3x-2y+z-5=0$ перпендикулярна до прямої:

a) $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{1}$;

b) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+1}{1}$;

c) $\frac{x+3}{-1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{1}$;

d) $\frac{x-1}{-6}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+1}{-2}$.

26. Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(4;-3)$ паралельно вектору $\vec{s}=\{-5;\ 2\}$ має вигляд:

a) $\frac{x-4}{-5}=\frac{y+3}{2}$;

b) $\frac{x+4}{-5}=\frac{y-3}{2}$;

c) $\frac{x-5}{4}=\frac{y+2}{-3}$;

d) $\frac{x+5}{4}=\frac{y-2}{-3}$.

27. Довжина нормального вектора площини $(x-2)+3(y+2)-3(z+3)=0$ дорівнює:

a) $\sqrt{17}$;

b) $\sqrt{19}$;

c) $\sqrt{7}$;

d) $2\sqrt{3}+1$.

28. На перетині двох площин $2(x-1)-5(y+6)+3(z-4)=0$ та $x-y+z-11=0$ лежить точка:

a) $M_1(1;\ -6;\ 4)$;

b) $M_2(2;\ -5;\ 3)$;

c) $M_3(2;\ -5;\ 5)$;

d) $M_4(-1;\ 6;\ -4)$.

29. Площина $2x-3y+6z+30=0$ перетинає вісь Oy в точці:

a) $A_1(2;\ 0;\ 6)$;

b) $A_2(0;\ -10;\ 0)$;

c) $A_3(2;\ -3;\ 6)$;

d) $A_4(0;\ 10;\ 0)$.

30. Умовою перпендикулярності прямих $y=k_1x+b_1$ та $y=k_2x+b_2$ є рівність:

a) $k_1\cdot k_2=-1$;

b) $k_1\cdot k_2=1$;

c) $\frac{k_1}{k_2}=-\frac{b_1}{b_2}$;

d) $k_1b_2=k_2b_1$.

РОЗДІЛ 4 ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

4.1 Вступ до математичного аналізу

4.1.1 Функціональна залежність. Основні поняття

Функцією $y = f(x)$ називається така відповідність між множинами D і E, за якої кожному значенню змінної x відповідає одне й тільки одне значення змінної y.

При цьому вважають, що: x –незалежна змінна, або аргумент; y – залежна змінна, або функція; D–область визначення функції; E –область значень функції.

Розрізняють три способи завдання функції: аналітичний, графічний і табличний.

Функція $y = F(u)$, де $u = \varphi(x)$, називається *складною функцією*, або *суперпозицією* функцій $F(u)$ та $\varphi(x)$, і позначається $y = F(\varphi(x))$.

Приклад 1

Вказати складові функції $y = 2^{\sin^2 x}$

Розв'язання

$y = 2^{\sin^2 x}$ –складна функція, вона буде суперпозицією трьох функцій:
$y = 2^u$, $u = v^2$, $v = \sin x$.

Приклад 2

Записати складну функцію, складовими якої є:

$y = \mathrm{tg}(3u) \cdot f(u)$, де $u = 3x + 1$, $f(x) = (2x + 5)^3$.

Розв'язання

Оскільки $f(u) = (2u + 5)^3$, то

$$y = \mathrm{tg}(3(3x + 1))(2(3x + 1) + 5)^3 = \mathrm{tg}(9x + 3)(6x + 7)^3.$$

Нехай функція $y = f(x)$ встановлює відповідність між множинами D та E. Якщо обернена відповідність між множинами E та D буде функцією, то вона називається *оберненою до даної* $y = f(x)$; її позначають $y = f^{-1}(x)$.

Приклад 3

Вказати взаємо обернену функцію до функції f(x)=x^3

Розв'язання

$f(x)=x^3, f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$ – взаємно обернені функції.

Графіки взаємно обернених функцій, симетричні відносно прямої $y = x$, подані на (Рис. 4.1).

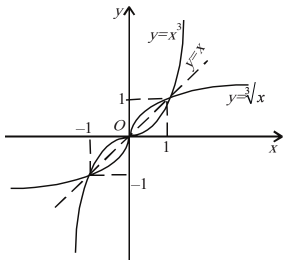

Рисунок 4.1. Графіки взаємообернених функцій

Функція називається *неявною*, якщо її задано рівнянням $F(x, y) = 0$, яке не розв'язане відносно змінної y.

Приклад 4

Рівняння $y + x + 2^y = 0$ визначає неявну функцію y від x.

Система рівнянь $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ визначає параметричну залежність функції y від змінної x (t– параметр).

Приклад 5

Параметрична залежність $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ визначає коло радіуса r з центром в початку системи координат.

Дійсно, піднесемо до квадрата параметричні рівняння, дістанемо: $x^2 + y^2 = r^2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)$, або $x^2 + y^2 = r^2$.

Множина всіх значень аргументу, для яких можна обчислити значення функції, називається *областю визначення функції*.

Приклад 6

Знайти область визначення функції

$$y=\frac{\arcsin\frac{x}{2}+\sqrt{1-x^2}}{\lg(1+x)}.$$

Розв'язання

$$D(y)=\begin{cases}\left|\frac{x}{2}\right|\le 1\\ 1-x^2\ge 0\\ x+1>0\\ \lg(x+1)\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x|\le 2\\ |x|\le 1\\ x>-1\\ x+1\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x\le 1\\ x\ne 0.\end{cases}$$

$D(y) = (-1; 0) \cup (0; 1]$ – область визначення. Якщо за умовою задачі

x — відстань, а це означає, що $x \ge 0$, тоді $D(y) = (0; 1]$ – задана область визначення.

Функція $y = f(x)$ називається *парною* (*непарною*), якщо для будь-якого $x\in D$ виконується умова $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$.

Функція $y = f(x)$ називається *періодичною*, якщо для $x \in D$ виконується умова $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$, де число T– період функції.

Приклад 7

Визначити період функції y = tgx

Розв'язання

$y = \mathrm{tg}x$ періодична функція з періодом $T=\pi$, тому що $\mathrm{tg}(x+\pi) = \mathrm{tg}(x-\pi) = \mathrm{tg}x$.

Функція $y = f(x)$ називається *монотонно зростаючою* (*спадною*) на множині D, якщо для всіх $x \in D$ більшому значенню аргументу відповідає більше (менше) значення функції, тобто $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1) (f(x_2) < f(x_1))$.

Приклад 8

$y = \log_a x$– монотонно спадна функція при $0<a<1$, а при $a>1$ – монотонно зростаюча. (Рис. 4.2 б)

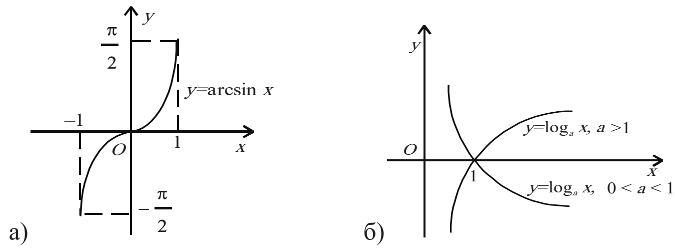

Рисунок 4.2. Графіки елементарних функцій

Елементарні функції

Основні з них:

1) степенева $y = x^{\alpha}$;

2) показникова $y = a^{x}$, $a > 0$, $a \neq 1$);

3) логарифмічна $y = \log_{a} x$, $a > 0$, $a \neq 1$; (Рис 4.2 б)

4) тригонометричні: $y = \cos x$; $y = \sin x$; $y = \mathrm{tg} x$; $y = \mathrm{ctg} x$;

5) обернені тригонометричні: $y = \arcsin x$; $y = \arccos x$;

$y = \mathrm{arctg} x$; $y = \mathrm{arcctg} x$. (Рис 4.2 а)

Приклад 9

Знайти область визначення функції $y = \dfrac{\ln(1+x)}{x-1}$.

Розв'язання

Функція визначена, якщо $x - 1 \neq 0$ та $1 + x > 0$. Таким чином, областю визначення функції є: $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

Приклад 10

Знайти область визначення функції

$y = \sqrt{1-2x} + 3\arcsin\dfrac{3x-1}{2}$.

Розв'язання

Перший доданок $\sqrt{1-2x}$ набуває дійсних значень при $1-2x \geq 0,$а другий – при $-1 \leq \frac{3x-1}{2} \leq 1.$ Розв'язавши здобуту систему нерівностей, знайдемо область визначення функції: $\left[-\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\right].$

Приклад 11

Визначити, яка із заданих функцій є парною чи непарною:

а) $y = x^2 \sqrt[3]{x} + 2\sin x$; б) $y = 2^x + 2^{-x}$; в) $y = x^2 + 5x.$

Розв'язання

а) Оскільки $f(-x) = (-x)^2 \sqrt[3]{-x} + 2\sin(-x) = \left(x^2 \sqrt[3]{x} + 2\sin x\right) = -f(x),$ то функція є непарною.

б) Оскільки $f(-x) = 2^{-x} + 2^{-(-x)} = 2^{-x} + 2^x = f(x)$, то функція парна.

в) Оскільки $f(-x) = (-x)^2 + 5(-x) = x^2 - 5x \neq \pm f(x),$ то функція не є ні парною, ні непарною.

Розглянемо застосування функцій в ряді прикладних задач:

Задача 1

Відстань від складського приміщення агрофірми, яке розташоване в п. *С* (Рис. 4.3), до районного центру *Р* дорівнює 50 км, а до автомагістралі *РМ*, що проходить через районний центр, – 30 км. Відомо, що перевезення автомагістраллю коштує вдвічі дешевше, ніж під'їзною дорогою. Під яким кутом *х* до автомагістралі слід побудувати під'їзну дорогу *СД*, щоб вартість перевезення вантажів між *Р* та *С* була найменшою.

Розв'язання

Складемо функцію $U = f(x)$, яка показує залежність вартості перевезень між *Р* та *С* від кута *х* (Рис. 4.3)

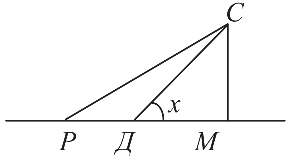

Рисунок 4.3

Очевидно, що перевезення будуть відбуватися по ламаній *СДР*. Нехай вартість перевезення вантажу на 1 км автомагістраллю (відрізок *РД*) дорівнює *p*, тоді за умовою задачі вартість такого ж перевезення під'їзною дорогою *ДС* становить *2p*. Тому загальна вартість перевезення вантажу між *Р* та *С,* тобто по всій ламаній *СДР* становитиме $U = 2p \cdot ДС + p \cdot РД$. Виразимо відстані *ДС* та *РД* через кут *x*. З прямокутного трикутника *ДСМ* знаходимо: $ДС = \dfrac{CM}{\sin x} = \dfrac{30}{\sin x}$; $ДМ = CM \cdot ctgx = 30 \cdot ctgx$. З прямокутного трикутника *РСМ* за теоремою Піфагора знаходимо:

$$PM = \sqrt{PC^2 - CM^2} = \sqrt{50^2 - 30^2} = \sqrt{1600} = 40$$

Очевидно, що $РД = 40 - 30 \cdot ctgx$

Підставивши знайдені відстані *ДС* та *РД* у вираз $U = 2p \cdot ДС + p \cdot РД$, дістанемо шукану функцію змінної *x*:

$$U = 2p \cdot \frac{30}{\sin x} + p \cdot (40 - 30 \cdot ctgx) \text{ або } U = \frac{60p}{\sin x} + 40p - 30p \cdot ctgx.$$

Очевидно, що точка *Д* може займати будь-яке положення на відрізку *PM.* Якщо вона співпаде з точкою *Р*, то $x = \angle CPM$. А якщо *Д* співпаде з точкою *М,* то $x = 90^0 = 0{,}5\pi$. З прямокутного трикутника *СРМ* знаходимо

$$\angle CPM = \arccos\frac{PM}{PC} = \arccos\frac{40}{50} = \arccos 0{,}8.$$

Отже, кут *x* може приймати будь-яке значення з відрізка $[\arccos 0{,}8;\ 0{,}5\pi]$.

Задача 2

Обчислити площу, оброблену агрегатом, що рухається по колу, за k обходів.

Розв'язання

З'ясовуємо, що ширина захвату агрегату – це ширина смуги, яка обробляється за один робочий прохід агрегату по полю. Нехай поле має форму прямокутника, довжина якого l м, ширина c м, а ширина робочого захвату агрегату b м. Після того, як комбайн зробить k обходів, розміри нескошеної частини ділянки будуть такі: $(l - 2bk)$ і $(c - 2bk)$.

Отже, площа скошеної частини

$$S = \frac{lc-(l-2bk)(c-2bk)}{10000}, \ S = \frac{2bk(l+c-2bk)}{10000}.$$

Одержана формула зручна для обчислення площі, обробленої агрегатом для довільних допустимих розмірів загінки та числа обходів. Наприклад, для значень $l = 1200$ м і $c = 200$ м комбайн "Енисей" ($b = 5$ м) може здійснити не більше 20 обходів, так як $k \le \frac{c}{2b}$. Наприклад, за 12 обходів він збере зернові з площі $S = \frac{2 \cdot 5 \cdot 12(1200 + 200 - 2 \cdot 5 \cdot 12)}{10000} = 15{,}36$ (га).

З останньої формули видно, що площа скошеної ділянки – квадратична функція від кількості k обходів комбайна.

Задача 3

Фермерське господарство сімейного типу одержало новий інвентар для обробітку ґрунту на суму 200 тис. грн. Яка буде вартість цього знаряддя через рік, через t років, якщо кожного року на амортизацію відраховується 10% вартості інвентарю попереднього року? Обчисліть, яка буде вартість інвентарю через 5 років.

Розв'язання

Амортизаційні відрахування є змінною величиною. Тому вартість інвентарю через рік становитиме 90 % його початкової вартості, тобто через рік вона становитиме $200000 \cdot 0{,}9$, через 2 роки – $200000 \cdot (0{,}9)^2$, через t років – $200000 \cdot (0{,}9)^t$. Отже, маємо залежність $A = 200000 \cdot (0{,}9)^t$, тобто математичною моделлю залежності вартості інвентарю від часу є показникова функція. Вартість інвентарю через 5 років становитиме $A = 200000 \cdot (0{,}9)^5 = 118098$ грн.

Задача 4

Відомо, що вантажна робота по вивезенню врожаю з прямокутного поля шириною a і довжиною bобчислюється заформулою $A = \frac{k}{24}(9a^2b + 6ab^2 - a^3)$. З усіх прямокутників заданої площі S необхідно вибрати такий, для якого вантажна робота A буде найменшою.

Розв'язання

Нехай x – ширина поля, де $0 < x \le \sqrt{S}$. Тоді його довжина $\frac{S}{x}$, а вантажна робота $A = \frac{k}{24}(9a^2b + 6ab^2 - a^3) = \frac{k}{24}(6\frac{S^2}{x} + 9Sx - x^3)$.

Необхідно знайти найменше значення функції $A(x)$ на проміжку $(0;\ \sqrt{S}\,]$.

Знайдемо похідну функції $A(x)$: $A'(x) = \frac{-k(x^2 - S)(x^2 - 2S)}{8x^2}$.

Так як $A'(x) < 0$ на інтервалі $(0;\ \sqrt{S})$, то функція $A(x)$ на проміжку $(0;\ \sqrt{S}\,]$ спадає. Тому вона досягає найменшого значення коли $x = \sqrt{S}$, тобто, коли прямокутник є квадратом.

4.1.2 Поняття числової послідовності та її границі

Числова функція $y = f(n)$, областю визначення якої є множина натурального ряду чисел, називається *числовою послідовністю*, або просто послідовністю, і позначається $y = x_n$, надалі писатимемо $x_n = f(n),\ n \in N$.

Значення $x_1 = f(1),\ x_2 = f(2),\ \ldots,\ x_n = f(n),\ \ldots$ називаються *членами послідовності*. Послідовність вважається заданою, якщо задано n-й член послідовності.

Приклад 12

Записати три перші члени послідовності $x_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

Розв'язання

Маємо, $x_1 = \frac{1}{2},\quad x_2 = \frac{3}{2^2},\quad x_3 = \frac{5}{2^3}$.

Приклад 13

За заданими трьома першими членами послідовності $x_1 = 1,\quad x_2 = -\frac{3}{5\sqrt{2}},\quad x_3 = \frac{5}{5^2\sqrt{3}}$ знайти формулу n-го члена.

Розв'язання

Задача розв'язується методом добору з подальшою перевіркою $x_n = \dfrac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{5^{n-1}\sqrt{n}}$.

Число a називається *границею послідовності* x_n, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$, яке б мале воно не було, існує номер N такий, що для всіх номерів $n > N$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$.

Позначення $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ або $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$.

Послідовність називається *збіжною*, якщо вона має границю (скінченну). Послідовність, яка не має границі, називається *розбіжною*.

Послідовність α_n називається *нескінченно малою величиною* (*н.м.в.*), якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Приклад 14

$\alpha_n = \dfrac{1}{n}$ – н.м.в., тому що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Послідовність x_n називається *нескінченно великою величиною* (н.в.в.), якщо для будь-якого числа $0 < M < +\infty$, яке б велике воно не було, існує номер N,такий, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n| > M$.

Якщо члени н.в.в., починаючи з деякого номера, всі додатні, то позначають $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$; якщо від'ємні, то – $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, а якщо різних знаків, то – $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Наприклад:

1) $x_n = \sqrt{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$;

2) $x_n = -n^2$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-n^2\right) = -\infty$;

3) $x_n = (-1)^n n, \quad \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n n = \infty.$

За своїм означенням, н.в.в. – необмежена, але не кожна необмежена величина є н.в.в., наприклад послідовність 1, 0, 3, 0, 5, 0, ... з членом $x_n = \frac{1}{2}\left(n + (-1)^{n+1} n\right)$–величина необмежена, але н.в.в. мати не буде, оскільки, не всі члени цієї послідовності, починаючи з деякого номера, будуть як завгодно великими.

***Теорема* 1. Зв'язок між н.в.в. і н.м.в.**

1. Якщо α_n– н.м.в. і $\alpha_n \neq 0$, то обернена до неї послідовність $y_n = \frac{1}{\alpha_n}$ буде н.в.в., і навпаки.

2. Якщо y_n– н.в.в., то обернена до неї $\alpha_n = \frac{1}{y_n}$ – н.м.в.

***Теорема* 2.** Якщо існують границі $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c \cdot y_n = c \lim\limits_{n\to\infty} y_n;$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$ при $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0.$

За допомогою теореми можна виконувати граничний перехід при арифметичних операціях з послідовностями, але тільки в тих випадках, коли послідовності збіжні.

Приклад 15

Знайти границю: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n^2}}$

Розв'язання

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{1-0}{2+0}=\frac{1}{2}.$$

Відповідь: 0,5

Приклад 16

Знайти границю: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+3n^2-5n+6}{6-2n+7n^2}$.

Розв'язання

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2-5n+6}{6-2n+7n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1+3/n-5/n^2+6/n^3\right)}{n^2\left(6/n^2-2/n+7\right)}=\infty.$$

Відповідь: ∞

Завдання для самостійного розв'язування

1. Задано функцію $f(x)=x^2+6x-4$. Перевірити, чи $f(1)=3$, $f(3)=24$.

Відповідь: так; ні.

2. $f(x)=x^2+1$. Обчислити значення:

а) $f(4)$. *Відповідь:* 17.

б) $f(\sqrt{2})$. *Відповідь:* 3.

в) $f(a+1)$. *Відповідь:* a^2+2a+2.

г) $f(a)+1$. *Відповідь:* a^2+2.

д) $f(a^2)$. *Відповідь:* a^4+1.

е) $(f(a))^2$. *Відповідь:* a^4+2a^2+1.

є) $f(2a)$. *Відповідь:* $4a^2+1$.

3. $f(x)=\lg x$; $\varphi(x)=x^3$. Записати вирази:

а) $f(\varphi(2))$. *Відповідь:* $3\lg 2$.

б) $f(\varphi(a))$. *Відповідь:* $3\lg a$.

в) $\varphi(f(a))$. *Відповідь:* $(\lg a)^3$.

4. Знайти області визначення функцій та побудувати їх графіки:

а) $y=\sqrt{4-x^2}$. *Відповідь:* $|x|\le 2$.

б) $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}$. *Відповідь:* $-1\le x\le 3$.

в) $y=1-\sqrt{2\cos 2x}$. *Відповідь:* $-\frac{\pi}{4}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{4}+k\pi$.

г) $y=4\Big/\left(1+\sqrt{x^2-4}\right)$. *Відповідь:* $|x|\ge 2$.

д) $y=\lg(3x-1)+2\lg(x+1)$. *Відповідь:* $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$.

5. Побудувати графіки функції:

а) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; б) $y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$;

в) $y=\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$; г) $y=\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{4}\right)$;

д) $y=x^3+1$; е) $y=4-x^3$;

є) $y=x^4$; ж) $y=x^5$;

з) $y=|x|$; и) $y=\log_2|x|$;

і) $y=\begin{cases}1+x & \text{при } -1\le x\le 0,\\ 1-2x & \text{при } 0\le x\le 1.\end{cases}$

й) $y=\begin{cases}x^3 & \text{при } x\le 1,\\ x & \text{при } x>1.\end{cases}$

6. Довести, що при $n\to\infty$ послідовність $3,\ 2\frac{1}{2},\ 2\frac{1}{3},\ 2\frac{1}{4},\ \dots,\ 2+\frac{1}{n},\ \dots$ має границею число 2.

7. Довести, що при $n\to\infty$ послідовність $\frac{7}{3},\ \frac{10}{5},\ \frac{13}{7},\ \dots,\ \frac{3n+4}{2n+1},\ \dots$ має границею число 1,5.

8. Знайти границі послідовностей:

а $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+6n+7}{2-n^2-3n^3}$. *Відповідь:* $-\frac{1}{3}$.

б $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}+n+1}{5n^3-\sqrt[4]{n}+3}$. *Відповідь:* 0.

в $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{2n^2}$. *Відповідь:* $\frac{1}{2}$.

г $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$. *Відповідь:* 3.

д $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-100n^2+1}{100n^2+15n}$. *Відповідь:* ∞.

е $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$. *Відповідь:* 1.

ж $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$. *Відповідь:* 4.

з $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3-2n^2+1}+\sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt[4]{n^6+6n^5+2}-\sqrt[5]{n^7+3n^3+1}}$. *Відповідь:* 1.

и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$. *Відповідь:* 0.

к $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$. *Відповідь:* 0.

л $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$. *Відповідь:* $\frac{4}{3}$.

4.2 Границя функції. Неперервність функції.

4.2.1 Поняття границі функції. Основні методи обчислення границь

Нехай функція $y=f(x)$ визначена у деякому околі точки $x=a$, за винятком, можливо, самої точки $x=a$.

Число b називається *границею функції* $f(x)$ *при* $x \to a$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, таке що при $|x-a| < \delta$ і $x \neq a$ виконується нерівність $|f(x)-b| < \varepsilon$.

Число b називається *границею функції* $f(x)$, *коли* $x \to \infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $M > 0$, таке що з нерівності $|x| > M$ випливає нерівність $|f(x)-b| < \varepsilon$.

Функція $f(x)$ називається *нескінченно великою величиною* (*н.в.в.*) при $x \to a$, якщо для будь-якого $M > 0$, яке б велике воно не було, існує число $\delta > 0$, таке що з нерівності $0 < |x-a| < \delta$ випливає $|f(x)| > M$.

Функція $f(x)$ називається *нескінченно малою величиною* (*н.м.в.*) при $x \to a$, якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Розглянемо односторонні границі для функції $y = f(x)$.

Односторонні границі функції

Якщо при $x \to a (x < a)$ функція має границю, то ця границя називається *лівосторонньою границею функції в точці* $x = a$.

Якщо при $x \to a$ $(x > a)$ функція має границю, то ця границя називається *правосторонньою границею* функції в точці $x = a$.

Теорема 3. Для існування $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{a+0} f(x) = b.$$

Приклад 17

Довести, що $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ не існує.

Розв'язання

Розглянемо односторонні границі:

а) ліворуч $\lim\limits_{x\to -0} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} = \left| \begin{matrix} x \to -0 \\ \dfrac{1}{x} \to -\infty \end{matrix} \right| = -\dfrac{\pi}{2};$

б) праворуч $\lim\limits_{x\to +0} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} = \left| \begin{matrix} x \to +0 \\ \dfrac{1}{x} \to +\infty \end{matrix} \right| = +\dfrac{\pi}{2}.$

Отже, $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ не існує, оскільки односторонні границі хоча й існують, але не рівні між собою.

Розкриття невизначеностей виду $\left[\dfrac{0}{0}\right], \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right], [\infty - \infty]$

1. Невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ *для раціональних функцій*

Теорема 4 (Безу). Остача від ділення многочлена $P_n(x)$ на двочлен типу $x - a$ дорівнює значенню многочлена при $x = a,$ тобто $P_n(a).$

Наслідок. Якщо число a– корінь многочлена $P_n(x),$ тобто $P_n(a) = 0,$ то многочлен $P_n(x)$ ділиться без остачі на двочлен $x - a.$

Приклад 18

Розкласти на множники $P_3(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 5.$

Оскільки $P_3(1) = 0 \Rightarrow x = 1$ – корінь $P_3(x) \Rightarrow P_3(x)$ ділиться без остачі на $x - 1$. Виконуючи ділення многочленів, дістаємо:

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 2x^2 + 6x - 5 & x - 1 \\ \cline{2-2}
-\underline{x^3 - x^2 \qquad\qquad} & x^2 - x - 5 \\
-x^2 + 6x \qquad & \\
-\underline{-x^2 + x \qquad} & \\
5x - 5 & \\
-\underline{5x - 5} & \\
0 &
\end{array}$$

Отже, $P_3(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 5 = (x - 1)\left(x^2 - x + 5\right).$

Розглянемо $\lim\limits_{x \to a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$, де $P_n(x)$, $Q_m(x)$– такі многочлени, що $P_n(a) = 0$, $Q_m(a) = 0$.

За наслідком з теореми Безу чисельник і знаменник діляться без остачі на $x - a$ при $x \neq a$. Отже, дістанемо:

$$\lim_{x \to a} \frac{P_n(a)}{Q_m(a)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)P_{n-1}(x)}{(x-a)Q_{m-1}(x)} = \lim_{x \to a} \frac{P_{n-1}(x)}{Q_{m-1}(x)}.$$

Степінь многочлена як в чисельнику, так і в знаменнику зменшився на одиницю. Якщо після виконання нового граничного переходу знову буде невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$, то повторюють попередні дії.

Приклад 19

Знайти границю функції: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 2x^2 + 6x - 5}{x^2 - 1}$.

Розв'язання

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 2x^2 + 6x - 5}{x^2 - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\left(x^2 - x + 5\right)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x + 5}{x+1} = \frac{1 - 1 + 5}{1 + 1} = \frac{5}{2}$$

Відповідь: 2,5

Невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$ для ірраціональних функцій

Для розв'язування прикладів у цьому випадку доцільно звільнитись від ірраціональності у чисельнику або знаменнику дробу. Для звільнення від радикалів використовуємо формули скороченого множення, заміну змінної та ін.

Приклад 20

Знайти границю функції: $\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x - 5}$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{x-1-4}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{1}{4}.$$

Відповідь: 0,25

<u>*Невизначеність* $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$:</u>

У цьому випадку чисельник і знаменник доцільно поділити на найбільший степінь змінної.

Приклад 21

Знайти границю функції: $\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{x}+x+1}{2\sqrt{x^3+x}-10x}$

Розв'язання

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{x}+x+1}{2\sqrt{x^3+x}-10x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x\sqrt{x}+x+1}{x\sqrt{x}}}{\dfrac{2\sqrt{x^3+x}-10x}{x\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}}{2\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{10}{\sqrt{x}}}=\frac{1}{2}.$$

Відповідь: 0,5.

<u>*Невизначеність* $[\infty-\infty]$</u>

Ця невизначеність зводиться до невизначеностей $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$; наприклад, зведенням виразу до спільного знаменника, множенням на спряжений вираз.

Приклад 22

Знайти границю функції: $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=[\infty-\infty]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=\frac{2}{1+1}=1.$$

Приклад 23

Знайти $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}$.

Розв'язання

Тут чисельник та знаменник дробу прямують до нуля при $x\to3$ (невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$). Оскільки $\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)}=\frac{x+3}{x}$ при $x\neq3$, то $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to3}\frac{x+3}{x}=2.$ Звідси $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=2.$

Відповідь: 2

Визначні границі

Перша визначна границя $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1}$

Границі — наслідки першої визначної границі:

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1.$

2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}=1.$

3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{\mathrm{tg}\,x}=1.$

4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}.$

Приклад 24

Знайти границю функції: $\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Відповідь: 0,5

Друга визначна границя $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

Границі — наслідки другої визначної границі:

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}=e^{ab}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

Приклад 25

Знайти границю функції: $\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}} = \left[1^{\infty}\right] = \lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{\sin 2x}{x\sin 2x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left((1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}}\right)^{\frac{\sin 2x}{x}} = \left|\begin{array}{l} (1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}} \xrightarrow[x\to 0]{} e \\ \frac{\sin 2x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 2 \end{array}\right| = e^{2}.$$

Відповідь: e^2

Приклад 26

Знайти границю функції: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x-1}$

Розв'язання

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x-1} = \left[\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^{2x-1} = \left[1^{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}\cdot\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\left(1+\frac{-2}{x}\right)^{2x}\left(1+\frac{3}{x}\right)} = \frac{e^{3\cdot 2}\cdot 1}{e^{-2\cdot 2}\cdot 1} = e^{10}.$$

4.2.2 Еквівалентні нескінченно малі величини

Нескінченно малі величини (н.м.в.) $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються н.м.в. одного порядку при $x\to a$, якщо $\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \text{const} \neq 0.$

Приклад 27

Н.м.в. $\alpha(x) = x$ та $\beta(x) = \sin 2x$ є н.м.в. *одного порядку* при $x\to 0$, тому що

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Н.м.в. $\alpha(x)$ називається н.м.в. *вищого порядку* порівняно з н.м.в. $\beta(x)$ при $x \to a$, якщо

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0.$$

Приклад 28

Н.м.в. $\alpha(x) = x^n \ (n > 1)$ є вищого порядку порівняно з н.м.в. $\beta(x) = x$ при $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^n}{x} = \lim_{x\to 0} x^{n-1} = 0.$$

Дві н.м.в. $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються *еквівалентними* при $x \to a$, якщо $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$

При дослідженні границь відношення н.м.в. доцільно замінювати еквівалентними функціями.

Таблиця еквівалентних нескінченно малих функцій

$\sin x \sim x,\ x \to 0;\ e^x - 1 \sim x,\ x \to 0;$

$tgx \sim x,\ x \to 0;\ \log_a(1+x) \sim x\log_a e,\ a \to 0;$

$\arcsin x \sim x,\ x \to 0;\ a^x - 1 \sim x\ln a,\ x \to 0;$

$arctgx \sim x,\ \ x \to 0;\ \lg(1+x) \sim x\lg e,\ \ x \to 0;$

$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2},\ x \to 0;\ (1+x)^k - 1 \sim kx,\ x \to 0,\ \ k > 0.$

Звідси випливає, наприклад, що при $x \to 0$ буде справедливо $e^{3x} - 1 \sim 3x$; $\sin 5x \sim 5x$ і т.п.

Приклад 29

Знайти $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 5x} - e^{\sin x}}{\ln(1+3x)}$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 5x}-e^{\sin x}}{\ln(1+3x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}\left(e^{\sin 5x-\sin x}-1\right)}{\ln(1+3x)}=$$

$$=\left|\begin{array}{l} x\to 0 \\ \ln(1+3x)\sim 3x; \\ e^{\sin 5x-\sin 5x}-1\sim \sin 5x-\sin x; \\ e^{\sin x}\to 1 \end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin x}{3x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x\cdot\cos 3x}{3x}=\left|\begin{array}{c} x\to 0 \\ \sin 2x\sim 2x \\ \cos 3x\to 1 \end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot 2x}{3x}=\frac{4}{3}.$$

Відповідь: 4/3

Приклад 30

Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x\sin x)}{\operatorname{tg}\left(x^2\right)}$.

Розв'язання

Замінимо чисельник та знаменник дробу еквівалентними н.м.в.: $\ln(1+3x\sin x)\sim 3x\sin x, \operatorname{tg}\left(x^2\right)\sim x^2$, тоді

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x\sin x)}{\operatorname{tg}\left(x^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\sin x}{x^2}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=3.$$

Відповідь: 3

4.2.3 Поняття неперервності функції

Функція $y=f(x)$ називається *неперервною в точці* $x=x_0$, якщо існують односторонні границі функції зліва й справа в цій точці, є рівними між собою та дорівнюють значенню функції у цій точці, тобто:

$$\left(\begin{array}{c} f(x)\text{ — неперервна} \\ \text{при } x=x_0 \end{array}\right):=\left(\lim_{x\to x_0-0}f(x)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)\right).$$

Функція називається *неперервною на проміжку*, якщо вона неперервна у кожній точці цього проміжку.

Приклад 31

Дослідити на неперервність функцію $y = \sin x$.

Розв'язання

Область визначення функції $y = \sin x \quad x \in R$

Візьмемо довільне $x_0 \in R$, надамо x_0 приросту Δx, тоді приріст функції Δy буде

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Розглянемо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta x \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\right) = 0.$$

При $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta x$ — н.м.в.; $\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \to 1$; $\cos\left(x_0 + \dfrac{\Delta x}{2}\right)$ — величина обмежена $\left(\left|\cos\left(\dfrac{\Delta x}{2} + x_0\right)\right| \le 1\right)$, отже, добуток $\Delta y = \Delta x \dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(\dfrac{\Delta x}{2} + x_0\right)$ є н.м.в.

Таким чином, з $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0$. Отже, функція $y = \sin x$ неперервна на всій області визначення.

Властивості неперервних функцій

Теорема 5. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні у точці $x = x_0$, то у цій точці будуть неперервними функції

$$f(x) \pm g(x),\ f(x) \cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)},\ \text{за умови, що } g(x_0) \ne 0.$$

Теорема 6. Якщо функція $y = F(u)$ — неперервна для $u \in U$, а функція $u = \varphi(x)$ — неперервна для $x \in X$ і значення функції $\varphi(x) \in U$, то функція $y = F(\varphi(x))$ — неперервна для $x \in X$.

Приклад 32

Дослідити функції $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ на неперервність.

Розв'язання

Оскільки $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, то функцію $y = \cos x$ можна вважати складеною функцією від $x \in R$ функцій: $y = \sin u$, $u = \frac{\pi}{2} - x$. Отже, за теоремою 2 функція $y = \cos x$ — неперервна від $x \in R$.

З теореми 1 випливає, що функція $y = \operatorname{tg} x$ — неперервна $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, а функція $y = \operatorname{ctg} x$ — неперервна $\forall x \in (\pi n, \pi + \pi n) n \in Z$, як відношення неперервних функцій $y = \sin x$ та $y = \cos x$.

Теорема 7 (Коші). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;\ b]$ і на його кінцях набуває значення різних знаків (наприклад $f(a) > 0$, $f(b) < 0$), тоді на інтервалі $(a;\ b)$ існує така точка $x = c$, що $f(c) = 0$.

Теорема 8 (Вейєрштрасса). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;\ b]$, то вона набуває на цьому проміжку своїх найбільших й найменших значень.

4.2.4 Класифікація точок розриву функцій

Функція $y = f(x)$ називається *розривною в точці* $x = x_0$, якщо порушується хоча б одна з умов рівності

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Розрізняють точки *розриву 1-го* і *2-го роду*.

Точка $x = x_0$ називається *точкою розриву 2-го роду* для функції $y = f(x)$, якщо в цій точці не існує хоча б одна з односторонніх границь.

Точка $x = x_0$ називається *точкою розриву 1-го роду* (розрив неусувний) для функції $y = f(x)$, якщо односторонні границі функції у цій точці існують, але не рівні між собою, тобто $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

Точка $x = x_0$ називається *точкою розриву 1-го роду* (розрив усувний) для функції $y = f(x)$, якщо односторонні границі функції в цій точці існують, рівні між собою, але не дорівнюють значенню функції в цій точці або функція у цій точці не існує, тобто

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0).$$

Приклад 33

Дослідити на неперервність функцію $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$.

Розв'язання

Область визначення цієї функції $D = (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$. На кожному з інтервалів області визначення функція буде неперервна. Обчислимо границі:

$$\lim_{x \to 1-0} y = \lim_{x \to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \left| \begin{array}{l} x \to 1-0 (x<1) \\ x-1 \to -0 \\ \dfrac{1}{x-1} \to -\infty \\ 2^{-\infty} \to \dfrac{1}{2^{+\infty}} \to +0 \end{array} \right| = +0;$$

$$\lim_{x \to 1+0} y = \lim_{x \to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \left| \begin{array}{l} x \to 1+0 (x>1) \\ x-1 \to +0 \\ \dfrac{1}{x-1} \to +\infty \\ 2^{\frac{1}{x-1}} \to +\infty \end{array} \right| = +\infty.$$

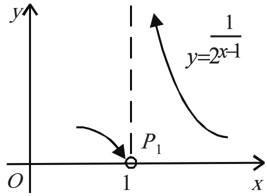

Рисунок 4.4 Точки розриву

Отже, $x = 1$ — точка розриву 2-го роду, бо одна з односторонніх границь не існує. Графік функції $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$ поблизу точки розриву показано на Рис. 4.4

Приклад 34

Дослідити на неперервність функцію $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2}$.

Розв'язання

Область визначення цієї функції $D(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$. На кожному з інтервалів області визначення функція буде неперервною. Обчислимо ліву та праву границі:

$$\lim_{x \to -0} y = \lim_{x \to -0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2} = \left| \begin{array}{c} x \to -0 \\ x^2 \to +0 \\ \dfrac{1}{x^2} \to +\infty \end{array} \right| = \frac{\pi}{2} - 0;$$

$$\lim_{x \to +0} y = \lim_{x \to +0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2} = \left| \begin{array}{c} x \to +0 \\ x^2 \to +0 \\ \dfrac{1}{x^2} \to +\infty \end{array} \right| = \frac{\pi}{2} - 0.$$

Отже, точка $x = 0$ є точкою розриву функції 1-го роду (розрив усувний). Оскільки односторонні границі існують і рівні між собою, а функція при $x = 0$ не існує

Приклад 35

Показати, що при $x = 4$ функція $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-4}$ має розрив.

Розв'язання

Якщо $x \to 4-0$, то $\frac{1}{x-4} \to -\infty$, $\lim\limits_{x\to 4-0} y = -\frac{\pi}{2}$. Якщо $x \to 4+0$, то $\frac{1}{x-4} \to +\infty$, $\lim\limits_{x\to 4+0} y = \frac{\pi}{2}$. Таким чином, при $x \to 4$ функція має ліву та праву скінченні границі, причому ці границі різні. Звідси, $x = 4$ є точкою розриву 1-го роду.

Приклад 36

Показати, що при $x = 5$ функція $y = \frac{x^2 - 25}{x-5}$ має розрив.

Розв'язання

У точці $x = 5$ функція має невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$. В інших точках дріб скорочується на $x–5$, оскільки $x-5 \neq 0$. Звідси, при $x \neq 5$ $y = x+5$. Односторонні границі рівні

$$\lim_{x\to 5-0} y = \lim_{x\to 5+0} y = 10.$$

Таким чином, при $x = 5$ функція має усувний розрив. Його можна усунути, якщо вважати, що при $x = 5$ $y = 10$.

Завдання для самостійного розв'язування

1. Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2-3}$. *Відповідь:*9.

2. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{1-x}$. *Відповідь:*$\infty$.

3. Знайти $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$. *Відповідь:*0.

4. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$. *Відповідь:*0.

5. Знайти $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$. *Відповідь:* $-\frac{2}{5}$.

6. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$. *Відповідь:* $\frac{1}{2}$.

7. Знайти $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$. *Відповідь:* 6.

8. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$. *Відповідь:* –2.

9. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^2}\right)$. *Відповідь:* –1.

10. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+2}{x^2-5x+4}+\dfrac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right)$. *Відповідь:* 0.

11. Знайти $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$. *Відповідь:* 0.

12. Знайти $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$. *Відповідь:* ∞.

13. Знайти $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x^2}{2x+1}-\dfrac{(2x-1)(3x^2+x+2)}{4x^2}\right)$. *Відповідь:* $-\frac{1}{2}$.

14. Знайти $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$. *Відповідь:* 1.

15. Знайти $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}$. *Відповідь:* $-\frac{1}{4}$.

16. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}$. *Відповідь:* $\frac{1}{2}$.

17. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$. *Відповідь:* 3.

18. Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}$. *Відповідь:* $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

19. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}$. *Відповідь:* $\frac{25}{9}$.

20. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}$. *Відповідь:* $\frac{1}{2}$.

21 Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-x}{\ln(x+1)}$. *Відповідь:* 2.

22. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$. *Відповідь:* $\frac{3}{4}$.

23. Знайти $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$. *Відповідь:* $-\frac{3}{2}$.

24. Знайти $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$. *Відповідь:* $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

25 Знайти $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}$. *Відповідь:* 2.

26Знайти $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(2x\operatorname{tg}x-\dfrac{\pi}{\cos x}\right)$. *Відповідь:* –2.

27. Знайти $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)^{x+1}$. *Відповідь:* e^{-1}.

28. Знайти $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x+7}\right)^{3x+2}$. *Відповідь:* e^{-2}.

29. Знайти $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$. *Відповідь:* e^2.

30. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\operatorname{cosec} x}$. *Відповідь:* e.

31. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$. *Відповідь:* $\sqrt{e}$.

32. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}$. *Відповідь:* 1.

33. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\ln^2(1+2x)}$. *Відповідь:* $\frac{9}{4}$

34. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}$. *Відповідь:* 1.

35. Знайти точки розриву функції $y=1/((x-1)(x-5))$.

Відповідь: $x=1,\ x=5$ — точки розриву 2-го роду.

36. Який характер розриву функції $y=1/\left(1-e^{1-x}\right)$ в точці $x=1$?

Відповідь: $x = 1$ — точка розриву 2-го роду.

37. Знайти точки розриву функції

$$y = \left(x^3 - 6x^2 + 11x - 6\right)/\left(x^2 - 3x + 2\right).$$

Відповідь: $x = 1$, $x = 2$ — точки усувного розриву.

38. Дослідити на неперервність функцію $y = \dfrac{1}{(x-1)(x-6)}$ на проміжку:

а) [2, 5]; б) [4, 10]; в) [0, 7].

*Відповідь:*а) функція неперервна; б) має одну точку розриву 2-го роду;

в) має дві точки розриву 2-го роду.

39. Дослідити на неперервність та побудувати графік функції

$$y = \begin{cases} 0{,}5x^2 \text{ при } |x| < 2, \\ 2{,}5 \text{ при } |x| = 2, \\ 3 \text{ при } |x| > 2. \end{cases}$$

Відповідь: $x = \pm 2$ — точки розриву 1-го роду (розрив неусувний).

40. Дослідити на неперервність та побудувати графік функції

$$y = \operatorname{arctg}\frac{a}{x-a}.$$

Відповідь: $x = a$ — точка розриву 1-го роду.

41. Дослідити на неперервність та побудувати графік функції

$$y = \frac{x^3 - x^2}{2|x-1|}.$$

Відповідь: $x = 1$ — точка розриву 1-го роду (розрив неусувний).

42. Дослідити на неперервність та побудувати графік функції

$$y = \begin{cases} x^2 + 1, \text{ якщо } x > 1, \\ x + 1, \text{ якщо } x < 1, \\ 3, \text{ якщо } x = 1. \end{cases}$$

Відповідь: $x = 1$ — точка розриву 1-го роду (розрив усувний).

Тести до розділу «Вступ до математичного аналізу»

1. Коли $x \to \infty$, тоді функція $\sin 3x^2$ є еквівалентною:

a) x;

b) $3x$;

c) $3x^2$;

d) x^2.

2. Границя функції $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+5x}{\sqrt{x}+2x}$ дорівнює:

a) ∞;

b) 0;

c) $\dfrac{5}{2}$;

d) $\dfrac{3}{2}$.

3. Границя функції $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$ дорівнює:

a) 2;

b) 1;

c) 4;

d) 8.

4. Формула першої визначної границі:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\cos x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Sinx}{x}$;

c) $\lim\limits_{x\to \ell}\dfrac{x}{tgx}$;

d) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{Sinx}{\pi x}$.

5. Границя функції $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{\sqrt{3n^2+1}}$ дорівнює:

a) 1;

b) 3;

c) $\frac{1}{3}$;

d) $\sqrt{3}$.

6. Границя функції $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$ дорівнює:

a) 3;

b) $\frac{3}{2}$;

c) 2;

d) 0.

7. Границя функції $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{Sin3x}$ дорівнює:

a) 3;

b) 0;

c) $-\frac{1}{3}$;

d) $\frac{1}{3}$.

8. Границя функції $\lim\limits_{x\to 0}\frac{Sin4x}{\sqrt{x+1}-1}$ дорівнює:

a) 2;

b) 4;

c) 6;

d) 8.

9. Функція $Sin\left(x-x^2\right)$, якщо $x\to 0$ буде:

a) нескінченно велика;

b) нескінченно мала;

c) константа;

d) еквівалентна x^2.

10. Границя функції $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}$ дорівнює:

a) $\frac{5}{2}$;

b) $-\frac{3}{2}$;

c) $-\frac{3}{4}$;

d) 2.

11. Границя функції $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{Sin5x}$ дорівнює:

a) 10;

b) 4;

c) 20;

d) $\frac{1}{20}$.

12. Границя функції $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-10^n}{1+10^{n+1}}$ дорівнює:

a) 1;

b) 10;

c) –10;

d) $-\frac{1}{10}$.

13. Границя функції $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x^2+2x}$ дорівнює:

a) 3;

b) 2;

c) $\frac{3}{2}$;

d) $-\frac{1}{2}$.

14. Якщо $x\to 0$, то функція $\sqrt{1+x^2}-1$ є нескінченно малою порядку малості відносно x;

a) першого;

b) другого;

c) третього;

d) четвертого.

15. Якщо $x \to 0$, то функція $\sqrt[3]{1+x}-1$ є еквівалентною:

a) x;

b) $3x$;

c) $\sqrt[3]{x}$;

d) $\frac{1}{3}x$

16. Границя функції $\lim\limits_{x\to 0}\frac{Sin5x^2}{Sin2x}$ дорівнює:

a) 0;

b) ∞;

c) $\frac{5}{2}$;

d) $\frac{2}{5}$.

17. Границя функції $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x}$ дорівнює:

a) 1;

b) 2;

c) 4;

d) 3.

18. Границя функції $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$ дорівнює:

a) 1;

b) 2;

c) $-\frac{1}{2}$;

d) $\frac{2}{3}$.

19. Границя функції $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ дорівнює:

a) 5;

b) –10;

c) 10;

d) $\frac{1}{5}$.

20. Границя функції $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^4 + x^3}{x^4 - 2x^3}$ дорівнює:

a) 1;

b) 2;

c) $-\frac{1}{2}$;

d) -1.

21. Границя функції $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ дорівнює:

a) 0;

b) 1;

c) 2;

d) 4.

22. Границя функції $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{-1 + \sqrt{x}}$ дорівнює:

a) 1;

b) 0;

c) ∞;

d) –1.

23. Границя функції $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3 + 9}}$ дорівнює:

a) 1;

b) 0;

c) $\frac{1}{9}$;

d) $\frac{1}{3}$.

24. Границя функції $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+1}{3x+7}$ дорівнює:

a) $\frac{1}{3}$;

b) 0;

c) ∞;

d) $\frac{1}{7}$.

25. Функція $y=2^{\frac{1}{x}}$, якщо $x\to+0$ є

a) нескінченно велика;

b) дорівнює 2;

c) дорівнює 0;

d) інша константа.

26. Границя функції $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$ дорівнює:

a) 1;

b) ∞;

c) 0;

d) –1.

27. Границя функції $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{Sinx}$ дорівнює:

a) 9;

b) 3;

c) 0;

d) –3.

28. Границя функції $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ell^{x}-\ell^{-x}}{Sinx}$ дорівнює:

a) 2;

b) 1;

c) 0;

d) –1.

29. Границя функції $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x - ark\sin x}{2x + arctgx}$ дорівнює:

a) 1;

b) 3;

c) $\frac{1}{3}$;

d) 0.

30. Границя функції $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\ell^{-x}}{Sinx}$ дорівнює:

a) 0;

b) 1;

c) –1;

d) 2.

РОЗДІЛ 5 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

5.1 Похідна функції

5.1.1 Означення похідної функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякому проміжку (*a*; *b*). Візьмемо значення $x \in (a;b)$ і надамо аргументу приросту Δx. Тоді функція набуде приросту $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ і позначається

$$y', \; y'_x, \; \frac{dy}{dx}, \; f'(x), \; \frac{df(x)}{dx}.$$

Похідноюфункції $y = f(x)$ *за аргументом* x називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Позначається $y', \; y'_x, \; \dfrac{dy}{dx}, \; f'(x), \; \dfrac{df(x)}{dx}$.

Операція знаходження похідної називається *диференціюванням* цієї функції.

Користуючись означенням похідної можна знайти похідні функцій.

Приклад 1

Функція $y = x^2$. Знайти похідну в точках $x = 3$ і $x = -4$.

Розв'язання

Надамо аргументу x приросту Δx, тоді функція набуде приросту

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2 + x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2 .$$

Складемо відношення приросту функції до приросту аргументу $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$, відшукаємо границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$. Таким чином, $f'(x) = 2x$.

Похідна в точці $x=3$ $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$, а похідна при $x=-4$ буде $f'(-4) = 2 \cdot (-4) = -8$.

Приклад 2

Знайти похідну функції $y = \sin x$.

Розв'язання

Користуючись відомою з тригонометрії формулою $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, знайдемо приріст функції у точці x і обчислимо границю: $\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Тобто $(\sin x)' = \cos x$.

Аналогічно можна дістати: $(\cos x)' = -\sin x$.

Приклад 3

Знайти похідну функції $y = e^x$.

Розв'язання

Для цієї функції маємо

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \cdot 1 = e^x$$

Тобто $\left(e^x\right)' = e^x$.

Задача 1

Радіус основи бункера з картоплею конічної форми дорівнює 5 м. Як зміниться вага картоплі в бункері, якщо його висота збільшиться на 1,5 м? (1 м^3 картоплі важить приблизно 4 ц).

Розв'язання

Позначимо висоту бункера через x, радіус основи через r, тоді об'єм бункера конічної форми має вигляд: $V = V(x) = \frac{1}{3}\pi r^2 x.$ За умовою задачі $r = 5$ м.

Отже, $V(x)=\frac{25}{3}\pi x$. Вага картоплі пропорційна об'єму, тобто $P=4V$ або $P(x)=\frac{100}{3}\pi x$. Знайдемо ΔP:

$\Delta P \approx dP = P'(x)dx = \frac{100}{3}\pi dx$, $dx \approx \Delta x = 1{,}5$ – за умовою задачі, тому

$$\Delta P = 1{,}5\cdot\frac{100}{3}\pi \approx 157 \text{ ц.}$$

Отже, вага картоплі зросте на 157 ц, коли висота бункера збільшиться на 1,5 м.

5.1.2 Геометричний зміст похідної

Кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y=f(x)$ в точці $M_0(x_0;\ f(x_0))$ або тангенс кута α, що утворює дотична до кривої в даній точці з додатним напрямом осі Ox, – це похідна $f'(x_0)$ в цій точці:

$$k = tg\alpha = f'(x_0). \tag{5.1}$$

Рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x)$ в точці $M_0(x_0;\ f(x_0))$ має вигляд

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0), \tag{5.2}$$

а рівняння нормалі до цієї ж кривої в точці $M_0(x_0;\ f(x_0))$:

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0). \tag{5.3}$$

Приклад 4

До кривої $y=-\frac{2}{x}$ проведено дотичну в точці з абсцисою $x_0=\sqrt{2}$. Знайти кут, який утворює дотична з додатнім напрямом осі Ox.

Розв'язання

З геометричного змісту похідної (5.1) випливає, що кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 дорівнює значенню похідної $f'(x_0)$, тобто, $k = f'(x_0)$

$f'(x) = -2\left(x^{-1}\right)' = 2/x^2$, тоді $k = f'\left(\sqrt{2}\right) = 1.$

Отже, $tg\alpha = 1$, звідки $\alpha = 45^0$.

5.1.3 Основні правила диференціювання

Теорема 1. Похідна сталої дорівнює нулю, тобто якщо $y = c$, де c = const, то $y' = 0$.

Теорема 2. Похідна алгебраїчної суми (різниці) скінченної кількості диференційовних функцій дорівнює алгебраїчній сумі (різниці) похідних цих функцій: $\left(u(x) \pm v(x)\right)' = u'(x) \pm v'(x)$.

Теорема 3. Похідна добутку двох диференційовних функцій дорівнює добутку першого множника на похідну другого плюс добуток другого множника на похідну першого:

$(uv)' = u'v + uv'$.

Теорема 4. Сталий множник можна виносити за знак похідної: $(cu)' = cu'$, де $\boldsymbol{c} = \mathbf{const}$.

Теорема 5. Якщо чисельник і знаменник дробу - диференційовні функції (знаменник не перетворюється в нуль), то похідна дробу також дорівнює дробу, чисельник якого є різницею добутків знаменника на похідну чисельника та чисельника на похідну знаменника, а знаменник є квадратом знаменника початкового дробу $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Приклад 5

Обчислити похідну для функції y = tg$x$.

Розв'язання

$$y' = (\mathrm{tg}x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Таким чином, $(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Теорема 6. Якщо $y = f(u)$ та $u = \varphi(x)$ — диференційовні функції від своїх аргументів, то похідна складної функції існує і дорівнює $y'_x = f'_u \cdot u'_x$.

Задача 2

Знайти оптимальний напрямок сили тяги причіпного плуга, вважаючи коефіцієнт тертя сталі об ґрунт $\mu = 0{,}5$.

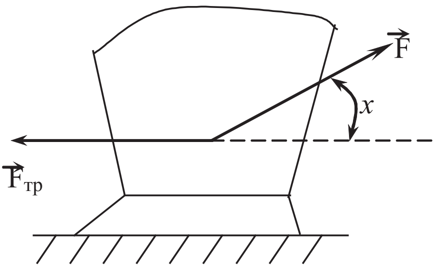

Рисунок 5.1

Розв'язання

Нехай до плуга прикладена сила тяги $\vec{F}$ (Рис. 5.1), яка утворює з горизонтальною площиною кут x. З курсу фізики відомо, що $|\vec{F}_{TP}| = \mu|\vec{N}|$, де $\vec{F}_{TP}$ – сила тертя, $\vec{N}$ – сила тиску плуга на ґрунт,

Сила $\vec{F}$ зрушує плуг, якщо модуль її горизонтальної складової буде більше $|\vec{F}_{TP}|$, тобто якщо буде виконуватися співвідношення $|\vec{F}|\cos x - \delta = \mu(|m\vec{g}| - |\vec{F}|\sin x)$, де $\delta > 0$. Звідси знаходимо, що $|\vec{F}| = \dfrac{\mu|m\vec{g}| + \delta}{\cos x + \mu\sin x}$ $(0 < x < \dfrac{\pi}{2})$. Модуль сили $\vec{F}$ буде найменшим при такому x з проміжка $(0;\ \pi/2)$, при якому функція $f(x) = \cos x + \mu\sin x$ набуде найбільшого значення. Знайдемо похідну функції $f(x)$:

$f'(x) = \cos x(\mu - tgx).$

Функція $f(x)$ досягає найбільшого, а $\left|\vec{F}\right|$ найменшого значення при $x_0 = arctg\mu = arctg\frac{1}{2} \approx 26^0 30'$.

Конструкція причепа тракторного плуга не дозволяє забезпечити оптимальний напрямок сили тяги під кутом $26^0 30'$, але на практиці рекомендується, по можливості, наближатися до цього напрямку.

Задача 3

Припустимо, що виробнича функція $y = -0{,}021x^2 + 0{,}945x + 49{,}84$ відображає залежність урожайності кукурудзи ц/га від кількості внесеного азотного добрива кг/га. Як змінюється врожайність кукурудзи від кількості внесених азотних добрив?

Розв'язання

Для визначення зміни врожайності кукурудзи від кількості внесених добрив знайдемо похідну виробничої функції, область визначення якої $[0; +\infty)$. Дістанемо: $y' = -0{,}042x + 0{,}945$. Критичні точки знайдемо з рівняння $y' = 0$: $x = 22{,}5$. Коли $x < 22{,}5$, то $y' > 0$; коли $x > 22{,}5$, то $y' < 0$. Отже, при внесенні азотного добрива в кількості, що не перевищує 22,5 кг/га, врожайність кукурудзи збільшується, подальше внесення добрив стає економічно невигідним.

5.1.4 Похідна неявної функції.

Нехай рівняння $F(x; y) = 0$ визначає y як неявну функцію від x. Надалі будем вважати, що ця функція — диференційовна. Продиференціювавши по x обидві частини рівняння $F(x; y) = 0$, дістанемо рівняння першого степеня відносно y', з цього рівняння знаходимо y', тобто похідну неявної функції.

Приклад 6

Знайти y'_x з рівняння $x^2 + y^2 = 4$.

Розв'язання

Оскільки y є функцією від x, то y^2 розглядатимемо як складну функцію від x, тобто $\left(y^2\right)' = 2y \cdot y'$.

Продиференціювавши по x обидві частини заданого рівняння, дістанемо $2x + 2yy' = 0$. Звідси $y' = -\dfrac{x}{y}$.

Теорема 7. Похідна x'_y оберненої функції $x = \varphi(y)$ по змінній y дорівнює оберненій величині похідної y'_x від прямої функції $y = f(x) : x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$.

Приклад 7

Обчислити похідну для функції $x = \arcsin y$.

Розв'язання

Задана функція обернена до функції $y = \sin x$. Отже, за теоремою 7 можна записати

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Звідси $(\arcsin y)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Якщо в останньому виразі замість y записати x, то дістанемо

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

5.1.5 Похідна параметрично заданої функції.

Нехай функцію y від x задано параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \Psi(t) \end{cases} \quad (t_1 \le t \le t_2)$$

На підставі теорем 6 та 7 маємо:

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = \Psi'_t(t)\Phi'_x(x)\ ,\ \Phi'_x(x) = \frac{1}{\varphi'_t(t)}.$$

Звідки

$$y'_x = \frac{\Psi'(t)}{\varphi'(t)} \text{ або } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (5.4)$$

Приклад 8

Функцію y від x задано параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = a \cdot \sin t \end{cases} (0 \leq t \leq \pi)$$

Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$: а) при будь-якому t; б) при $t = \frac{\pi}{4}$.

Розв'язання

За формулою 5.4, маємо:

а) $y'_x = \frac{(a\sin t)'}{(a\cos t)'} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\mathrm{ctg}t$;

б) $\left(y'_x\right)\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$.

Задача 4

Потрібно вирити силосну яму об'ємом 32 м^3 з квадратним дном таких розмірів, щоб на облицювання її дна і стін пішла найменша кількість матеріалу. Які повинні бути розміри ями?

Розв'язання

Визначимо суттєві фактори, що впливають на розв'язування задачі. Суттєвими факторами є розміри ями. Оговорено, що дно ями – квадрат, об'єм ями 32 м^3. Припускаємо, що форма ями – прямий паралелепіпед. Суттєвою є також вимога, щоб на облицювання дна і стін пішла найменша кількість матеріалу. Ця вимога означає, що сумарна площа бокової поверхні та основи повинна бути найменшою.

Сформулюємо тепер математичну задачу: визначити розміри паралелепіпеда, щоб сумарна площа бокової поверхні та нижньої грані була найменшою.

Нехай x – довжина сторони квадратного дна ями, тоді висоту ями H знайдемо із співвідношення $32 = x^2 H$, тобто $H = \frac{32}{x^2}$. Складемо сумарну функцію площі поверхні дна та стін силосної ями:

$$S(x) = x^2 + 4xH \text{ або } S(x) = x^2 + \frac{128}{x},\ x \neq 0.$$

Змінна xможе набувати лише додатніх значень, тому будемо шукати найменше значення $S(x)$ на додатній півосі. Знайдемо похідну функції $S(x)$. Дістанемо $S' = 2x - \frac{128}{x^2}$. Для находження критичних точок розв'яжемо рівняння $S' = 0$, тобто рівняння $2x - \frac{128}{x^2} = 0$. Звідки $2x^3 - 128 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 64$. Рівняння має один дійсний корінь $x = 4$, тоді $H = 2$.

Визначимо знак похідної поблизу точки $x = 4$. Маємо

$$S'(3) = 6 - 14{,}22 \approx -8{,}22 < 0,\ S'(5) = 10 - 5{,}12 = 4{,}88 > 0.$$

В точці $x = 4$ функція $S(x)$ має мінімум, він же і є найменшим значенням функції $S(4) = 16 + 32 = 48$. Ми не перевіряємо виконання достатніх умов екстремуму, оскільки за змістом задачі функція має один мінімум.

Отже, щоб на облицювання дна і стін силосної ями пішла найменша кількість матеріалу, її розміри мають бути, м: $4:4:2$.

Завдання для самостійного розв'язування

1. Використовуючи означення похідної, знайти похідні функцій:

1. $y = \sqrt[3]{x^2}$. *Відповідь:* $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

2. $y = 5\sin x + 3\cos x$. *Відповідь:* $y' = 5\cos x - 3\sin x$.

3. $y = 5(\mathrm{tg}x - x)$. *Відповідь:* $y' = 5\mathrm{tg}^2 x$.

4. $y = \frac{1}{e^x + 1}$. *Відповідь:* $y' = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$.

5. $y = 2^{x^2}$. *Відповідь:* $y' = 2^{x^2} \cdot 2x \cdot \ln 2$.

2. Застосовуючи формули та правила диференціювання, знайти похідні таких функцій:

1. $y = \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{4}{11}x^5\sqrt{x} + \frac{2}{15}x^7\sqrt{x}.$ *Відповідь:* $y' = x^2\sqrt{x}\left(1 - x^2\right)^2$.

2. $y = 3x^3 \cdot \ln x - x^3$. *Відповідь:* $y' = 9x^2 \cdot \ln x$.

3. $y = x \arccos\frac{x}{2} - \sqrt{4 - x^2}$. *Відповідь:* $y' = \arccos\frac{x}{2}$.

4. $y = \ln\sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$. *Відповідь:* $y' = \frac{1}{\cos x}$.

5. $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2(\sin x) + \ln\cos(\sin x)$. *Відповідь:* $y' = \operatorname{tg}^3(\sin x) \cdot \cos x$.

6. $y = 2x \cdot \operatorname{tg}2x + \ln\cos 2x - 2x^2$. *Відповідь:* $y' = 4x \cdot \operatorname{tg}^2 2x$.

7. $y = \operatorname{arctg}\frac{3x - x^2}{1 - 3x^2}$. *Відповідь:* $y' = \frac{3}{1 + x^2}$.

8. $y = e^x\sqrt{1 - e^{2x}} - \arcsin e^x$. *Відповідь:* $y' = -\frac{2e^{3x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$.

9. $y = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{x^2 - \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln x + 1}$. *Відповідь:* $\left(2x - \frac{1}{1 + x^2}\right)\frac{e^{x^2 - \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln x + 1}}{\sqrt{x}}$.

10. $y = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3\sin x}{8\cos^2 x} + \frac{3}{8}\ln\frac{1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}}$. *Відповідь:* $\frac{1}{\cos^5 x}$.

3. Знайти похідну y'_x від неявно заданих функцій:

1. $x\sin y + y\sin x = 0$. *Відповідь:* $y' = -\frac{y\cos x + \sin y}{x\cos y + \sin x}$.

2. $\frac{y}{x} + e^{y/x} - \sqrt[3]{\frac{y}{x}} = 0$. *Відповідь:* $y' = y / x$.

3. $x^{y^2} + y^2 \cdot \ln x - 4 = 0$. *Відповідь:* $y' = -\frac{y}{2x\ln x}$.

4. $y = \cos(x + y)$. *Відповідь:* $y' = \dfrac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$.

5. $y = 1 + xe^{y}$. *Відповідь:* $\dfrac{e^{y}}{2-y}$.

6. $y = x + \mathrm{arctg}y$. *Відповідь:* $\dfrac{1+y^2}{y^2}$.

4. Знайти похідну y'_x від параметрично заданих функцій:

1. $x = 1 - t^2$, $y = t - t^3$. *Відповідь:* $(3t^2 - 1)/(2t)$.

2. $x = \ln(1 + t^2)$, $y = t - \mathrm{arctg}t$. *Відповідь:* $\dfrac{t}{2}$.

3. $x = \dfrac{1+t^3}{t^2-1}$, $y = \dfrac{t}{t^2-1}$. *Відповідь:* $\dfrac{1+t^2}{t(2+3t-t^3)}$.

4. $x = e^{t}\sin t$, $y = e^{t}\cos t$. *Відповідь:* $\dfrac{1-\mathrm{tg}t}{1+\mathrm{tg}t}$.

5.2 Похідні вищих порядків. Диференціал функції.

5.2.1 Таблиця похідних

За аналогією з попередніми прикладами можна дістати похідні від основних елементарних функцій:

Таблиця похідних

1. $(x)' = 1$; 2. $(x^m)' = mx^{m-1}$;

3. $(e^x)' = e^x$; 4. $(a^x)' = a^x \ln a$;

5. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; 6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$;

7. $(\sin x)' = \cos x$; 8. $(\cos x)' = -\sin x$;

9. $(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; 10. $(\mathrm{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

11. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;   12. $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

13. $\left(\mathrm{arctg}x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;   14. $\left(\mathrm{arcctg}x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Приклад 9

Знайти похідну функції $y = 3x^2 - \sqrt[3]{x} + \ln x$.

Розв'язання

Дана функція є сумою функцій, тому за правилом суми, маємо

$$y' = \left(3x^2\right)' - \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + \left(\ln x\right)'.$$

Перший доданок є добуток сталої величини на степеневу функцію; другий — ірраціональна функція з показником; третій — логарифмічна функція з основою *e*. Остаточно маємо

$$y' = 3 \cdot 2x - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{x} = 6x - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x}.$$

Приклад 10

Знайти похідну функції $y = 6^{\arcsin\left(x^5-4\right)}$.

Розв'язання

Задана функція складна: зовнішня — показникова функція з основою 6, внутрішня є оберненою тригонометричною. Обернена тригонометрична, у свою чергу, є складною, для якої внутрішня функція $x^5 - 4$.

Таким чином, задана функція є суперпозицією трьох функцій.

При диференціюванні послідовно застосовуємо двічі теорему 6:

$$y = \left[6^{\arcsin\left(x^5-4\right)}\right]' \left[\arcsin\left(x^5 - 4\right)\right]' =$$
$$= \left[6^{\arcsin\left(x^5-4\right)}\right]' \left[\arcsin\left(x^5 - 4\right)\right]' \left[x^5 - 4\right]'.$$

Послідовно скористаємося відповідними формулами з таблиці подних:

$$y' = 6^{\arcsin\left(x^5-4\right)} \ln 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(x^5-4\right)^2}} \cdot 5x^4 .$$

Приклад 11

Знайти похідну функції $y = (\mathrm{tg}3x)^{\sin 4x}$.

Розв'язання

Задана функція є степенево-показниковою виду $y = (u(x))^{v(x)}$, де $u(x) = \mathrm{tg}3x, v(x) = \sin 4x$. Формула для знаходження похідної від степенево-показникової функції

$$y' = u^v \left(v' \ln u + \frac{u'}{u} v \right).$$

Скористаємось певним алгоритмом. Прологарифмуємо функцію за основою e:

$$\ln y = v \ln u .$$

Оскільки $\ln y$ і $\ln u$ — складні функції, після диференціювання обох частин дістанемо:

$$\frac{1}{y} y' = v' \ln u + \frac{1}{u} u' v .$$

Звідси $y' = y\left(v' \ln u + \dfrac{u'}{u} v \right) = u^v \left(v' \ln u + \dfrac{u'}{u} v \right).$

Формула для знаходження похідної від степенево-показникової функції має вигляд:

$$y' = u^v \left(v' \ln u + \frac{u'}{u} v \right).$$

У даному випадку дістанемо:

$$y' = (\mathrm{tg}3x)^{\sin 4x} \cdot \left(4\cos 4x \cdot \ln \mathrm{tg}3x + \frac{3\sin 4x}{\mathrm{tg}3x \cdot \cos^2 3x} \right).$$

Задача 5

Експериментально встановлено, що витрата бензину в літрах автомобілем залежить від швидкості його руху і визначається формулою $f(v)=3\cdot 10^{-3}v^2-3\cdot 10^{-1}v+18$, де v– швидкість автомобіля, км/год; $f(v)$ – витрата бензину на 100 км шляху, л. Визначити витрати бензинупри швидкості автомобіля 40 км/год і знайти найбільш економічну швидкість автомобіля.

Розв'язання

Визначимо витрати бензину при швидкості автомобіля 40 км/год:

$f(40)=3\cdot 10^{-3}\cdot 40^2-3\cdot 10^{-1}\cdot 40+18=10{,}8$(л)

Швидкість згорання палива знайдемо як похіднуфункції $f(v)=3\cdot 10^{-3}v^2-3\cdot 10^{-1}v+18$.

Маємо $f'(v)=-0{,}3+0{,}006v$; $f'(v)=0 \quad\Rightarrow\quad -0{,}3+0{,}006v=0 \Rightarrow \quad v=50$.

При $v<50$ $f'(v)<0$, а при $v>50$ $f'(v)>0$.

Таким чином, зміна швидкості по-різному впливає на витрату бензину. Якщо рух автомобіля прискорюється при малих швидкостях, що не перевищують 50 км/год, витрата бензину зменшується, а при великих – збільшується. Очевидно, для кожного автомобіля існує така швидкість, при якій витрата бензину мінімальна. Цю швидкість називають критичною. Для визначення критичної швидкості прирівнюють до 0 похідну $f'(v)$. Отже, найбільш економічно вигідна швидкість 50 км/год.

Задача 6 При якому відношенні глибини до ширини, канал прямокутного перерізу має гідравлічно найвигідніший профіль (Рис. 5.2)?

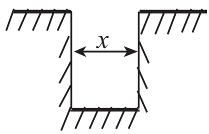

Рисунок 5.2

Розв'язання

Нехай x – ширина каналу, G – його живий переріз.

Тоді глибина каналу дорівнює $\dfrac{G}{x}$, а його змочений периметр

$P(x) = x + \dfrac{2G}{x}$. Потрібно знайти найменше значення функції $P(x)$ на $(0;\ \infty)$. Знайдемо похідну функції, маємо: $P'(x) = 1 - \dfrac{2G}{x^2}$. Так як $P'(\sqrt{2G}) = 0$ і $P'(x) < 0$ при $0 < x < \sqrt{2G}$; $P'(x) > 0$ при $x > \sqrt{2G}$, то функція $P(x)$ досягає найменшого значення в точці $x = \sqrt{2G}$. Отже, ширина каналу дорівнює $\sqrt{2G}$, глибина – $\dfrac{G}{\sqrt{2G}} = \sqrt{\dfrac{G}{2}}$, а шукане відношення дорівнює $\dfrac{1}{2}$.

5.2.2 Похідні вищих порядків

Похідна $y' = f'(x)$ від функції $y = f(x)$ називається *похідною першого порядку* і являє собою деяку іншу функцію. Тоді похідна від похідної $(y')'$ називається похідною *другого порядку від функції* $y = f(x)$ і позначається y'', $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. Аналогічно вводиться поняття похідної вищого порядку.

Приклад 12

Знайти похідну третього порядку для функції $y = \sin(5x + 4)$.

Розв'язання

$y' = 5\cos(5x + 4);\quad y'' = -25\sin(5x + 4);\quad y''' = -125\cos(5x + 4)$.

5.2.3 Диференціал функції

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна на деякому проміжку, тобто для будь-якої точки x з цього проміжку границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ існує і дорівнює скінченному числу.

Враховуючи взаємозв'язок змінної величини, що має скінченну границю, і нескінченної малої величини, можемо записати $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, де α — нескінченно мала величина ($\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$).

Помноживши всі члени останньої рівності на Δx, дістанемо

$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x$.

Отже, приріст функції Δy є сумою двох доданків, з яких перший доданок — *головна лінійна частина приросту*, другий доданок — добуток $\alpha\Delta x$, який є н.м.в. вищого порядку, ніж Δx.

Добуток $f'(x)\Delta x$ називається *диференціалом функції* $y = f(x)$; його позначають символом *dy,* тобто $dy = f'(x)\Delta x$

Знайдемо диференціал функції $y = x$; для цього випадку $y' = (x)' = 1$, отже, $dy = dx = \Delta x$. Таким чином, диференціал незалежної змінної збігається з її приростом Δx. Тому формулу для диференціала можна записати так: $dy = f'(x)dx$.

Приклад 13

Знайти диференціал *dy* функції $y = x^2$:

1) при довільних значеннях x та Δx;

2) при $x = 20$, $\Delta x = 0{,}1$.

Розв'язання

1) $dy = (x^2)'\Delta x = 2x\Delta x$;

2) якщо $x = 20$, $\Delta x = 0{,}1$, то $dy = 2\cdot 20\cdot 0{,}1 = 4$.

5.2.4 Застосування диференціала в наближених обчисленнях

Вираз Δy можна записати так: $\Delta y = dy + \alpha\Delta x$.

Якщо $f'(x) \neq 0$, то величина $\alpha\Delta x$ є малою вищого порядку порівняно з *dy*.

При малих Δx доданком $\alpha\Delta x$ нехтуємо і використовуємо наближену рівність $\Delta y \approx dy$, або $f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$, звідки $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$.

Остання наближена рівність тим точніша, чим менше Δx.

Приклад 14

Обчислити наближено $\sqrt{27}$.

Розв'язання

Перетворимо вираз, що стоїть під знаком кореня:

$27 = 25 + 2 = 25\left(1 + \frac{2}{25}\right)$, звідки $\sqrt{27} = \sqrt{25\left(1 + \frac{2}{25}\right)} = 5\sqrt{1 + \frac{2}{25}}$.

При обчисленні $\sqrt{1 + \frac{2}{25}}$ розглянемо функцію $f(x) = \sqrt{x}$, тоді $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

У нашому випадку формула запишеться так:

$\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x$, де $x = 1, \Delta x = \frac{2}{25}$.

Дістанемо: $\sqrt{1 + \frac{2}{25}} \approx \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}\frac{2}{25} = 1 + \frac{1}{25} = 1{,}04$.

Тоді $\sqrt{27} \approx 5 \cdot 1{,}04 = 5{,}2$.

Правила знаходження диференціала

1. $y = c;\ dy = 0;$

2. $y = uv,\ dy = udv + vdu$;

3. $y = u + v,\ dy = du + dv$;

4. $y = \frac{u}{v},\ dy = \frac{vdu - udv}{v^2}$.

Теорема 8. Форма диференціала не залежить від того, чи є аргумент незалежною змінною чи функцією.

Приклад 15.

Знайти диференціал функції $y = \mathrm{arctg}x$.

Маємо: $dy = (\mathrm{arctg}x)'\,dx = \frac{dx}{1 + x^2}$.

Приклад 16

Обчислити наближено значення $\arcsin 0{,}51$.

Розглянемо функцію $y = \arcsin x$. Візьмемо x=0,5, Δx =0,01 та, застосовуючи формулу $\arcsin\,(x + \Delta x) \approx \arcsin x + (\arcsin x)' \Delta x$, одержимо

$$\arcsin 0{,}51 \approx \arcsin 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}5)^2}} \cdot 0{,}01 = \frac{\pi}{6} + 0{,}011 = 0{,}513\,.$$

5.2.5 Правило Лопіталя

Розглянемо відношення $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, де функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ визначені й диференційовні в деякому околі точки *a.* Може бути, що при $x \to a$ обидві функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ прямують до 0 або до ∞. Тоді в точці *a* функція *f* (*x*) має невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Теорема 9 (правило Лопіталя). Границя відношення двох нескінченно малих або нескінченно великих функцій дорівнює границі відношення їхніх похідних), якщо останні існують, тобто

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)}\,. \tag{5.5}$$

Приклад 17

Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{2x}$.

Розв'язання

Виконавши граничний перехід, дістанемо невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Застосовуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin 7x)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{7\cos x}{2} = \frac{7}{2}\,.$$

Приклад 18

Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+1}{2x^3+7x+5}$.

Розв'язання

Виконання граничного переходу приводить до невизначеності виду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Застосовуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+1}{2x^2+7x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+3x+1\right)'}{\left(2x^3+7x+5\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{6x^2+7}=$$

Після граничного переходу знову маємо невизначеність виду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, а тому застосовуємо правило Лопіталя повторно:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)'}{\left(6x^2+7\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{12x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{6}\cdot 0=0\,.$$

Правило Лопіталя можна застосувати для розкриття інших видів невизначеностей, які зводяться до двох основних.

Приклад 19

Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3\ln x\right)$.

Розв'язання

Тут маємо невизначеність вигляду $[0\cdot\infty]$. Подамо добуток функцій у вигляді частки, а потім застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3\ln x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(x^{-3}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}x^3=0.$$

Завдання для самостійного розв'язування

1. Застосовуючи формули та правила диференціювання, знайти похідні таких функцій:

1. $y=2^{3x}/3^{2x}$. *Відповідь:* $y'=\left(\frac{8}{9}\right)^x\cdot\ln\frac{8}{9}$.

2. $y=\ln\left(3x^2+\sqrt{9x^4+1}\right)$. *Відповідь:* $y'=\frac{6x}{\sqrt{9x^4+1}}$.

3. $y=\ln\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}$. *Відповідь:* $y'=\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$.

4. $y=e^x\cdot 2^{5x}/3^{4x}$. *Відповідь:* $y'=\frac{e^x\cdot 2^{5x}}{3^{4x}}\cdot\ln\frac{32e}{81}$.

5. $y=\frac{x+1}{x}-e^{-\ln\frac{x}{x+1}}$. *Відповідь:* $y'=0$.

6. $y=\frac{x^x}{e^x}(x\ln x-x-1)$. *Відповідь:* $y'=x(\ln x-1)\cdot\frac{x^x}{e^x}\ln x$.

7. $y=\ln\left(e^x\cos x+e^{-x}\sin x\right)$. *Відповідь:* $\frac{(\cos x-\sin x)\left(e^x+e^{-x}\right)}{e^x\cos x+e^{-x}\sin x}$.

8. $y=e^x\sin x\cos^3 x$. *Відповідь:* $e^x\sin x\cos^3 x(1+\mathrm{ctg}x-3\mathrm{tg}x)$.

2. Знайти похідні другого порядку від функцій:

1. $y=-\frac{22}{x+5}$. *Відповідь:* $y''=-\frac{44}{(x+5)^3}$.

2. $y=\frac{1}{4}x^2(2\ln x-3)$. *Відповідь:* $y''=\ln x$.

3. $y=-\frac{1}{9}x\sin 3x-\frac{2}{27}\cos 3x$. *Відповідь:* $y''=x\cdot\sin 3x$.

4. $y=xe^{x^2}$. *Відповідь:* $2e^{x^2}\left(3x+2x^3\right)$.

5. $y=\left(1+x^2\right)\mathrm{arctg}x$. *Відповідь:* $\frac{2x}{1+x^2}+2\mathrm{arctg}x$.

6. $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$. *Відповідь:* $-\frac{x}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$.

3. Знайти похідні третього порядку від функцій:

1. $y=ax^2+bx+c$. *Відповідь:* $y'''=0$.

2. $y=\mathrm{tg}x$. *Відповідь:* $y'''=6\sec^4 x-4\sin^2 x$.

3. $y=\ln\sin x$. *Відповідь:* $y'''=2\mathrm{ctg}x\,\mathrm{cosec}^2 x$.

4. $y=\frac{x}{6(x+1)}$. *Відповідь:* $y'''=\frac{1}{(x+1)^4}$.

5. $y=(2x+3)^3\sqrt{2x+3}$. *Відповідь:* $y'''=105\sqrt{2x+3}$.

4. Знайти диференціали функцій:

1. $y=\frac{x}{2}\sqrt{49-x^2}+\frac{49}{2}\arcsin\frac{x}{7}$. *Відповідь:* $dy=\sqrt{49-x^2}\,dx$.

2. $y=\frac{1}{12}\ln\frac{x-6}{x+6}$. *Відповідь:* $dy=\frac{dx}{x^2-36}$.

3. $y=\operatorname{arctg}e^{2x}$. *Відповідь:* $dy=\frac{2e^{2x}dx}{1+e^{4x}}$.

4. $y=e^{\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x}\cdot\cos x$. *Відповідь:* $dy=e^{\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x}\cdot\sin x\operatorname{tg}^2 x\,dx$.

5. Знайти наближене значення:

1. Знайти наближене значення $\operatorname{arctg}1{,}05$.

*Відповідь:*0,811.

2. Знайти наближене значення об’єму кулі радіусом 2,01 м.

Відповідь 34,04 м^3.

3. Знайти наближене значення $\operatorname{tg}46^\circ$.

*Відповідь:*1,035.

4. Знайти наближене значення $\sqrt[4]{15{,}8}$.

*Відповідь:*1, 9938.

6. Знайти границі:

1. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$. *Відповідь:* $\frac{3}{5}$.

2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$. *Відповідь:*2.

3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\alpha x}-\cos\alpha x}{e^{\beta x}-\cos\beta x}$. *Відповідь:* $\frac{\alpha}{\beta}$.

4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$. *Відповідь:* $\frac{1}{3}$.

5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg}x}$. *Відповідь:* $-\frac{1}{2}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$. *Відповідь:*–2.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-в^x}{x\sqrt{1-x^2}}$. *Відповідь:* $\ln\dfrac{a}{в}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$. *Відповідь:*2.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg}x}-e^x}{\operatorname{tg}x-x}$. *Відповідь:*1.

10. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$. *Відповідь:*1.

11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^n e^{-x}\right)$. *Відповідь:*0.

12. $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot\operatorname{ctg}\pi x)$. *Відповідь:* $\dfrac{1}{\pi}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x\cdot\operatorname{ctg}x)$. *Відповідь:*1.

14. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot\operatorname{ctg}x$. *Відповідь:*0.

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right)$. *Відповідь:*1.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$. *Відповідь:* e^2.

17. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$. *Відповідь:* $-\dfrac{1}{2}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$. *Відповідь:* $\dfrac{2}{3}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2}$. *Відповідь:* e^{-6}.

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+2^x\right)^{1/x}$. *Відповідь:*2.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$. *Відповідь:* $e^{1/3}$

5.3 Застосування диференціального числення для дослідження функції

5.3.1 Зростання та спадання функцій

Функцію $f(x)$ називають *зростаючою (спадною)* в інтервалі $(a;\ b)$, якщо більшому значенню аргумента в цьому інтервалі відповідає більше (менше) значення функції, тобто якщо з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) > f(x_1)$, то функція $f(x)$ – *зростаюча,* а якщо $f(x_2) < f(x_1)$, то функція $f(x)$ – *спадна.*

Необхідна ознака зростання (спадання) функції.

Якщо диференційована функція *зростає (спадає)* на деякому інтервалі, то похідна цієї функції *невід'ємна (недодатна)* на цьому інтервалі.

Достатня ознака зростання і спадання функції.

Якщо похідна диференційованої функції *додатна* всередині деякого інтервалу, то функція *зростає* в цьому інтервалі.

Якщо похідна диференційованої функції *від'ємна* всередині деякого інтервалу, то функція *спадає* в цьому інтервалі.

Зростаюча або спадна функція називається *монотонною*. Інтервали, в яких задана функція зростає або спадає, називають інтервалами *монотонності* цієї функції.

Інтервали монотонності можуть відокремлюватись один від одного або точками, де похідна дорівнює нулю *(стаціонарними точками)*, або точками, де похідна не існує.

Точки, в яких похідна функції дорівнює нулю або не існує, називаються *критичними точками першого роду.*

Щоб знайти інтервали монотонності функції $f(x)$, потрібно:

1) знайти область визначення функції;

2) знайти похідну даної функції;

3) знайти критичні точки з рівняння $f'(x)=0$ та з умови, що $f'(x)$ не існує;

4) розділити критичними точками область визначення функції на інтервали і визначити у кожному з них знак похідної. На інтервалах, де похідна додатна, функція зростає, а де від'ємна – спадає.

Приклад 20

Знайти інтервали зростання та спадання функцій:

а) $y = x^3 - 3x + 4$; б) $y = 2x^2 - \ln x$.

Розв'язання

а)Функція існує при будь-якому значенні x. Знаходимо похідну функції:

$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x-1)\cdot(x+1).$$

Знаходимо критичні точки:

$$3(x-1)\cdot(x+1) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 1,\; x_2 = -1.$$

Інших критичних точок функція не має, оскільки похідна існує на всій області визначення.

Розбиваємо область визначення точками $x_1 = 1,\; x_2 = -1$ на інтервали і встановлюємо знак похідної на кожному з них.

Для цього досить визначити знак похідної функції в одній довільній точці кожного інтервалу.

На інтервалі $(-\infty;\,-1)$ похідна y' додатна. Отже, дана функція в цьому інтервалі зростає. В інтервалі $(-1;\,1)$ похідна від'ємна і функція спадає. На інтервалі $(1;\,+\infty)$ похідна y' додатна, а сама функція зростає.

б)Дана функція існує тільки при $x > 0$. Знаходимо похідну функції:

$$y' = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 1}{x} = \frac{(2x+1)\cdot(2x-1)}{x}.$$

Знаходимо критичні точки: $\frac{(2x+1)\cdot(2x-1)}{x}=0 \Rightarrow (2x+1)\cdot(2x-1)=0 \Rightarrow$ $x_1=-\frac{1}{2};\ x_2=\frac{1}{2}$. Крім того, критичною точкою є $x_3=0$ – похідна не існує. Але точки $x_1=-\frac{1}{2};\ x_3=0$ не належать області визначення функції.

Розбиваємо область визначення функції на два інтервали: $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$ та $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. В першому інтервалі похідна від’ємна, а в другому – додатна.

Отже, функція спадає в інтервалі $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$ і зростає в інтервалі $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

5.3.2 Екстремуми функцій

Функція $y=f(x)$ має *максимум (мінімум)* в точці $x=x_0$, якщо значення функції в цій точці більше (менше), ніж її значення у всіх інших точках деякого околу точки x_0. Точку x_0 в цьому випадку називають точкою максимуму (мінімуму).

Максимуми і мінімуми функції називають *екстремумами*, а точки, в яких є екстремум – екстремальними.

Необхідна умова існування екстремуму функції. Якщо диференційована функція $y=f(x)$ має екстремум в точці x_0, то її похідна в цій точці дорівнює нулю.

Достатні умови існування екстремуму функції:

– якщо функція $y=f(x)$ диференційована в околі критичної точки x_0 і її похідна зліва від цієї точки додатна, а справа від’ємна, то в точці x_0 функція має максимум;

– якщо похідна зліва від критичної точки x_0 від’ємна, а справа додатна, то в точці x_0 функція має мінімум;

– якщо похідна зліва і справа від критичної точки x_0 має однаковий знак, то в цій точці функція не має екстремуму.

Щоб знайти екстремуми функції $f(x)$, потрібно:

1) знайти область визначення функції;

2) знайти похідну функції $f'(x)$;

3) знайти критичні точки першого роду (корені рівняння $f'(x)=0$ та з умови, що $f'(x)$ не існує);

4) розділити критичними точками область визначення функції на інтервали і визначити у кожному з них знак похідної $f'(x)$;

5) встановити, чи має функція екстремум у знайдених точках і який саме (максимум чи мінімум);

6) обчислити значення функції в екстремальних точках.

Приклад 21

Дослідити на екстремум функцію

$f(x)=(x-2)^3(x+1)^2$.

Розв'язання

Область визначення функції $(-\infty;\ +\infty)$. Знаходимо похідну функції

$$f'(x)=3(x-2)^2(x+1)^2+2(x+1)(x-2)^3=$$
$$=(x-2)^2(x+1)(3x+3+2x-4)=(x-2)^2(x+1)(5x-1).$$

Розв'язуємо рівняння $f'(x)=0$. Маємо $(x-2)^2(x+1)(5x-1)=0$.

Знаходимо стаціонарні точки: $x_1=2,\ x_2=-1,\ x_3=\dfrac{1}{5}$.

Точок, в яких похідна не існує, немає. Отже, стаціонарні точки є єдиними критичними точками заданої функції.

Розглянемо інтервали

$(-\infty;\ -1),\ \left(-1;\ \dfrac{1}{5}\right),\ \left(\dfrac{1}{5};\ 2\right),\ (2;\ +\infty).$

Для визначення знака похідної обчислимо її в довільних точках, які належать даним інтервалам. Візьмемо, наприклад, з кожного інтервалу такі точки: $-2;\ 0;\ 1;\ 3$.

Тоді

$f'(-2) = 176 > 0,$

$f'(0) = -4 < 0,$

$f'(1) = 8 > 0,$

$f'(3) = 56 > 0.$

Отже, при переході через точку $x_2 = -1$ похідна змінює знак з плюса на мінус, у цій точці функція має максимум $f(-1) = 0$.

При переході через точку $x_3 = \frac{1}{5}$ похідна змінює знак з мінуса на плюс. У цій точці функція має мінімум $f\left(\frac{1}{5}\right) = -\frac{26244}{3125}.$

При переході через критичну точку $x_1 = 2$ похідна не змінює знак. Точка $x_1 = 2$ не є екстремальною для заданої функції.

5.3.3 Найбільше та найменше значення функції на відрізку

Функція, неперервна на відрізку $[a;\ b]$, досягає на цьому відрізку свого найбільшого та найменшого значення. Ці значення вона може досягнути всередині відрізка або на одному з його кінців.

Для знаходження найбільшого та найменшого значень функції $f(x)$ на $[a;\ b]$ потрібно:

1) знайти критичні точки функції, які належать інтервалу $(a;\ b)$;

2) обчислити значення функції у знайдених критичних точках, а також на кінцях відрізка, тобто $f(a)$ та $f(b)$, серед цих значень вибрати найбільше (найменше).

Приклад 22

Знайти найбільше та найменше значення функції $y = 2x^3 - 3x^2 + 2$ на відрізку $\left[-\frac{1}{3};\ 2\right]$.

Розв'язання

1. Знаходимо критичні точки, які належать відрізку $\left[-\frac{1}{3};\ 2\right]$:

$y' = 6x^2 - 6x = 6x(x-1);$

$6x(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\quad x_2 = 1.$

Усі знайдені критичні точки належать заданому відрізку. Обчислюємо значення функції в цих точках і на кінцях відрізка:

$$y(0) = 2,\quad y(1) = 1,\quad y(-1/3) = \frac{43}{27},\quad y(2) = 6.$$

Порівнюючи одержані результати, бачимо, що $y(1) = 1$ є найменше значення функції на заданому відрізку, а $y(2) = 6$ є найбільше значення функції на цьому ж відрізку.

2. Визначаємо значення функції на кінцях проміжку:

$$y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{8},\quad y(-3) = -15.$$

3. Таким чином, найбільшим значенням заданої функції на проміжку $\left[-3,\ \frac{3}{2}\right]$ є: $y_{\text{найб}} = y_{\max}(-1) = 5$, а найменшим — $y_{\text{найм}} = y(-3) = -15$.

5.3.4 Опуклість і угнутість кривої. Точки перегину

Крива на проміжку називається *опуклою* (*угнутою*), якщо всі точки кривої лежать нижче (вище) будь-якої її дотичної на цьому проміжку.

Точка, яка відокремлює опуклу частину кривої від угнутої, називається *точкою перегину*.

Приклад 23

Знайти інтервали опуклості та угнутості графіка функції $y = e^{-x^2}$.

Розв'язання

Маємо:

$$y' = -2xe^{-x^2},\ y'' = 4\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2}.$$

Друга похідна y'' перетворюється на нуль, коли

$x^2 - \frac{1}{2} = 0$, звідки $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

При переході через точки x_1 та x_2 друга похідна змінює знак. Таким чином, точки $M_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ і $M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ є точками перегину графіка функції.

Графік функції на інтервалах $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ і $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ угнутий, а на інтервалі $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ — опуклий.

Завдання для самостійного розв'язування

1. Показати, що функція $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ спадає на інтервалі (–2, 1).

2. Показати, що коли функція $y = \sqrt{2x - x^2}$ зростає на інтервалі (0, 1), то вона спадає на інтервалі (1, 2). Побудувати графік цієї функції.

3. Показати, що функція $y = \frac{x^2 - 1}{x}$ зростає на будь-якому інтервалі, до якого не входить точка $x = 0$.

4. Знайти інтервали монотонності функції $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$ та побудувати за точками її графік на інтервалі (–2, 4).

Відповідь: $(-\infty, -1)$ — зростає; $(-1, 3)$ — спадає; $(3, +\infty)$ — зростає.

5. Знайти інтервали монотонності функцій:

1. $y = x^4 - 2x^2 - 5.$

Відповідь: $(-\infty; -1) \cup (0; 1)$– спадає; $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$ - зростає

2. $y = (x-2)^5(2x+1)^4.$

Відповідь: . $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{11}{18}; +\infty\right)$– зростає; $\left(-\frac{1}{2}; \frac{11}{18}\right)$ - спадає

3. $y = \left(x^2 - 1\right)^{3/2}.$

Відповідь: При $x > 1$ зростає; при $x < -1$ спадає.

4. $y = xe^{-x}.$

Відповідь: При $x < 1$ зростає; при $x > 1$ спадає.

5. $y = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}.$

Відповідь: $(-1; 1)$– спадає; $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ - зростає

6. $y = \dfrac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}.$

Відповідь: . $(-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$– спадає; $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ - зростає

7. $y = x - e^x.$

Відповідь: $(-\infty, 0)$ — зростає; $(0, +\infty)$ — спадає.

8. $y = x^2 e^{-x}.$

Відповідь:. $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$– спадає; $(0; 2)$ - зростає

9. $y = \dfrac{x}{\ln x}.$

Відповідь:. $(0; 1) \cup (1; e)$– спадає; $(e; +\infty)$ - зростає

10. $y = 2x^2 - \ln x.$

Відповідь: $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ — спадає; $\left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$ — зростає.

11. $y = (x - 2\sin x) \quad (0 \le x \le 2\pi).$

Відповідь:. $\left(0; \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right)$– спадає; $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right)$ - зростає

12. $y = 2\sin x + \cos 2x \quad (0 \le x \le 2\pi)$.

Відповідь: . $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6};\frac{3\pi}{2}\right)$– спадає; $\left(0;\frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$ - зростає

13. $y = x + \cos x$.

*Відповідь:*монотонно зростає.

14. $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

*Відповідь:*монотонно зростає.

6. Знайти екстремуми функцій:

1. $y = 2x^3 - 3x^2$.

Відповідь: $y_{\max}(0) = 0,\ y_{\min}(1) = -1$.

2. $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$.

Відповідь: $y_{\max}(-1) = 17,\ y_{\min}(3) = -47$.

3. $y = \dfrac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$.

Відповідь: $y_{\max}(0) = 4,\ y_{\min}(-2) = \dfrac{8}{3}$.

4. $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 8}$.

Відповідь: $y_{\max}(0) = 2,\ y_{\min}(2) = \sqrt[3]{4}$.

5. $y = x^2\left(1 - x\sqrt{x}\right)$.

Відповідь: $y_{\min}(0) = 0,\ y_{\max}\left(2\sqrt[3]{2/49}\right) = \dfrac{12}{49}\sqrt[3]{\dfrac{4}{7}}$.

6. $y = \ln\left(x^2 + 1\right)$.

Відповідь: $y_{\min}(0) = 0$.

7. $y = (2x-1)\sqrt[3]{(x-3)^2}$.

Відповідь: $y_{\min}(3) = 0,\ y_{\max}(2) = 3$.

8. $y = \dfrac{2}{3}x^2\ \sqrt[3]{6x-7}$.

Відповідь: $y_{\max}(0)=0,\ \ y_{\min}(1)=-\dfrac{2}{3}.$

9. $y=\dfrac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}.$

Відповідь: $y_{\max}\left(\dfrac{12}{5}\right)=\dfrac{\sqrt{205}}{10}.$

10. $y=x-\ln(1+x).$

Відповідь: $y_{\min}(0)=0.$

11. $y=\left(x^2-2x\right)\ln x-\dfrac{3}{2}x^2+4x.$

Відповідь: $y_{\max}(1)=2{,}5;\ y_{\min}(e)=\dfrac{e(4-e)}{2}\approx 1{,}76.$

12. $y=\dfrac{1}{2}\left(x^2+1\right)\operatorname{arctg}x-\dfrac{\pi}{8}x^2-\dfrac{x-1}{2}.$

Відповідь: $y_{\max}(0)=\dfrac{1}{2};\ y_{\min}(1)=\dfrac{\pi}{8}.$

7. Знайти найменше та найбільше значення функції на зазначеному інтервалі:

1. $y=x^4-2x^3+3;\ \ [-3,\ 2].$ *Відповідь:* $y_{\text{найм}}=2,\ \ y_{\text{найб}}=66.$

2. $y=x^4-2x^2+5;\ \ [-2,\ 2].$ *Відповідь:* $y_{\text{найм}}=4,\ \ y_{\text{найб}}=13.$

3. $y=x+2\sqrt{x};\ \ [0,\ 4].$ *Відповідь:* $y_{\text{найм}}=0,\ \ y_{\text{найб}}=8.$

4. $y=x^5-5x^4+5x^3+1;\ \ [-1,\ 2].$ *Відповідь:* $y_{\text{найм}}=-10,\ \ y_{\text{найб}}=2.$

5. $y=x^3-3x^2+6x-2;\ \ [-1,\ 1].$ *Відповідь:* $y_{\text{найм}}=-12,\ \ y_{\text{найб}}=2.$

6. $y=\sqrt{100-x^2};\ \ [-6,\ 8].$ *Відповідь:* $y_{\text{найм}}=6,\ \ y_{\text{найб}}=10.$

7. $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2};\ \ [0,\ 1].$ *Відповідь:* $y_{\text{найм}}=\dfrac{3}{5},\ \ y_{\text{найб}}=1.$

8. $y=\sin 2x-x;\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right].$ *Відповідь:* $y_{\text{найм}}=-\dfrac{\pi}{2},\ \ y_{\text{найб}}=\dfrac{\pi}{2}.$

9. $y=\sqrt[3]{\left(x^2-2x\right)^2};\ [0,\ 3].$ *Відповідь:* $y_{\text{найм}}=0,\ \ y_{\text{найб}}=\sqrt[3]{9}.$

10. $y=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1-x}{1+x},\ [0,\ 1].$ *Відповідь:* $y_{\text{найм}}=0,\ \ y_{\text{найб}}=\dfrac{\pi}{4}.$

8. За допомогою другої похідної знайти екстремуми функцій:

1. $y = x^3 - 2ax^2 + a^2 x \quad (a > 0).$

Відповідь: $y_{\max}\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{4}{27}a^3,\ y_{\min}(a) = 0.$

2. $y = x + \frac{a^2}{x} \quad (a > 0).$

Відповідь: $y_{\max}(-a) = -2a,\ y_{\min}(a) = 2a.$

3. $y = x + \sqrt{1 - x}.$

Відповідь: $y_{\max}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4}.$

4. $y = x + \sqrt{2 - x^2}.$

Відповідь: $y_{\max}(1) = 1,\ y_{\min}(-1) = -1.$

5. $y = \frac{x}{\ln x}.$

Відповідь: $y_{\min}(e) = e.$

9. З'ясувати, опукла чи угнута крива $y = x^5 - 5x^3 - 15x^2 + 30$ в околі точок $P_1(1, 11)$ та $P_2(3, 3)$.

Відповідь: опукла в околі точки P_1, угнута в околі точки P_2.

10. З'ясувати, опукла чи угнута крива $y = \operatorname{arctg} x$ в околі точок $P_1\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ та $P_2\left(-1, -\frac{\pi}{4}\right)$.

Відповідь: опукла в околі точки P_1, угнута в околі точки P_2.

11. Показати, що графік функції $y = x \operatorname{arctg} x$ скрізь угнутий.

12. Показати, що графік функції $y = \ln(x^2 - 1)$ скрізь опуклий.

13. Знайти точки перегину кривих:

1. $y = (x-4)^5 + 4x + 4$.

Відповідь: P (4; 20).

2. $y=(x-1)\sqrt[7]{(x-1)^6}$.

Відповідь: P (1; 0).

3. $y=x^4-8x^3+24x^2$.

*Відповідь:*Крива точок перегину не має.

14. Знайти точки перегину, інтервали угнутості та опуклості графіків функцій.

1. $y=x^3-5x^2+3x-5$.

*Відповідь:*Точка перегину $\left(\frac{5}{3}, -\frac{250}{27}\right)$.

Інтервали: опуклості — $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$, угнутості — $\left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$.

2. $y=(x+1)^4+e^x$.

*Відповідь:*Точок перегину не існує, графік функції угнутий.

3. $y=x+36x^2-2x^3-x^4$.

*Відповідь:*Точки перегину (– 3,294) та (2,114).

Інтервали: опуклості — $(-\infty, -3)$, угнутості — $(-3, 2)$, опуклості — $(2, +\infty)$.

4. $y=3x^5-5x^4+3x-2$.

*Відповідь:*Точка перегину (1, –1).

Інтервали: опуклості — $(-\infty, 1)$, угнутості — $(1, +\infty)$.

5. $y=e^{\sin x}\left(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$.

*Відповідь:*Точка перегину $\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}, e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$.

Інтервали: угнутості — $\left(-\frac{\pi}{2}, \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, опуклості — $\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

6. $y=\ln(1+x^2)$.

*Відповідь:*Точки перегину $(\pm 1, \ln 2)$.

Інтервали: опуклості — $(-\infty, -1)$, угнутості — $(-1, 1)$, опуклості — $(1, +\infty)$.

5.4 Дослідження функції та побудова її графіка

5.4.1 Асимптоти

Пряма називається *асимптотою кривої*, якщо відстань d від точки M кривої до цієї прямої при віддаленні точки M у нескінченність прямує до нуля. Асимптоти бувають *вертикальнимиі* й *похилими*.

Вертикальні асимптоти

Якщо $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$ або $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$, або $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то пряма $x=a$ є вертикальною асимптотою для графіка функції $y=f(x)$.

Приклад 24

Крива $y=\dfrac{2}{x-5}$ має вертикальну асимптоту $x=5$, оскільки $\lim\limits_{x\to 5\pm 0} y=\pm\infty$.

Похилі асимптоти

Нехай крива $y=f(x)$ має похилу асимптоту $y=kx+b$, тоді

$$\left.\begin{aligned} k &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \\ b &= \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right) \end{aligned}\right\}$$

Якщо хоча б одна з границь не існує, то крива похилих асимптот у відповідній півплощині не має.

Приклад 25

Визначити асимптоти кривої $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x}$.

Розв'язання

Оскільки $\lim\limits_{x\to\pm 0} y=\lim\limits_{x\to\pm 0}\dfrac{x^2+2x-1}{x}=\lim\limits_{x\to\pm 0}\left(x+2-\dfrac{1}{x}\right)=\mp\infty$,

то пряма $x=0$ (вісь Ox) є вертикальною асимптотою.

Нехай похила асимптота описується рівнянням $y=kx+b$, тоді

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=2.$$

Отже, пряма $y=x+2$ — похила асимптота для графіка функції.

5.4.2 Дослідження функції та побудова її графіка

План дослідження функцій і побудови їхніх графіків

При дослідженні функцій потрібно:

1. Знайти область визначення функції.
2. Встановити парність (непарність) та періодичність функції.
3. Знайти точки розриву функції та їх характер.
4. Визначити точки перетину графіка функції з осями координат.
5. Знайти точки екстремуму та обчислити значення функції у цих точках.
6. Визначити інтервали зростання й спадання функції.
7. Знайти точки перегину, інтервали випуклості та угнутості.
8. Знайти асимптоти.
9. Знайти граничні значення функції, коли x прямує до граничних точок області визначення.
10. На основі проведеного дослідження побудувати графік.

Приклад 26

Дослідити функцію $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ і побудувати її графік.

Розв'язання

1. Знаходимо область визначення функції. Функція існує при всіх значеннях x за винятком значення x=1. Звідси її область визначення $\{-\infty<x<1;\ 1<x<+\infty\}$.

2. Точка x = 1 є точкою розриву функції. Дослідимо її характер:

$$\lim_{x\to1\pm0}y=\lim_{x\to1\pm0}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to1\pm0}(x-1)^2}=+\infty.$$

Як ліворуч, так і праворуч точки $x = 1$ маємо нескінченний розрив.

Точка $x = 1$ — точка розриву другого роду.

3. Вертикальні асимптоти. Пряма $x = 1$ є вертикальною асимптотою.

4. Знаходимо точки перетину графіка функції з осями координат:

з віссю Ox: $y = 0,\ \dfrac{2x-1}{(x-1)^2} = 0,\ 2x-1=0,\ x=\dfrac{1}{2},\ \left(\dfrac{1}{2};\ 0\right);$

з віссю Oy: $x = 0,\ y = \dfrac{-1}{1} = -1,\ (0;\ -1)$.

5. Знаходимо точки екстремуму та інтервали зростання і спадання функції:

$$y' = \frac{2(x-1)^2 - 2(x-1)(2x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{2x}{(x-1)^3};\ y' = 0 \Rightarrow$$

$-2x = 0 \Rightarrow x = 0$ — критична точка.

При $x=1$ y' не існує, але у цій точці сама функція теж не існує. Дослідимо критичну точку $x = 0$ на екстремум:

при $x=-1$ $y' = \dfrac{2}{-8} = -\dfrac{1}{4} < 0(-)$;

при $x = \dfrac{1}{2}$ $y' = \dfrac{-1}{-1/8} = 8 > 0(+)$.

Проходячи через критичну точку зліва направо, похідна змінює знак з «–» на «+», через це в точці $x = 0$ функція має мінімум:

$$y_{\min} = \frac{-1}{1} = -1.$$

У точці $x = 1$ функція не визначена. При $1 < x < +\infty$ $y'(x) < 0$,

отже, функція на цьому інтервалі спадає.

6. Точки перегину та інтервали опуклості та угнутості графіка функції знаходимо за допомогою другої похідної:

$$y'' = \frac{-2(x-1)^3 + 6x(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4};\ y'' = 0 \Rightarrow$$

$2(2x+1)=0 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$; при x=1 y'' не існує, але в цій точці не існує і сама функція.

Дослідимо точку $x=-\dfrac{1}{2}$:

при $x=-1$ $y''=\dfrac{2(-2+1)}{(-2)^4}=-\dfrac{1}{8}<0(-)$;

при $x=0$ $y''=\dfrac{2}{1}=2>0(+)$.

Друга похідна, проходячи через $x=-\dfrac{1}{2}$, змінює знак, отже, точка перетину кривої з цією абсцисою є точкою перегину.

Знайдемо її ординату:

$$y=\frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)-1}{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2}=-\frac{8}{9}\approx-0{,}9 .$$

Таким чином, точка $\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{8}{9}\right)$ — точка перегину.

У точці x = 1 функція не визначена. При $1<x<+\infty$ $y''>0$.

Отже, графік функції угнутий.

7. Рівняння похилої асимптоти знаходимо у вигляді $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x(x-1)^2}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=0.$$

Таким чином, похилою асимптотою є y = 0 (вісь Ox).

На підставі результатів дослідження будуємо графік функції (Рис. 5.3). Для точнішої побудови візьмемо додатково точки: (–5; – 0,3), $\left(\frac{2}{3},\ 3\right)$, (2; 3), (3; 1,3).

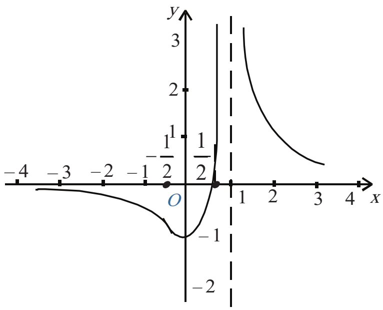

Рисунок 5.3 Графік функції $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$

Завдання для самостійного розв’язування

1. Знайти асимптоти кривих:

1. $y=\dfrac{1}{x^2-4x+5}$. *Відповідь:* $y = 0$.

2. $y=2x-\dfrac{\cos x}{x}$. *Відповідь:* $x = 0$; $y = 2x$.

3. $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}-3x$. *Відповідь:* $x = 0$; $y = -3x$.

4. $y=\dfrac{1}{2}x+\operatorname{arctg}x$. *Відповідь:* $y=\dfrac{1}{2}x+\pi$; $y=\dfrac{1}{2}x$.

5. $y=x\ \ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$. *Відповідь:* $x=-\dfrac{1}{e}$, $y=x+\dfrac{1}{e}$.

2. Дослідити функції та побудувати їх графіки:

1. $y=\dfrac{x}{1+x^2}$.

Відповідь: область визначення $(-\infty<x<+\infty)$. Графік симетричний відносно початку координат. $y_{\max}(1)=\dfrac{1}{2}$, $y_{\min}(-1)=-\dfrac{1}{2}$. Точки перегину $\left(-\sqrt{3},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0,\ 0)$, $\left(\sqrt{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$. Асимптота $y = 0$.

2. $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$.

Відповідь: не визначена при $x=\pm 1$. Графік симетричний відносно осі ординат. $y_{\max}(0)=0$. При $x<-1$ зростає, при $x>1$ спадає. Графік не має точок перегину. Асимптоти $x=\pm 1,\ y=1$.

3. $y=\left(x^2-1\right)^3$.

Відповідь: область визначення $(-\infty,+\infty)$. Графік симетричний відносно осі ординат. $y_{\min}(0)=-1;\ (1,0),\ (-1,0),\ \left(\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2},-\dfrac{64}{125}\right)$ — точки перегину. Асимптот немає.

4. $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$.

*Відповідь: а*симптоти $x=\pm 2,\ y=x$. Функція непарна. Графік проходить через початок координат. На інтервалі (– 2; 2) функція монотонно спадає. Екстремуми: $y_{\min}\left(2\sqrt{3}\right)=3\sqrt{3},\ y_{\max}\left(-2\sqrt{3}\right)=-3\sqrt{3}$, точка перегину (0; 0). На інтервалах $(-\infty,-2)$ та (0, 2) графік функції опуклий, на інтервалах (–2, 0) та $(2,+\infty)$ — угнутий.

5. $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Відповідь: $y_{\max}\left(e^2\right)=\dfrac{2}{e}$. Асимптота $y=0$.

6. $y=16x(x-1)^3$.

Відповідь: $y_{\min}\left(\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{27}{16},\ \ y_{\text{т.пер}}.(1)=0,\ \ y_{\text{т.пер}}\left(\dfrac{1}{2}\right)=-1$. Асимптот немає.

7. $y=\dfrac{1}{x}+4x^2$.

Відповідь: визначена скрізь, крім $x=0$. $y_{\min}\left(\dfrac{1}{2}\right)=3$.

Точка перегину $\left(-\frac{\sqrt[3]{2}}{2},\ 0\right)$; асимптота $x = 0$.

8. $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$.

Відповідь: визначена скрізь, крім $x = \pm\sqrt{3}$. Функція непарна. $y_{\max}(3) = -4{,}5$; $y_{\min}(-3) = 4{,}5$. Точка перегину $(0,\ 0)$. Асимптоти: $x = \pm\sqrt{3}$ та $x + y = 0$.

9. $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

Відповідь: визначена скрізь, крім $x = -1$. $y_{\min}(-3) = -3\frac{3}{8}$. Точка перегину $(0,\ 0)$.

Асимптоти: $x = -1$ та $y = \frac{1}{2}x - 1$.

10. $y = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 7x - 3}{2x^2}$.

Відповідь: визначена скрізь, крім $x = 0$. $y_{\max}(1) = \frac{7}{2}$, $y_{\max}(-3) = -\frac{11}{6}$, $y_{\min}(2) = \frac{27}{8}$.

Абсциса точки перегину графіка функції $x = \frac{9}{7}$. Асимптоти: $x = 0$ та $y = \frac{1}{2}x + 1$.

11. $y = x^2 e^{-x}$.

Відповідь: область визначення $(-\infty,\ +\infty)$. $y_{\max}(2) = \frac{4}{e^2}$, $y_{\min}(0) = 0$. Абсциса точки перегину графіка функції $x = 2 \pm \sqrt{2}$. Асимптота $y = 0$.

12. $y = x - \ln(x+1)$.

Відповідь: область визначення $(-1,\ +\infty)$. $y_{\min}(0) = 0$. Графік не має точок перегину. Асимптота $x = -1$.

Тести до розділу «Диференціальне числення»

1. Похідна другого порядку функції $y = 2x^3$ дорівнює:

a) 12x

b) $12x^2$

c) $6x^2$

d) x^3

2. Похідна функції $y = arctg^2 x$ в точці $x = 0$ дорівнює:

a) -1

b) 0

c) 1

d) 2

3. Диференціал функції $y = \arcsin 3x$ дорівнює:

a) $3 \arccos x dx$

b) $\frac{3dx}{\sqrt{1-(3x)^2}}$

c) $3 \arcsin x dx$

d) $\frac{\Delta x}{\sqrt{1-x^2}}$

4. Похідна функції $y = \cos^3 x$ дорівнює:

a) $-3cos^2 x \cdot \sin x$

b) $3sin^2 x \cdot cosx$

c) $\frac{\cos^4 x}{4}$

d) $\frac{\cos^2 x}{3}$

5. Похідна функції $y = tgx$ в точці $x = \frac{\pi}{4}$ дорівнює:

a) 2

b) 1/2

c) 1

d) 0

6. Похідна другого порядку функції $y = e^{-3x}$ дорівнює:

a) $9e^{-3x}$

b) $-9e^{-3x}$

c) $-3e^{-3x}$

d) $\dfrac{e^{-3x}}{9}$.

7. Диференціал функції $y = \sin^2 x$ дорівнює:

a) $2\sin x dx$

b) $2\sin x \cdot \cos x\, dx$

c) $2\cos x\, \Delta x$

d) $\dfrac{\sin^3 x}{3} dx$

8. Похідна функції $y = ctg(4x+1)$ дорівнює:

a) $\dfrac{-4}{\sin^2(4x+1)}$

b) $\dfrac{-4}{\cos^2(4x+1)}$

c) $\dfrac{1}{\sin^2(4x+1)}$

d) $\dfrac{-4}{\sin^2(x+1)}$

9. Похідна функції $y = \cos(\ln x)$ дорівнює:

a) $\dfrac{\cos^2(\ln x)}{2}$

b) $-\dfrac{\sin(\ln x)}{x}$

c) $\sin(\ln x)$

d) $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

10. Похідна функції $y = ctgx$ в точці $x = \dfrac{\pi}{4}$ дорівнює:

a) 2

b) -2

c) 1

d) -1

11. Похідна другого порядку функції $y = 2x^4 + 3x$ дорівнює:

a) 24x

b) $24x^2$

c) $24x^2+3$

d) $8x^3+3$

12. Диференціал функції $y = \sin^5 4x$ дорівнює:

a) $5 \sin x dx$

b) $5\sin^4 4x \cdot \cos 4x dx$

c) $5 \cos 4x\Delta x$

d) $20\sin^4 4x \cdot \cos 4x$

13. Похідна функції $y = tg(4x+1)$ дорівнює:

a) $-\frac{4}{\sin^2(4x+1)}$

b) $-\frac{4}{\cos^2(4x+1)}$

c) $\frac{1}{\sin^2(4x+1)}$

d) $\frac{4}{\cos^2(x+1)}$.

14. Похідна функції $y = \sin x$ в точці $x = \frac{\pi}{2}$ дорівнює:

a) 1

b) 0

c) -1

d) 2

15. Похідна другого порядку функції $y = 2^{-3x}$ дорівнює:

a) $9(\ln 2)^2 2^{-3x}$

b) $-9(\ln 2)^2 2^{-3x}$

c) $-3 \cdot 2^{-3x}\ln 2$

d) $9(\ln 2)2^{-3x}$

16. Похідна функції $y=\sqrt{3x+1}$ дорівнює:

a) $3\sqrt{3x+1}$

b) $\frac{1}{3\sqrt{3x+1}}$

c) $\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$

d) $\frac{1}{\sqrt{3x+1}}$

17. Диференціал функції $y=5^{-7x}$ дорівнює:

a) $\frac{5^{-7x+1}}{-7x+1}dx$

b) $\frac{5^{-7x-1}}{-7x-1}dx$

c) $-7\cdot 5^{-7x}\ln 5dx$

d) $\frac{5^{-7x}\ln 7}{-7}\Delta x$

18. Похідна функції $y=arcctgx$ в точці $x=0$ дорівнює:

a) 2

b) 0

c) 1

d) -1

19. Похідна функції $y=\arcsin 3x$ дорівнює:

a) $\frac{\arcsin 3x}{1-x^2}$

b) $\frac{3}{\sqrt{1-3x^2}}$

c) $\frac{3\arcsin 3x}{1+x^2}$

d) $\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$

20. Диференціал функції $y=\ln 6x$ дорівнює:

a) $\frac{\ln 6x}{6}dx$

b) $\frac{\ln 6x}{x}dx$

c) $6\ln 6xdx$

d) $\frac{1}{x}$dx

21. Похідна третього порядку функції $y = 5x^4 + 4x^3 + 3x - 9$ дорівнює:

a) 120x+24

b) $60x^2+24x$

c) $20x^3+12x^2+3$

d) 120x

22. Похідна функції $y = ctg3x$ дорівнює:

a) $3ctg3x$

b) $\frac{1}{\cos^2 3x}$

c) $\frac{3}{\sin^2 5x}$

d) $\frac{-3}{\sin^2 5x}$.

23. Диференціал функції $y = arctg3x$ дорівнює:

a) $\frac{\text{arctg } 3x}{1+x^2}$dx

b) $\frac{3\Delta x}{\sqrt{1+3x^2}}$

c) $\frac{3}{1+3x^2}$dx

d) $\frac{3}{1+9x^2}$dx

24. Похідна функції $y = 3\ln x$ в точці $x = 2$ дорівнює:

a) 1

b) $\frac{3}{2}$

c) 1

d) 2

25. Похідна функції $y = arctgx + x^4$ дорівнює:

a) $\frac{arctgx}{1+x^2} + 4x^3$

b) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + x^4$

c) $\frac{1}{1+x^2}+4x^3$

d) $\frac{-1}{1+x^2}+4x^3$.

26. Похідна другого порядку функції $y=\ln x$ дорівнює:

a) $\frac{1}{x}$

b) $\frac{1}{x^2}$

c) $\frac{-1}{x^2}$

d) $\frac{-1}{x}$

27. Похідна функції $y=\sin 9x$ в точці $x=0$ дорівнює:

a) 9

b) 0

c) -9

d) 1

28. Точка x_0 називається критичною точкою функції $y=f(x)$, якщо:

a) функція в цій точці невизначена;

b) функція в цій точці визначена, а її похідна або дорівнює нулю або неіснує;

c) функція і її похідна в цій точці невизначені;

d) функція в цій точці визначена, а її похідна не існує;

e) інша відповідь.

29 Які з наступних тверджень є істинними?

a) для того, щоб в точці x_0 функція $y=f(x)$ мала локальний екстремум достатньо, щоб в цій точці похідна функції або дорівнювала нулю або неіснувала;

b) якщо $f'(x_0)=0$ і при переході через точку x_0 похідна змінює знак, тоточці x_0 функція $y=f(x)$ має локальний екстремум;

c) якщо в точці x_0 похідна функції $f'(x)$ не існує, то в цій точці x_0 функція має локальний екстремум;

d) якщо в точці x_0 функція $f(x)$ має локальний екстремум і диференційована в цій точці, то $f'(x_0)=0$.

30. Графік функції $y=f(x)$ опуклий на $(a;b)$, якщо в усіх точках цього інтервалу:

a) $f'(x)>0$

b) $f''(x)>0$

c) $f'(x)<0$

d) $f''(x)<0$

e) інша відповідь

31. Графік функції $y=f(x)$ угнутий на $(a;b)$, якщо в усіх точках цього інтервалу:

a) $f'(x)>0$

b) $f''(x)>0$

c) $f'(x)<0$

d) $f''(x)<0$

e) інша відповідь

32. Якщо в точці x_0 функція $y=f(x)$ має неперервну другу похідну і точка $M_0(x_0;\,f(x_0))$ є точкою перегину графіка функції, то:

a) $f'(x_0)\cdot f''(x)>0$

b) $f''(x)>0$

c) $f''(x)=0$

d) $f''(x)<0$

e) інша відповідь

33. Коефіцієнти k і b в рівнянні похилої асимптоти $y=k\cdot x+b$ до графіка функції $y=f(x)$ знаходяться за формулами:

a) $k=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$;

b) $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-k\cdot x)$;

c) $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)$;

d) $k=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-k\cdot x)$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$;

e) інша відповідь.

34. Пряма $y=A$ буде горизонтальною асимптотою графіка функції $y=f(x)$, якщо:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=A$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=A$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-A\cdot x)=0$;

e) інша відповідь

35. Пряма $x=x_0$ називається вертикальною асимптотою графіка функції $y=f(x)$, якщо:

a) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ не існує;

b) хоча б одна з односторонніх границь $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$ чи $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$ нескінченна;

c) хоча б одна з границь $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$ чи $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$ дорівнює 0;

d) в точці x_0 функція має розрив;

e) інша відповідь.

36. Знайти інтервали зростання функції $y=x-2\ln x$:

a) $(2;+\infty)$

b) $(0;2)$

c) $(1; +\infty)$

d) $(0;1)$

e) інша відповідь

37. Знайти інтервали спадання функції $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$:

a) $(2; +\infty)$

b) $(0; 2)$

c) $(-\infty; 0)$

d) $(\infty;\ 0) \cup (2; +\infty)$

e) інша відповідь

38. Знайти точки мінімуму функції $y = x^4 - 2x^2 - 3$:

a) ± 1

b) 0

c) 1

d) –1

e) інша відповідь.

39. Знайти найменше значення функції $y = -3x^4 + 6x^2$ на відрізку $[-2; 2]$:

a) 3

b) 0

c) –24

d) –3

e) інша відповідь.

40. Знайти найбільше значення функції $y = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}$ на відрізку $[0; 1]$:

a) 2

b) 1

c) 0

d) 3

e) інша відповідь.

РОЗДІЛ 6 ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

6.1 Невизначений інтеграл

В диференціальному численні за даною функцією $F(x)$ знаходять її похідну $F'(x) = f(x)$. На практиці часто доводиться розв’язувати обернену задачу: отримати функцію $F(x)$,знаючи її похідну$f(x)$. Функцію $F(x)$ у цьому випадку називають первісною для $f(x)$.

Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на деякому проміжку, якщо на цьому проміжку $F'(x) = f(x)$ або $dF(x) = f(x)dx$.

Приклад 1

Первісні для функції $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ мають вигляд:

$F_1(x) = \operatorname{arctg} x$, оскільки $F_1'(x) = (\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in R$;

$F_2(x) = \operatorname{arctg} x + C$, оскільки $F_2'(x) = (\operatorname{arctg} x + C)' = \dfrac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in R$;

$F_3(x) = -\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$, оскільки $F_3'(x) = \left(-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{1}{1+x^2} \, \forall x \in (-\infty;\, 0) \cup (0;\, +\infty)$,

причому $F_1(x)$, $F_2(x)$ — неперервні для будь-якого $x \in R$, а $F_3(x)$ у точці x=0 має розрив. У цьому прикладі первісні функцій знайдені методом підбору із подальшою перевіркою, з використанням таблиці похідних функцій.

Теорема 1 (про множину первісних). Якщо $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$ на деякому проміжку, то:

1) $F(x)+C$ — також первісна для $f(x)$ на цьому проміжку;

2) будь-яка первісна $\Phi(x)$ для $f(x)$ може бути подана у вигляді $\Phi(x)=F(x)+C$ на цьому проміжку.

Наслідок. Дві будь-які первісні для одної і тої самої функції на проміжку відрізняються між собою на сталу величину.

Операція знаходження первісних для функції $f(x)$ називається *інтегруванням* $f(x)$.

Функція $F(x)+C$, що являє собою загальний вигляд всієї множини первісних для функції $f(x)$ на проміжку, називається *невизначеним інтегралом* від функції $f(x)$ на даному проміжку і позначається символом:

$$\int f(x)dx = F(x) + C\ ,\ \left(F'(x) = f(x)\right). \tag{6.1}$$

Геометричний зміст невизначеного інтеграла. Графік первісної $F(x)$ називають інтегральною кривою. Якщо в системі координат xOy побудувати криву – графік однієї первісної функції $F(x)$ то всі інші криві (графіки інших первісних для даної функції) одержуються шляхом зміщення цієї кривої по осі Oy на величину, що дорівнює значенню сталої C.

Властивості невизначеного інтеграла

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегрльній функції

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = F'(x) = f(x).$$

2. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу.

3. $\int dF(x) = F(x) + C$.

4. Сталий множник можна виносити з-під знака інтеграла, тобто

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx,\quad k \neq 0.$$

5. Невизначений інтеграл від суми функцій дорівнює сумі невизначених інтегралів від цих функцій, якщо вони існують, тобто

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$

6.1.2Таблиця основних інтегралів

1. $\int 0 \cdot dx = C$;

2. $\int dx = x + C$;

3. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$;

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

5. $\int e^x dx = e^x + C$;

6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a \neq 1$;

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$;

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;

10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;

11. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$;

12. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$;

13. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$;

14. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$;

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$;

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C$;

17. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C$;

18. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C$;

19. $\int \frac{xdx}{x^2 + a} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2 + a\right| + C$;

20. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, a \neq 0$;

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C$.

6.2 Методи інтегрування

6.2.1 Метод безпосереднього інтегрування

Перш за все відмітимо, що у всіх табличних інтегралах підінтегральна функція є певною функцією, аргумент якої співпадає із змінною інтегрування.

Найбільш часто для знаходження невизначеного інтеграла використовують методи: безпосереднього інтегрування, заміни змінної (підстановки), інтегрування частинами, а також знаходження заданого інтеграла за допомогою довідника.

Метод інтегрування, який полягає в прямому використанні табличних інтегралів, основних властивостей невизначеного інтегралу, а також найпростіших тотожних перетворень підінтегральної функції, має назву *методу безпосереднього інтегрування.*

Приклад 2

Обчислити інтеграли:

а) $\int (5\cos x - 3e^x)dx;$

б) $\int \left(4x^3 - \sqrt{x} + 6/x^2\right)dx;$

в) $\int \left(\sqrt{x}-1\right)\left(1+\sqrt{x}\right)dx;$

Розв'язання

а) Застосовуючи властивості невизначеного інтеграла (4), (5) і табличні інтеграли (8), (5), будемо мати:

$$\int (5\cos x - 3e^x)dx = 5\int \cos x dx - 3\int e^x dx = 5\sin x - 3e^x + C.$$

б) Перетворимо підінтегральну функцію та застосуємо властивості невизначеного інтеграла (4), (5) і табличний інтеграл (3):

$$\int \left(4x^3 - \sqrt{x} + 6/x^2\right)dx = \int (4x^3 - x^{1/2} + 6x^{-2})dx =$$

$$= 4\int x^3\,dx - \int x^{1/2}\,dx + 6\int x^{-2}\,dx = 4\frac{x^4}{4} - \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + 6\frac{x^{-1}}{-1} + C = x^4 - \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{6}{x} + C.$$

в) Перетворимо підінтегральний вираз, скориставшись формулами скороченого множення, а також використаємо властивість невизначеного інтеграла (5) і табличні інтеграли (3), (2):

$$\int\left(\sqrt{x}-1\right)\left(1+\sqrt{x}\right)dx = \int (x-1)\,dx = \int x\,dx - \int dx = \frac{x^2}{2} - x + C.$$

6.2.2 Метод підстановки

Якщо даний інтеграл $\int f(x)\,dx$ не є табличним і не може бути обчисленим методом безпосереднього інтегрування, то в багатьох випадках введення нової змінної інтегрування дозволяє звести даний інтеграл до табличного. В цьому суть так званого *методу підстановки.* Мета методу підстановки — перетворити даний інтеграл до такого вигляду, який простіше інтегрувати.

Досить часто інтеграл $\int f(x)\,dx$ можна спростити шляхом введення нової змінної t. Нехай $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – монотонна і неперервно диференційована функція на деякому інтервалі. Якщо на вказаному інтервалі функція $f(x)$ інтегрована, то може бути використана формула

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt, \tag{6.2}$$

Після того як інтеграл знайдено за допомогою підстановки $x = \varphi(t)$, необхідно повернутися до початкової змінної інтегрування x. Іноді застосовують підстановку $t = \varphi(x)$, тобто розглядають нову змінну як функцію від x.

Приклад 3

Обчислити інтеграли:

а) $\int \frac{\ln^3 x}{x}dx$; б) $\int \frac{\cos x\,dx}{25+\sin^2 x}$; в) $\int e^{x^2+1}x\,dx$; г) $\int \frac{x^2}{1+x^6}dx$; д) $\int \frac{\sin 2x\,dx}{3+\sin^2 x}$.

Розв'язання

а) Скористаємось підстановкою $t = \ln x$, тоді $dt = \frac{1}{x}dx.$ Використовуючи формулу (3) з таблиці інтегралів, будемо мати:

$$\int \frac{\ln^3 x}{x}dx = \int t^3\,dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\ln^4 x}{4} + C.$$

При розв'язуванні даного прикладу можна було б не вводити явно нову змінну t, а інтегрувати наступним чином:

$$\int \frac{\ln^3 x}{x}dx = \int \ln^3 x d(\ln x) = \frac{\ln^4 x}{4} + C.$$

У простих випадках заміну змінної виконують умовно, не записуючи нову змінну під знаком інтеграла. Такий метод називається *методом внесення під знак диференціала.*

б) Оскільки $\cos xdx$ є диференціалом функції $\sin x$, то даний інтеграл зводиться до табличного (18):

$$\int \frac{\cos xdx}{25 + \sin^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{5^2 + \sin^2 x} = \frac{1}{5}arctg\frac{\sin x}{5} + C.$$

в) Щоб звести даний інтеграл до табличного (5), введемо заміну $t = x^2 + 1$ тоді $dt = 2xdx$ і $xdx = \frac{dt}{2}.$ Скориставшись формулою (5), одержимо:

$$\int e^{x^2+1}x\,dx = \int e^t\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

г) Щоб звести даний інтеграл до табличного (17), введемо заміну $t = x^3$, тоді $dt = 3x^2 dx$ і $x^2 dx = \frac{dt}{3}.$ Отже,

$$\int \frac{x^2}{1 + x^6}dx = \int \frac{dt}{3(1 + t^2)} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{1 + t^2} =$$
$$= \frac{1}{3}arctgt + C = \frac{1}{3}arctgx^3 + C.$$

д) Нехай $t = 3 + \sin^2 x$, тоді $dt = 2\sin x\cos xdx = \sin 2xdx.$

Отже, $\int \frac{\sin 2xdx}{3+\sin^2 x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln(3+\sin^2 x) + C.$

6.2.3 Метод інтегрування частинами

*Метод інтегрування частинами*полягає у використанні формули

$$\int udv = uv - \int vdu, \tag{6.3}$$

де $u = u(x)$ та $v = v(x)$ – деякі диференційовані функції від x.

Використовуючи цей метод, за u приймають функцію, яка під час диференціювання спрощується, а за dv – ту частину під-інтегрального виразу, яка містить dx і легко інтегрується. При вдалому обранні u та dv інтеграл $\int vdu$ може бути табличним або простішим, ніж заданий інтеграл $\int udv$.

Вказівки до застосування методу інтегрування частинами

1. В інтегралах вигляду

$$\int P(x)\cdot e^x dx; \int P(x)\cdot \cos xdx; \int P(x)\cdot \sin xdx$$

доцільно обирати за множник u многочлен $P(x)$, а іншу частину підінтегрального виразу позначити як dv.

2. В інтегралах вигляду

$$\int P(x)\cdot \ln xdx; \int P(x)\cdot arctgxdx; \int P(x)\cdot \arcsin dx$$

доцільно обирати за $dv = P(x)dx$, а іншу частину підінтегрального виразу позначити як u.

Приклад 4

Знайти інтеграли:

а) $\int xe^x dx$; б) $\int x^2 \ln xdx$; в) $\int x\cos xdx$; г) $\int 2xarctgxdx$; д) $\int \arcsin xdx$.

Розв'язання

а) Нехай $u = x$ і $dv = e^x dx$, тоді $du = dx$, $v = \int e^x dx = e^x$. Застосовуючи формулу інтегрування частинами, дістанемо

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

б) Користуючись вказівкою 2, позначимо $u = \ln x$ і $dv = x^2 dx$, тоді $du = \frac{dx}{x}$; $v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$. Застосовуючи формулу інтегрування частинами, будемо мати

$$\int x^2 \ln x dx = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C = \frac{x^3}{9}(3 \ln x - 1) + C.$$

в) Позначимо $u = x$ і $dv = \cos x dx$, тоді $du = dx$, $v = \int \cos x dx = \sin x$.

Отже,

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

г) Нехай $u = arctgxdx$ і $dv = 2xdx$, тоді $du = \frac{dx}{1 + x^2}$; $v = \int 2xdx = x^2$.

Застосовуючи формулу інтегрування частинами, маємо

$$\int 2x arctgx dx = arctgx \cdot x^2 - \int x^2 \frac{dx}{1 + x^2} =$$

$$= x^2 \cdot arctgx - \int \frac{x^2 + 1 - 1}{1 + x^2} dx = x^2 \cdot arctgx - \int dx + \int \frac{dx}{1 + x^2} =$$

$$= x^2 arctgx - x + arctgx + C = (x^2 + 1) arctgx - x + C.$$

д) Користуючись вказівкою 2, позначимо $u = \arcsin x$ і $dv = dx$; тоді $du = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$; $v = x$. Застосовуючи формулу інтегрування частинами, дістанемо

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}} =$$

$$= x \arcsin x - \int (1 - x^2)^{-1/2} x dx = x \arcsin x +$$

$$+ \frac{1}{2} \int (1 - x^2)^{-1/2} d(1 - x^2) = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C.$$

Далі наведено деякі типи інтегралів, при інтегруванні яких застосовують метод інтегрування частинами та показано вибір функцій $u(x)$ та $v(x)$: $\int \underset{u}{P(x)} \cdot \underset{dv}{\sin(ax)dx}$; $\int \underset{u}{P(x)} \cdot \underset{dv}{\cos(ax)dx}$; $\int \underset{u}{P(x)} \cdot \underset{dv}{e^{ax}dx}$;

$\int \underset{u}{\ln(ax)} \cdot \underset{dv}{Q(x)dx}$; $\int \underset{u}{\operatorname{arctg} x} \cdot \underset{dv}{Q(x)dx}$; $\int \underset{u}{\arcsin(ax)} \cdot \underset{dv}{Q(x)dx}$.

де $P(x)$ — многочлен, $Q(x)$ — алгебраїчна функція, $a \in R$.

Метод інтегрування частинами не обмежується застосуванням тільки для інтегралів вищезгаданого типу.

У деяких випадках після інтегрування частинами одержуємо рівняння, з якого знаходимо шуканий інтеграл.

Приклад5

Знайти інтеграл: $\int e^x \cos x dx$

Розв'язання

$$G = \int e^x \cos x dx = \begin{vmatrix} \cos x = u, \ du = -\sin x dx; \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x \end{vmatrix} =$$

$$= e^x \cos x - \int -\sin x \cdot e^x dx = \begin{vmatrix} \sin x = u, \ du = \cos x dx; \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x \end{vmatrix} =$$

$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x (\cos x + \sin x) - G.$$

Отже, дістали рівняння $G = e^x(\cos x + \sin x) - G$, із якого знаходимо $G = \int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C$.

6.2.4 Інтегрування раціональних функцій

Відношення двох многочленів $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ $\frac{P_n(x)}{Qm(x)}$ називається *раціональним дробом.*

Раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається *правильним*, якщо степінь многочлена в чисельнику менший від степеня многочлена в знаменнику, тобто $n<m$; якщо $n\geq m$, то дріб називається *неправильним*.

Теорема 2. Будь-який неправильний раціональний дріб можна подати у вигляді суми многочлена (цілої частини) та правильного раціонального дробу.

Найпростішими раціональними дробами називаються такі дроби:

1. $\frac{A}{x-a}$; 2. $\frac{A}{(x-a)^k}$; 3. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$; 4. $\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}$,

де $k\geq 2, k\in N, D=p^2-4q<0$,

Теорема 3. Будь-який правильний раціональний нескоротний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ $(n<m)$ можна подати у вигляді скінченної кількості найпростіших дробів, використовуючи такі правила:

1) Якщо $Q_m(x)=(x-a)^k\cdot g_{m-k}(x)$, то

$$\frac{P_n(x)}{(x-a)^k g_{m-k}(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{r(x)}{g_{m-k}(x)};$$

2) Якщо $Q_m(x)=\left(x^2+px+q\right)^k\cdot g_{m-2k}(x)$, то

$$\frac{P_n(x)}{\left(x^2+px+q\right)^k\cdot g_{m-k}(x)}=$$

$$=\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}+\frac{A_2x+B_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{A_kx+B_k}{\left(x^2+px+q\right)^k}+\frac{r(x)}{g_{m-2k}(x)},$$

$$\frac{P_n(x)}{\left(x^2+px+q\right)^k\cdot q_{m-2k}(x)}=$$

$$=\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}+\frac{A_2x+B_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{A_kx+B_k}{\left(x^2+px+q\right)^k}+\frac{r(x)}{q_{m-2k}(x)},$$

де A_i, B_i, $i=\left(\overline{1,k}\right)$ — деякі коефіцієнти; $\frac{r(x)}{g_{m-k}(x)}$ та $\frac{r(x)}{g_{m-2k}(x)}$ правильні раціональні дроби.

Приклад 6

Подати дріб у вигляді суми найпростіших дробів

$$\frac{P_n(x)}{(x+1)(x+2)^2 x^3 \left(x^2-x+2\right)\left(x^2+1\right)^2}.$$

Розв'язання

Даний правильний раціональний дріб ($n < 12$) розкласти на суму найпростіших дробів.

$$\frac{P_n(x)}{(x+1)(x+2)^2 x^3 \left(x^2-x+2\right)\left(x^2+1\right)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B_1}{x+2} + \frac{B_2}{(x+2)^2} +$$

$$+\frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \frac{C_3}{x^3} + \frac{Dx+E}{x^2-x+2} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+1} + \frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

$$\frac{P_n\,x}{(x+1)(x-2)^2 x^3 \left(x^2-x+2\right)\left(x^2+1\right)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B_1}{x-2} + \frac{B_2}{(x-2)^2} +$$
$$+\frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \frac{C_3}{x^3} + \frac{Dx+E}{x^2-x+2} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+1} + \frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Коефіцієнти A_1, B_1, B_2, ..., N_2- невизначені коефіцієнти. Для їх знаходження потрібно праву частину рівності звести до спільного знаменника і знайдений чисельник прирівняти до чисельника даного дробу. Із тотожної рівності многочленів у чисельниках одержимо рівності коефіцієнтів при однакових степенях змінної x, що являють собою систему лінійних рівнянь для знаходження коефіцієнтів A_1, B_1, B_2, ..., N_2. Цей метод називають *методом невизначених коефіцієнтів*.

Розглянемо інтегрування дробів 1, 2, 3 типу.

Інтеграли від дробів 1 та 2 типу мають вигляд

1. $\int \frac{Adx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C$;

2. $\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^2} = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C$;

Розглянемо інтегрування дробу 3 типу на конкретному прикладі.

Приклад 7

Знайти інтеграл: $\int \frac{3x-1}{4x^2-4x+17}dx.$

Розв'язання

У чисельнику виділимо похідну знаменника, а в знаменнику виділимо квадрат суми або різниці, а також введемо заміну. Маємо

$$\int \frac{3x-1}{4x^2-4x+17}dx = \int \frac{3x-1}{4\left(x^2-x+\frac{17}{4}\right)}dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{(3x-1)dx}{x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{17}{4}} = \frac{1}{4}\int \frac{(3x-1)dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4} = \left| \begin{array}{l} x-\frac{1}{2}=t; dx=dt \\ x=t+\frac{1}{2}; \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{3t+\frac{3}{2}-1}{t^2+4}dt = \frac{3}{4}\int \frac{tdt}{t^2+4} + \frac{1}{8}\int \frac{dt}{t^2+4} =$$

$$= \frac{3}{8}\ln\left(t^2+4\right) + \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \frac{3}{8}\ln\left(x^2-x+\frac{17}{4}\right) + \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{2} + C =$$

$$= \frac{3}{8}\ln\left(4x^2-4x+17\right) + \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{4} + C.$$

6.2.5 Інтегрування раціональних функцій

1. Якщо підінтегральна функція — неправильний раціональний дріб, то за допомогою ділення його розкладають на суму многочлена та правильного раціонального дробу.

2. Знаменник правильного раціонального дробу розкладають на множники. За виглядом знаменника правильний раціональний дріб подають у вигляді суми найпростіших дробів, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів.

3. Інтегрують цілу частину та найпростіші дроби.

Приклад 8

Знайти інтеграл: $\int\frac{x^4+2x}{x^3+8}dx.$

Розв'язання

$$\int\frac{x^4+2x}{x^3+8}dx=\left|\begin{array}{l}\begin{array}{l|l} x^4+2x & \dfrac{x^3+8}{x}\end{array}\\ - \\ \dfrac{x^4+8x}{-6x}\end{array}\right.\quad \frac{x^4+2x}{x^3+8}=x-\frac{6x}{x^3+8};$$

$$\frac{6x}{x^3+8}=\frac{6x}{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+4}=$$

$$=\frac{A\left(x^2-2x+4\right)+(Bx+C)(x+2)}{x^3+8}\Rightarrow 6x=A\left(x^2-2x+4\right)+(Bx+C)(x+2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x=x^2\left(A+B\right)+x\left(-2A+2B+C\right)+4A+2C;$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l|l} x^2 & 0=A+B\\ x^1 & 6=-2A+2B+C\\ x^0 & 0=4A+2C\end{array}\right\}\\ x=-2\Rightarrow-12=12A\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}A=-1\\ B=1\\ C=2\end{array}\right|=\int\left(x+\frac{1}{x+2}-\frac{x+2}{x^2-2x+4}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+\ln|x+2|-\int\frac{(x+2)dx}{(x-1)^2+3}=\left|\begin{array}{l}x-1=t\\ dx=dt\\ x=t+1\end{array}\right|=\frac{x^2}{2}+\ln|x+2|-\int\frac{t+3}{t^2+3}dt=$$

$$=\frac{x^2}{2}+\ln|x+2|-\int\frac{tdt}{t^2+3}-3\int\frac{dt}{t^2+3}=\frac{x^2}{2}+\ln|x+2|-\frac{1}{2}\ln\left(t^2+3\right)-$$

$$-\frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}+C=\frac{x^2}{2}+\ln|x+2|-\ln\sqrt{x^2-2x+4}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

6.2.6 Інтегрування тригонометричних функцій

Розглянемо інтеграли виду $\int R(\sin x,\cos x)dx$, де R — раціональна функція відносно $\sin x$, $\cos x$.

Існують підстановки, зокрема, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. За їх допомогою інтеграли вказаного типу зводяться до інтегралів від раціональної функції $\int R^*(t)dt$.

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t,\quad x=2\operatorname{arctg}t,\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2};\\ \sin x=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\dfrac{2t}{1+t^2};\\ \cos x=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\end{array}\right|=$$

$$=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}=\int R^*(t)dt.$$

Приклад9

Знайти інтеграл: $\int\frac{dx}{\sin x}$.

Розв'язання

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t,x=2\operatorname{arctg}t,\\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2};\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{(1+t^2)2dt}{2t(1+t^2)}=$$

$$=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

На практиці універсальну тригонометричну підстановку використовують, якщо sin$x$, cos$x$ входять до $R(\sin x,\cos x)$ у невисокому степені.

Якщо підінтегральна функція $R(\sin x,\cos x)$ — непарна відносно sin$x$, тоді використовують підстановку cos$x$=t.

Якщо підінтегральна функція $R(\sin x,\cos x)$ — непарна відносно cos$x$, то використовують підстановку sin$x$=t.

Приклад 10

Знайти інтеграл: $\int \cos^3 x \sin^2 x dx$.

Розв'язання

$$\int \cos^3 x \sin^2 x dx = \int \cos^3 x \sin^2 x \frac{\cos x}{\cos x} dx =$$

$$= \int \cos^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \cos x dx = \int \left(1 - \sin^2 x\right) \sin^2 x \cos x dx = \begin{vmatrix} \sin x = t \\ dt = \cos x dx \end{vmatrix} =$$

$$= \int \left(1 - t^2\right) t^2 dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

Якщо підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ — парна відносно sin *x* і cos *x*, тобто $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ то в цьому випадку використовуємо підстановку $\operatorname{tg} x = t$ або $\operatorname{ctg} x = t$.

Приклад 11

Знайти інтеграл: $\int \frac{dx}{sin^4 x \cdot cos^2 x}$

Розв'язання

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \begin{vmatrix} \operatorname{tg} x = t, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \dfrac{dt}{1+t^2}; \\ \sin^2 x = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{t^2}{1+t^2}; \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{1}{1+t^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \int \frac{\left(1+t^2\right)^2 \left(1+t^2\right) dt}{t^4 \left(1+t^2\right)} = \int \frac{1 + 2t^2 + t^4}{t^4} dt = \int \left(\frac{1}{t^4} + \frac{2}{t^2} + 1\right) dt =$$

$$= \frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} + t + C = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x} - 2\operatorname{ctg} x + C.$$

Підінтегральна функція $R(\operatorname{tg} x)$ раціоналізується підстановкою $\operatorname{tg} x = t$.

Приклад 12

Знайти інтеграл: $\int tg^3 x dx$

Розв'язання

$$\int \operatorname{tg}^3 x dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{t^3 dt}{t^2+1} =$$

$$= \int \left(t - \frac{t}{t^2+1} \right) dt = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right) + C = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \ln\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 1} + C .$$

В інтегралах виду $\int \sin^{2n} x \cdot \cos^{2m} x dx$ доцільно скористатись формулами пониження степеня:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2} .$$

Приклад 13

Знайти інтеграл: $\int sin^2 x \cdot cos^2 x dx$

Розв'язання

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x \right) + C .$$

При інтегруванні інтегралів типу:

$\int \sin(ax) \cdot \cos(bx) dx$, $\int \cos(ax) \cdot \cos(bx) dx$, $\int \sin(ax) \cdot \sin(bx) dx$ $a \neq b$

доцільно використовувати формули:

$$\sin(ax) \cdot \cos(bx) = \frac{1}{2}(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x),$$

$$\cos(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x),$$

$$\sin(ax) \cdot \sin(bx) = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x).$$

Приклад 14

Знайти інтеграл: $\int \cos 2x \cdot \sin 5x dx$

Розв'язання

$$\int \cos 2x \cdot \sin 5x \cdot dx = \frac{1}{2}\int (\sin 7x + \sin 3x) dx = -\frac{1}{14}\cos 7x - \frac{1}{6}\cos 3x + C .$$

Завдання для самостійного розв'язування

1. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx.$ *Відповідь:* $\ln|x| + 2\operatorname{arctg} x + C.$

2. $\int \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx.$ *Відповідь:* $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C.$

3. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}dx.$ *Відповідь:* $-\operatorname{ctg}x - \operatorname{tg}x + C.$

4. $\int \frac{dx}{x\ln^4 x}.$ *Відповідь:* $-\frac{1}{3\ln^3 x} + C.$

5. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{5-\sin^2 x}}dx.$ *Відповідь:* $-\sqrt{5-\sin^2 x} + C.$

6. $\int \frac{x + (\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}dx.$ *Відповідь:* $-\frac{1}{9}\left(\sqrt{1-9x^2} + (\arccos 3x)^3\right) + C.$

7. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx.$ *Відповідь:* $2\sin\sqrt{x} + C.$

8. $\int \frac{dx}{e^x + 1}.$ *Відповідь:* $-\ln\left(e^{-x} + 1\right) + C$.

9. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x(x+1)}.$ *Відповідь:* $2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C$.

10. $\int \arcsin x dx.$ *Відповідь:* $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

11. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}.$ *Відповідь:* $-x\operatorname{ctg}x + \ln|\sin x| + C$.

12. $\int \ln\left(x^2+1\right)dx.$ *Відповідь:* $x\ln\left(x^2+1\right) - 2x + 2\operatorname{arctg}x + C$.

13. $\int \sin(\ln x)dx.$ *Відповідь:* $\frac{x}{2}(\sin\ln x - \cos\ln x) + C$.

14. $\int (2x+5)e^{-3x}dx.$ *Відповідь:* $-\frac{e^{-3x}}{9}(6x+17) + C$.

15. $\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}dx.$ *Відповідь:* $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right) + \operatorname{arctg}(x+1) + C$.

16. $\int\frac{(8x-1)dx}{x^2-4x+1}.$ *Відповідь:* $4\ln\left|x^2-4x+1\right|+\frac{15}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-2-\sqrt{3}}{x-2+\sqrt{3}}\right|+C$.

17. $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx.$ *Відповідь:* $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C$.

18. $\int\frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx.$ *Відповідь:* $x+\frac{1}{x}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+C$.

19. $\int\frac{\left(2x^2-3x-3\right)dx}{(x-1)\left(x^2-2x+3\right)}.$ *Відповідь:* $\ln\frac{\sqrt{\left(x^2-2x+3\right)^3}}{|x-1|}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$.

20. $\int\frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}.$ *Відповідь:* $\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right|+C$.

21. $\int\cos\frac{4}{3}x\cdot\cos 3x dx.$ *Відповідь:* $\frac{3}{26}\sin\frac{13}{3}x+\frac{3}{10}\sin\frac{5}{3}x+C$.

22. $\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}.$ *Відповідь:* $\frac{\left(\operatorname{tg}^2 x-1\right)\left(\operatorname{tg}^4 x+10\operatorname{tg}^2 x+1\right)}{3\operatorname{tg}^3 x}+C$.

23. $\int\cos^2 5x dx.$ *Відповідь:* $\frac{x}{2}+\frac{1}{20}\sin 10x+C$.

24. $\int\frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$ *Відповідь:* $3\sqrt{x^2+2x+2}-4\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C$.

25. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}.$ *Відповідь:* $3\sqrt[3]{x}+3\ln\left|\sqrt[3]{x}-1\right|+C$.

26. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}.$ *Відповідь:* $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln\left|1+\sqrt[4]{x}\right|+C$.

27. $\int\frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx.$ *Відповідь:* $2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{2}}+C$.

28. $\int\frac{\sqrt{\left(9-x^2\right)^3}}{x^6}dx.$ *Відповідь:* $-\frac{\sqrt{\left(9-x^2\right)^5}}{45x^5}+C$.

29. $\int\frac{dx}{x^3\cdot\sqrt[3]{2-x^3}}.$ *Відповідь:* $-\frac{\sqrt[3]{\left(2-x^3\right)^2}}{4x^2}+C$.

30. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$. *Відповідь:* $-\frac{1+2x^2}{x\sqrt{1+x^2}}+C$.

31. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.

Відповідь: $\frac{x}{4}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right|+C.$

32. $\int \frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}$. *Відповідь:* $-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{x^2+1}+C$.

33. $\int (\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)dx.$ *Відповідь:* $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-x+C$.

34. $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx.$ *Відповідь:* $x-\frac{1}{x}-\ln x^2+C$.

35. $\int a^x \cdot e^{\frac{x}{2}}dx.$ *Відповідь:* $\frac{(a\sqrt{e})^x}{\ln a+0{,}5}+C$.

36. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$. *Відповідь:* $\frac{1}{3}\left(\sqrt{(x+1)^3}+\sqrt{(x-1)^3}\right)+C$.

37. $\int \sqrt{x+2\sqrt{x-1}}\,dx.$ *Відповідь:* $x+\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+C$.

38. $\int \sqrt{6x+2\sqrt{9x^2-4}}\,dx.$ *Відповідь:* $\frac{2}{9}\left(\sqrt{(3x+2)^3}+\sqrt{(3x-2)^3}\right)+C$.

39. $\int \frac{dx}{1-2x}$. *Відповідь:* $-\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$.

40. $\int x^3\sqrt[3]{4-3x^2}\,dx.$ *Відповідь:* $-\frac{1}{6}\sqrt[3]{(3x^2-4)^4}+C$.

41. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx.$ *Відповідь:* $-e^{\frac{1}{x}}+C$.

42. $\int \frac{x^2+\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx.$ *Відповідь:* $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x+x+\operatorname{arctg} x+C$.

43. $\int x^2(5+3x^3)^{10}dx.$ *Відповідь:* $\frac{1}{99}(5+3x^3)^{11}+C$.

44. $\int \frac{3^{\arccos 2x}}{\sqrt{1-4x^2}}dx.$ *Відповідь:* $\frac{1}{2\ln 3}\cdot 3^{\arccos 2x}+C$.

45. $\int\left(\ln x+\frac{1}{\ln x}\right)\cdot\frac{dx}{x}.$ *Відповідь:* $\frac{1}{2}\ln^2 x+\ln|\ln x|+C$.

46. $\int\frac{dx}{x^2+6x+5}.$ *Відповідь:* $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x+5}\right|+C$.

47 $\int\frac{2^x\,dx}{\sqrt{9-4^x}}.$ *Відповідь:* $\frac{1}{\ln 2}\arcsin\frac{2^x}{3}+C$.

48. $\int\frac{\cos 2x\,dx}{1+\sin x\cdot\cos x}.$ *Відповідь:* $\ln(2+\sin 2x)+C$.

49. $\int\frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx.$ *Відповідь:* $\arcsin x+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}+C\right)$.

50. $\int\frac{2^{x+1}-3^{x+2}}{6^x}dx.$ *Відповідь:* $-\frac{2}{3^x\ln 3}+\frac{9}{2^x\ln 2}+C$.

51. $\int\frac{x(1-x^2)dx}{1+x^4}.$ *Відповідь:* $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2-\frac{1}{4}\ln(x^4+1)+C$.

52. $\int x\cos 2x\,dx.$ *Відповідь:* $\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$.

53. $\int x^2\ln(1+x)\,dx.$ *Відповідь:* $\frac{x^3+1}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{6}(2x^3-x^2+2x)+C$.

54. $\int x\arcsin x dx.$ *Відповідь:* $\frac{2x^2-1}{4}\arcsin x+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{4}+C$.

55. $\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx.$ *Відповідь:* $2\sqrt{x}(\ln x-2)+C$.

56. $\int\cos\ln x\,dx.$ *Відповідь:* $\frac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)+C$.

57. $\int\frac{\arcsin x}{x^2}dx.$ *Відповідь:* $-\frac{\arcsin x}{x}-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C$.

58. $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx.$ *Відповідь:* $x-\frac{1-x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C$.

59. $\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}$. *Відповідь:* $-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$.

60. $\int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$. *Відповідь:* $-8\sqrt{5+2x-x^2}-3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}+C$.

61. $\int \frac{2-5x}{\sqrt{4x^2+9x+1}}dx$.

Відповідь: $\frac{61}{16}\ln\left|8x+9+4\sqrt{4x^2+9x+1}\right|-\frac{5}{4}\sqrt{4x^2+9x+1}+C$.

62. $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+13}dx$.

Відповідь: $\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+13)+\frac{4}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}+C$.

63. $\int \frac{x^5 dx}{x^6-x^3-2}$. *Відповідь:* $\frac{1}{9}\ln\left(\left|x^3+1\right|(x^2-2)^2\right)+C$.

64. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$. *Відповідь:* $\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|+C$.

65. $\int \frac{x^4 dx}{(x+2)(x^2-1)}$. *Відповідь:* $\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(x-1)(x+2)^{32}}{(x+1)^3}\right|+C$.

66. $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$. *Відповідь:* $-\frac{x}{(x-1)^2}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+C$.

67. $\int \frac{(7x-15)dx}{x^3-2x^2+5x}$. *Відповідь:* $3\ln\frac{\sqrt{x^2-2x+5}}{|x|}+2\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$.

68. $\int \frac{dx}{(x-2)^2(x^2-4x+5)}$. *Відповідь:* $-\frac{1}{x-2}-\operatorname{arctg}(x-2)+C$.

69. $\int (1-\sin 2x)^2 dx$. *Відповідь:* $\frac{3}{2}x+\cos 2x-\frac{1}{8}\sin 4x+C$.

70. $\int \sin^5 x dx$. *Відповідь:* $-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\cos x+C$.

71. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}dx$. *Відповідь:* $\frac{\sin^2 x}{2}-\frac{1}{2\sin^2 x}-2\ln|\sin x|+C$.

72. $\int \sin 5x \cdot \sin 6x dx$. *Відповідь:* $\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{22}\sin 11x+C$.

73. $\int \frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$. *Відповідь:* $\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{1+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{15}}+C$.

74. $\int \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$. *Відповідь:* $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{2}}\right)+C$.

75. $\int \frac{\sin x\cdot\cos x dx}{1+\sin^4 x}$. *Відповідь:* $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\sin^2 x\right)+C$.

6.3 Визначений інтеграл

6.3.1 Поняття визначеного інтеграла

Нехай $y=f(x)$ – деяка функція, що задана на проміжку $[a;\, b]$.

Розіб'ємо $[a;\, b]$ на n частин точками x_i так що

$a=x_0<x_1<x_2<...<x_{i-1}<x_i<...<x_{n-1}<x_n=b.$

Обчислимо $f(\xi_i)$, де $x_{i-1}\le\xi_i\le x_i$, $i=\left(\overline{1,n}\right)$, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$.

Складемо інтегральну суму $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i$.

Позначимо $\lambda=\max\Delta x_i$.

Якщо існує скінченна границя інтегральних сум S_n при $\lambda\to 0$ і вона не залежить ні від способу розбиття $[a;\, b]$ на частини Δx_i, ні від вибору точок ξ_i, то ця границя називається *визначеним інтегралом від функції* $f(x)$ *на проміжку* $[a;\, b]$ і позначається:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx\,. \qquad (6.4)$$

Геометричний зміст визначеного інтеграла

Якщо $f(x)\ge 0$, $x\in[a;\, b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ дорівнює площі відповідної криволінійної трапеції. (Рис. 6.1)

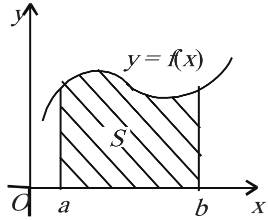

Рисунок 6.1. Схема визначення площі криволінійної трапеції

6.3.2 Властивості визначеного інтеграла

1. Якщо $f(x) = c = \text{const}$, то $\int\limits_a^b c dx = c \cdot (b - a)$.

2. Сталий множник можна виносити з-під знака визначеного інтеграла, тобто $\int\limits_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int\limits_a^b f(x)dx$.

3І. Якщо $f_1(x)$ та $f_2(x)$ інтегровані на [a; b], то

$$\int\limits_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))\, dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)\, dx.$$

4. Якщо у визначеному інтегралі поміняти місцями межі інтегрування, то інтеграл змінить свій знак на протилежний, тобто $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

5. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

6. Якщо $f(x)$ – інтегрована на будь-якому із проміжків:

[a; b], [a; c], [c; b], то $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

7. Якщо $f(x) \geq 0$ та інтегрована для $x \in [a, b]$, $b > a$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.

8. Якщо $f(x)$, $g(x)$ – інтегровані та $f(x) \geq g(x)$ для $x \in [a,\, b],\ b > a,$ то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b g(x)\, dx.$

9. Якщо $f(x)$ – інтегрована та $m \leq f(x) \leq M$ для $x \in [a,\, b],\ b > a,$ то

$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a).$$

6.3.3. Формула Ньютона-Лейбніца

Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a;\, b]$, то функція

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$$

є первісною для функції $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x),\quad a \leq x \leq b.$

Визначений інтеграл пов'язаний з невизначеним формулою:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \tag{6.5}$$

де $F(x)$ – довільна первісна функції $f(x)$. Ця формула називається ***формулою Ньютона-Лейбніца.***

Приклад 15

Користуючись формулою Ньютона-Лейбніца, обчислити визначені інтеграли: а) $\int\limits_2^3 x^3\, dx$; б) $\int\limits_0^2 \frac{dz}{4+z^2}$.

Розв'язання

а) $\int\limits_2^3 x^3\, dx = \frac{x^4}{4}\Big|_2^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{2^4}{4} = \frac{81-16}{4} = \frac{65}{4}.$

б) $\int\limits_0^2 \frac{dz}{4+z^2} = \frac{1}{2}\left(arctg\, z/2\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{2}(arctg1 - arctg0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}.$

Задача 1

Сільськогосподарське підприємство повинно обрати одну з двох можливих стратегій розвитку:

1) вкласти 100 тис. грн. у нову технологічну лінію і одержувати 30 тис. грн. прибутку кожного року впродовж 10 років;

2) закупити на 150 тис. грн. нову техніку, що дозволить одержати 50 тис. грн. прибутку щорічно впродовж 7 років. Яку стратегію потрібно обрати підприємству, якщо номінальна облікова щорічна ставка 10 %?

Розв'язання

Якщо $f(t)$ - прибуток за час t і $r = \frac{R}{100}$ - номінальна облікова щорічна ставка, то дійсне значення загального прибутку за час між $t = 0$ та $t = T$ дорівнює

$$\int_0^T f(t)e^{-rt}dt\ .$$

При $R = 10$ маємо $r = 0{,}1$. Тому для першої стратегії дійсне значення прибутку за 10 років буде складати:

$$P_1 = \int_0^{10} 30e^{-0{,}1t}dt - 100 = -300e^{-0{,}1t}\Big|_0^{10} - 100 = -300e^{-1} + 300 - 100 = 88{,}8\ \text{(тис.грн.)};$$

$$P_2 = \int_0^{7} 50e^{-0{,}1t}dt - 150 = -500e^{-0{,}1t}\Big|_0^{7} - 150 = -500e^{-0.7} + 500 - 150 = 200\ \text{(тис.грн.)}.$$

Отже, друга стратегія кращаза першу і тому її доцільно обрати для подальшого розвитку сільськогосподарського підприємства.

Задача 2

Попотрібно електроенергії для підприємства наближено виражається функцією $y = 300 - 7{,}7x + 0{,}6x^2$, де x – кількість годин на добу. Обчислити вартість електроенергії, яку використовує підприємство протягом доби, якщо вартість 1 кВт/год дорівнює 0,9 грн.

Розв'язання

Витрати електроенергії підприємством протягом доби становлять:

$$W=\int_0^{24} ydx=\int_0^{24}(300-7{,}7x+0{,}6x^2)dx=(300x+7{,}7\frac{x^2}{2}+\dots\dots+0{,}6\frac{x^3}{3})\,|_0^{24}=$$

=7747,2 (кВт/год).

Вартість електроенергії складатиме $7747{,}2\cdot 0{,}9=6972{,}48$ (грн.).

6.3.4 Метод підстановки у визначеному інтегралі

Якщо функція $y=f(x)$ неперервна зі своєю похідною $\varphi'(t)$ на $[\alpha;\beta]$, де $a=\varphi(\alpha)$ і $b=\varphi(\beta)$, причому функція $f[\varphi(t)]$ визначена і неперервна на $[\alpha;\beta]$, то

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt. \qquad (6.6)$$

Заміна змінної у визначеному інтегралі полягає в тому що:

1) необхідно змінити межі інтегрування;

2) не потрібно повертатись до початкової змінної.

Приклад 16

Обчислити інтеграл $\int_4^9\frac{dx}{\sqrt{x}+1}$.

Розв'язання

$$\int_4^9\frac{dx}{\sqrt{x}+1}=\left|\begin{array}{c} x=t^2,\ \ dx=2tdt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 4 & 9 \\ \hline t & 2 & 3\end{array}\end{array}\right|=\int_2^3\frac{2tdt}{t+1}=2\int_2^3\frac{t+1-1}{t+1}dt=$$

$$=2\int_2^3\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=2(t-\ln|t+1|)\Big|_2^3=2(3-\ln 4-(2-\ln 3))=2\left(1+\ln\frac{3}{4}\right).$$

6.3.5 Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ мають неперервні похідні для $x\in[a;\ b]$, то

$$\int_a^b u dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v du. \tag{6.7}$$

Приклад 17

Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x dx$.

Розв'язання

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = x,\ du = dx; \\ \cos 2x dx = dv, \\ v = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| = \left(\frac{x}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\sin\pi + \frac{1}{2}\cos\pi\right) - \left(0\cdot\sin 0 + \frac{1}{2}\cos 0\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Задача 3

Знайти площу живого перерізу каналу параболічного профілю, який знизу обмежений параболою, а зверху – горизонтальною прямою. (Рис. 6.2)

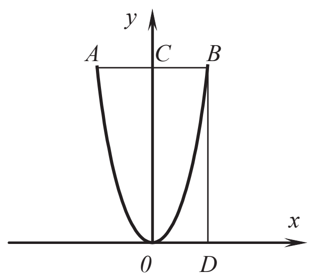

Рисунок 6.2

Розв'язання

Припустимо, що найбільша глибина каналу h, а ширина (по верху води) b; парабола описується кривою $y = px^2$, вершина якої розташована в точці $O(0;\,0)$, а пряма має вигляд $y = h.$ Скористаємось геометричним змістом визначеного інтеграла. Позначимо через A та B – точки перетину параболи та прямої $y = h$. Нехай $AB = b$, $OC = h$, тоді маємо $h = p\dfrac{b^2}{4}$. Звідси знаходимо, що $p = \dfrac{4h}{b^2}$. В силу симетрії фігури шукану площу знайдемо як подвійну різницю площ

прямокутника *CBDO*та криволінійної трапеції *DBO:*
$$S = 2\left(h\frac{b}{2} - \int_0^{b/2}\frac{4h}{b^2}x^2dx\right) = \frac{2}{3}bh.$$

Таким чином, отримали формулу для визначення площі живого перерізу каналу параболічного профілю.

Задача 4

Нехай потрібно визначити запас продукції на плодоовочевій базі, створений за два дні, якщо надходження продукції характеризується функцією
$f(t) = 2t^2 + 4t + 5$.

Розв'язання

Весь запас продукції, створений за 2 дні, можна розглядати як суму запасів продукції, створених за нескінченно малі проміжки часу, на які поділено відрізок $[0; 2]$. Припустимо, що надходження продукції за кожний нескінченно малий проміжок часу не змінюється, тобто $f(t)$ – стала функція. Тоді запас продукції ΔV_i, створений за нескінченно малий проміжок часу Δt_i можна знайти за формулою $\Delta V_i = f(\xi_i)\Delta t_i$, а запас продукції, створений за 2 дні, дорівнює $V \approx \sum_{i=0}^{2} f(\xi_i)\Delta t_i$. Ця наближена рівність тим точніша, чим менші проміжки часу Δt_i. Точне значення запасу продукції знайдемо як границю цієї суми:

$$V = \lim_{\max \Delta t_i \to 0}\sum_{i=0}^{2} f(\xi_i)\Delta t_i = \int_0^2 (2t^2 + 4t + 5)dt \approx 23 \text{ (ум. од.).}$$

Задача 5

Урожай цукрового буряка (т/га) залежно від кількості внесених мінеральних добрив (ц/га) виражається виробничою функцією $y = 5{,}4x - 2{,}9,\quad 0{,}6 < x \le 6$. Знайти середній урожай цукрового буряка, якщо кількість внесених добрив збільшувати з 4 до 6 ц/га.

Розв'язання

Середній урожай цукрового буряка знайдемо за формулою

$$y_{cp} = \frac{1}{b-a}\int_a^b y(x)dx.$$

Маємо $y_{cp} = \frac{1}{6-4}\int_4^6 (5{,}4x - 2{,}9)dx = 0{,}5(2{,}7x^2 - 2{,}9x)\Big|_{x=4}^{x=6} = 21{,}4$ (т/га).

Отже,середній урожай цукрового буряка становить 21,4 т/га, якщо кількість добрив збільшувати з 4 до 6 ц/га.

Завдання для самостійного розв'язування

1. $\int_0^1 \left(1+e^{3x}\right)^2 e^{3x}dx.$ *Відповідь:* $\frac{1}{9}\left(\left(1+e^3\right)^3 - 8\right)$.

2. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$. *Відповідь:* $\operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}$.

3. $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$. *Відповідь:* $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}$. *Відповідь:* $\frac{\sqrt{2}}{8}$.

5. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{\cos^2 x}$. *Відповідь:* $\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}$.

6. $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$. *Відповідь:* $\ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}$.

7. $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx.$ *Відповідь:* $\frac{1}{2}\left(e^{\pi}+1\right)$.

8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx.$ *Відповідь:* $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

9. $\int_{1}^{16} \operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1}\,dx.$ *Відповідь:* $\frac{16}{3}\pi - 2\sqrt{3}$.

6.4 Застосування визначеного інтеграла

6.4.1 Обчислення площі плоскої фігури

Якщо фігура обмежена лініями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ і функція $f(x)$ — неперервна та $f(x) \geq 0$ на проміжку $[a;\ b]$, то площа S такої криволінійної трапеції обчислюється за формулою: $S = \int_{a}^{b} f(x)dx$. Якщо ж $f(x) \leq 0$, то $S = \left| \int_{a}^{b} f(x)dx \right|$.

Якщо фігура обмежена лініями:

$y = f(x),\ y = g(x),\ x = a,\ x = b$,

а функції $f(x)$ та $g(x)$ — неперервні та $f(x) \geq g(x)$ на $[a;\ b]$, то площа такої фігури обчислюється за формулою

$$S = \int_{a}^{b} \left(f(x) - g(x) \right) dx. \tag{6.8}$$

Графічна ілюстрація обчислення площі фігури (Рис.6.3)

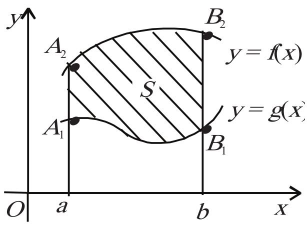

Рисунок 6.3 Схема визначення площі фігури

Приклад 18

Обчислити площу, обмежену прямою $x = 4$, кривою $y = 3x^2 - 6x$ та віссю Ox на відрізку $[0;\ 4]$. (Рис 6.4)

Розв'язання

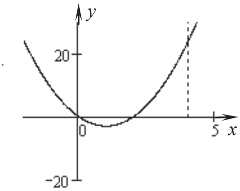

Рисунок 6.4

Крива $y = 3x^2 - 6x$ – парабола. Площа OAB розташована під віссю Ox, візьмемо її із знаком мінус, а площа BCD – над віссю Ox, візьмемо її із знаком плюс. Відрізок $[0; 4]$ розіб'ємо на два: $[0; 2]$ і $[2; 4]$. Маємо

$$S = -S_1 + S_2 = -\int_0^2 (3x^2 - 6x)dx + \int_2^4 (3x^2 - 6x)dx =$$

$$= -(x^3 - 3x^2)\Big|_0^2 + (x^3 - 3x^2)\Big|_2^4 = -(8 - 12) + (64 - 48 - 8 + 12) =$$

$= 4 + 20 = 24.$ кв. одн.

Приклад 19

Знайти площу фігури, обмеженої параболою $y = \frac{1}{4}(x-2)^2$ та прямою $x + 2y - 14 = 0.$ (Рис. 6.5)

Розв'язання

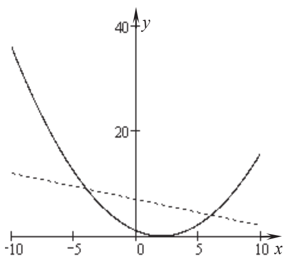

Рисунок 6.5

Площа фігури, обмеженої зверху неперервною кривою $y = f_2(x)$, знизу – неперервною кривою $y = f_1(x)$, зліва – прямою $x = a$ і справа прямою $x = b$, обчислюється за формулою (6.8):

$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx.$$

Знайдемо точки перетину даних ліній. З рівняння прямої знаходимо $y = 7 - \frac{x}{2}$.

Розв'яжемо тепер систему $\begin{cases} y = \frac{1}{4}(x-2)^2 \\ y = 7 - \frac{x}{2} \end{cases}$. Підставивши в перше рівняння системи замість y різницю $7 - \frac{x}{2}$, одержимо $7 - \frac{x}{2} = \frac{1}{4}(x-2)^2$; $28 - 2x = x^2 - 4x + 4$; $x^2 - 2x - 24 = 0$,

звідки $x_1 = -4,\ x_2 = 6.$ Тоді одержимо $y_1 = 9,\ y_2 = 4.$

Таким чином, парабола і пряма перетинаються в точках $A(-4;\,9)$ і $B(6;\,4)$.

Оскільки зверху фігура обмежена прямою, знизу – параболою, то застосовуючи відповідну формулу, маємо:

$$S = \int_{-4}^{6}\left[7 - x/2 - 0{,}25(x-2)^2\right]dx = \int_{-4}^{6}\left[7 - x/2 - 0{,}25x^2 + x - 1\right]dx =$$

$$= \int_{-4}^{6}\left[6 + x/2 - 0{,}25x^2\right]dx = \left[6x + 0{,}25x^2 - x^3/12\right]_{-4}^{6} =$$

$$= 36 + 9 - 18 + 24 - 4 - \frac{16}{3} = 41\frac{2}{3}.$$

6.4.2 Обчислення об'єму тіла обертання

Об'єм тіла V_x, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої декількома лініями обчислюється за формулою

$$V_x = \int_a^b S(x)dx = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx \qquad (6.9)$$

Аналогічно, об'єм тіла V_y, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $x = 0$, $x = \varphi(y) \geq 0$, $y = c$, $y = d$ обчислюється за формулою

$$V_y = \pi\int_c^d \left(\varphi(y)\right)^2 dy. \qquad (6.10)$$

Приклад 20

Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y^2 = 3x - 3$, $x = 1$, $x = 4$.

Розв’язання

Скористаємось формулою (6.9):

$$V_x = \int_a^b S(x)dx = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx.$$

Маємо: $V = \pi\int_1^4 y^2 dx = \pi\int_1^4 (3x-3)dx = \frac{3\pi}{2}(x-1)^2\Big|_1^4 = \frac{27}{2}\pi$.

6.4.3 Довжина дуги плоскої кривої

Довжина дуги кривої, заданої функцією $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$ обчислюється за формулою

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx. \qquad (6.11)$$

Приклад 21

Знайти довжину дуги параболи $y = \frac{x^2}{2}$ від точки $O(0;\ 0)$ до точки $A(1;\ 0{,}5)$.

Розв’язання

Оскільки $y' = x,\ 0 \le x \le 1$, то за формулою $L = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx$ одержимо

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \left(\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\right)\Bigg|_0^1 = = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})).$$

Завдання для самостійного розв’язування

1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями.

1. $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$. *Відповідь:* $S = \frac{125}{6}$ кв. одн.

2. $y = -x^2 + 9$, $y = 2x + 1$. *Відповідь:* $S = 36$ кв. одн.

3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$ *Відповідь:* $S=\pi ab.$ кв. одн.

4. $y=\frac{\ln x}{4x}$, $y=x\ln.$ *Відповідь:* $S=\frac{1}{16}\left(3-\ln 4-2\ln^2 2\right)$кв. одн.

5. $y=\mathrm{tg}x$, $y=\frac{2}{3}\cos x,\quad x=0.$ *Відповідь:* $S=\frac{1}{3}+\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$ кв. одн.

2. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, що обмежена лініями:

1. $y^2=1-x,\quad x=0$ навколо осі Oy.

Відповідь: $V=\frac{16}{15}\pi.$

2. $x^2-y^2=4,\quad y=\pm2$ навколо осі Oy.

Відповідь: $V=\frac{64}{3}\pi.$

3. $y=xe^x,\quad y=0,\quad x=1$ навколо осі Ox.

Відповідь: $V=\frac{\pi}{4}\left(e^2-1\right).$

4. $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad x=0,\quad x=1$ навколо осі Ox.

Відповідь: $V=\frac{\pi}{8}\left(e^2-e^{-2}+4\right).$

5. $xy=4$, $x=1$, $x=4$, $y=0$ навколо осі Ox.

Відповідь: $V=12\pi$.

Тести до розділу «Інтегральне числення»

1.Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{dx}{x^2}$:

a) $\frac{1}{x^2}+C$;

b) $-\frac{1}{x}+C$;

c) $\ln\left|x^2\right|+C$;

d) $\frac{x^3}{3}+C$.

2.Знайти невизначений інтеграл $\int e^{2x}dx$:

a) $\frac{1}{2}e^{2x}+C$;

b) $2e^{2x}+C$;

c) $e^{x}+C$;

d) $\frac{1}{e^{2x}}+C$.

3. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$:

a) $\frac{1}{4}$;

b) $\frac{\pi}{6}$;

c) 4π;

d) $\frac{\pi}{4}$.

4. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_1^2 \left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)dx$:

a) $\frac{21}{8}$;

b) $\frac{3}{8}$;

c) 4;

d) $4\frac{1}{16}$.

5. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{x^2+5}$:

a) $\ln|x^2+5|+C$;

b) $-\frac{1}{(x^2+5)^2}+C$;

c) $\frac{1}{\sqrt{5}} arctg \frac{x}{\sqrt{5}} + C$;

d) $\frac{1}{\sqrt{5}} arctg \frac{x^2}{5} + C$.

6. Знайти невизначений інтеграл $\int (2x+3)dx$:

a) $2x + C$;

b) $\frac{(2x+3)^2}{2} + C$;

c) $x^2 + 3x + C$;

d) $\frac{1}{2}(x^2 + 3x) + C$.

7. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^3 x^3 dx$:

a) 10;

b) 20;

c) 30;

d) 40.

8. Знайти невизначений інтеграл $\int \sqrt[3]{2x} dx$:

a) $2(2x)^{\frac{4}{3}} + C$;

b) $\frac{3}{8}(2x)^{\frac{4}{3}} + C$;

c) $\frac{2}{3}(2x)^{\frac{3}{4}} + C$;

d) $\frac{1}{2(2x)^{4/3}} + C$.

9. Знайти невизначений інтеграл $\int e^x (e^x + 1) dx$:

a) $e^{2x} + e^x + C$;

b) $\frac{1}{2}(e^x + 1) + C$;

c) $e^x + 1 + C$;

d) $\frac{1}{2}e^{2x}+x+C$.

10. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^4 \sqrt{x}dx$:

a) $\frac{14}{3}$;

b) $\frac{7}{2}$;

c) $\frac{3}{14}$;

d) 5.

11. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^3 e^{\frac{x}{3}} dx$:

a) $3e$;

b) $1+e$;

c) $3e-3$;

d) 3.

12.Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$:

a) $-\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+C$;

b) $2\sqrt{x}+C$;

c) $\frac{2}{3}\frac{1}{x^{3/2}}+C$;

d) $\frac{\sqrt{x}}{2}+C$.

13. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{2^x}$:

a) $2^x \ln 2+C$;

b) $2^{-x} \ln 2+C$;

c) $-2^{-x} \ln 2+C$;

d) $\frac{\ln 2}{2^x} + C$.

14. Знайти невизначений інтеграл $\int tgx dx$:

a) $-\ln|\cos x| + C$;

b) ctgx+C;

c) $\frac{1}{\cos^2 x + C}$;

d) $\ln(\sin x) + C$.

15.Обчислити визначений інтеграл $\int_{-1}^{2} x^2 dx$

a) 3;

b) 6;

c) 9;

d) –5.

16.Обчислити визначений інтеграл $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$:

a) 1;

b) $\frac{1}{2}$;

c) $-\frac{3}{2}$;

d) $\frac{2}{3}$.

17. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$:

a) $3tgx$;

b) $\frac{1}{3} ctg 3x + C$;

c) $\frac{1}{3} tg 3x + C$;

d) $\dfrac{1}{\sin^2 3x}+C$.

18. Знайти невизначений інтеграл $\int \dfrac{dx}{x^2+5}$:

a) $\ln|x^2+5|+C$;

b) $-\dfrac{1}{(x^2+5)^2}+C$;

c) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}arctg\dfrac{x}{\sqrt{5}}+C$;

d) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}arctg\dfrac{x^2}{5}+C$.

19. Знайти невизначений інтеграл $\int (x+1)^2\,dx$:

a) $2(x+1+C)$;

b) $3(x+1)^3+C$;

c) $\dfrac{(x+1)^3}{3}+C$;

d) $\left(\dfrac{x^2}{2}+x^2\right)+C$.

20. Знайти невизначений інтеграл $\int \dfrac{dx}{2x^2-8}$:

a) $\dfrac{1}{8}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|+C$;

b) $\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2-4\right|+C$;

c) $\dfrac{1}{2}arctg\dfrac{x}{2}$;

d) $\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{x}{2}+C$.

21. Вказати функцію, для якої функція $F(x)=arctg2x$ є первісною:

a) $\dfrac{1}{1+x^2}$;

b) $\frac{2}{1+4x^2}$;

c) $\frac{1}{1+4x^2}$;

d) $\frac{2}{1+x^2}$;

e) інша відповідь.

22. Вказати функцію, для якої функція $F(x)=2^{5x+1}$ є первісною:

a) 2^{5x+1};

b) $5\cdot 2^{5x+1}$;

c) $5\ln 2\cdot 2^{5x+1}$;

d) $\frac{1}{5}\ln 2\cdot 2^{5x+1}$;

e) інша відповідь.

23. Вказати функцію, для якої функція $F(x)=\arcsin 3x$ є первісною:

a) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

b) $\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$;

c) $\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$;

d) $\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}$;

e) інша відповідь.

24. Яку із вказаних замін або формул потрібно застосувати для знаходження

інтеграла $\int \frac{dx}{x\cdot \ln^2 x}$:

a) формула інтегрування частинами;

b) $t=\frac{1}{x}$;

c) $t=\ln x$;

d) $t=\ln^2 x$;

e) інша відповідь.

25. Яку із вказаних замін або формул потрібно застосувати для знаходження

інтеграла $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \cdot \sqrt{1-x^2}}$:

a) формула інтегрування частинами;

b) $t=\arcsin x$;

c) $t=tgx$;

d) $t=\cos x$;

e) інша відповідь.

26. Яку із вказаних замін або формул потрібно застосувати для знаходження

інтеграла $\int x\ln x$:

a) формула інтегрування частинами;

b) $t=\frac{1}{x}$;

c) $t=\ln x$;

d) $x=e^t$;

e) інша відповідь.

27. Яку із вказаних замін або формул потрібно застосувати для знаходження

інтеграла $\int x\cdot e^{x^2}$:

a) формула інтегрування частинами;

b) $x=\ln t$;

c) $t=x^2$;

d) $x=\frac{1}{t}$;

e) інша відповідь.

28. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=x^2$ та $y=x+6$:

a) $10\frac{2}{3}$;

b) 9;

c) 30;

d) $20\frac{5}{6}$;

e) інша відповідь.

29. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2$ та $y = 2x + 3$:

a) $10\frac{2}{3}$;

b) 9;

c) 13,5;

d) $20\frac{5}{6}$;

e) інша відповідь.

30. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 - 6x + 7$ та $y = x + 1$:

a) $10\frac{2}{3}$;

b) 9;

c) 21,5;

d) $20\frac{5}{6}$;

e) інша відповідь.

31. Яким із вказаних способів потрібно застосувати для знаходження інтеграла

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}:$$

a) за допомогою формули інтегрування частинами;

b) метод заміни;

c) табличне інтегрування;

d) використання універсальної підстановки;

e) інша відповідь.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Означення матриці. Види матриць. Дії над матрицями та їх властивості.

2. Визначники матриць другого порядку та їх властивості.

3. Визначники матриць третього порядку та їх властивості.

4. Обернена матриця. Теорема про структуру оберненої матриці.

5. Матрична форма запису систем лінійних рівнянь. Розв’язування систем матричним способом.

6. Метод Гауса та формули Крамера.

7. Поняття вектора. Види векторів. Лінійні операції над векторами та їх властивості.

8. Лінійна залежність векторів. Теореми про лінійну залежність двох, трьох, чотирьох векторів.

9. Поняття базису на площині і в просторі. Декартів базис. Координати вектора.

10. Означення скалярного добутку векторів та його властивості.

11. Вираження скалярного добутку векторів через декартові координати співмножників. Кут між векторами.

12. Означення векторного добутку векторів та його властивості.

13. Вираження векторного добутку векторів через декартові координати співмножників.

14. Поділ відрізка в даному відношенні.

15. Означення та властивості мішаного добутку векторів.

16. Вираження мішаного добутку векторів через декартові координати співмножників.

17. Пряма на площині. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

18. Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки.

19. Рівняння прямої, що проходить через дану точку паралельно даному вектору.

20. Рівняння прямої, що проходить через дану точку перпендикулярно до даного вектора.

21. Загальне рівняння прямої на площині.

22. Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих.

23. Відстань від точки до прямої (на площині).

24. Кут між двома прямими, що задані рівняннями з кутовим коефіцієнтом. Умови паралельності та перпендикулярності прямих.

25. Загальне рівняння площини. Нормальний вектор площини.

26. Рівняння площини у відрізках.

27. Рівняння площини, що проходить через три дані точки.

28. Відстань від точки до площини.

29. Канонічні та параметричні рівняння прямої (у просторі).

30. Кут між двома площинами; умови їх паралельності та перпендикулярності.

31. Кут між прямою та площиною.

32. Криві другого порядку.

33. Послідовність. Границя послідовності. Єдиність границі послідовності.

34. Границя функції в точці. Односторонні границі. Границя функції на нескінченості.

35. Основні теореми про границі. Обмежені та необмежені функції. Нескінченно малі та нескінченно великі функції, їх властивості.

36. Порівняння нескінченно малих. Еквівалентні нескінченно малі. Таблиця еквівалентних нескінченно малих.

37. Перша та друга визначні границі. Їх різні форми запису.

38. Неперервність функції в точці. Точки неперервності та точки розриву функції. Класифікація точок розриву.

39. Похідна. Її фізичний та геометричний зміст. Правила диференціювання.

40. Похідна складної та оберненої функції.

41. Похідні обернених тригонометричних функцій.

42. Таблиця похідних.

43. Похідна функції, заданої неявно. Перша та друга похідна функції, заданої параметрично.

44. Рівняння дотичної та нормалі до кривої.

45. Похідна, як відношення диференціалів.

46. Диференціал функції. Його геометричний зміст та правила знаходження. Інваріантність форми диференціала.

47. Застосування диференціала в наближених обчисленнях.

48. Поняття екстремуму функції. Умови зростання та спадання функції. Критичні точки.

49. Опуклість та угнутість функції. Точки перегину. Умови опуклості, угнутості та перегину кривої.

50. Асимптоти кривої (похилі, горизонтальні, вертикальні).

51. Загальна схема дослідження функції та побудова її графіка.

52. Правило Лопіталя. Випадки його застосування.

53. Первісна та невизначений інтеграл. Властивості невизначеного інтеграла.

54. Таблиця основних інтегралів.

55. Правила знаходження невизначених інтегралів. Методи інтегрування.

56. Інтегрування раціональних дробів та найпростіших раціональних дробів.

57. Інтегрування тригонометричних функцій за допомогою універсальної тригонометричної підстановки.

58. Інтегрування тригонометричних функцій за допомогою частинних тригонометричних підстановок (не універсальної).

59. Інтеграли виду

$$\int \cos mx \cdot \sin kx \ dx, \ \int \cos mx \cdot \cos kx \ dx, \int \sin mx \cdot \sin kx \ dx .$$

60. Поняття визначеного інтеграла.

61. Властивості визначеного інтеграла.

62. Формула Ньютона-Лейбніца.

63. Інтегрування частинами та методом підстановки у визначеному інтегралі.

64. Застосування визначеного інтеграла.

ЗАДАЧІ ПРИКЛАДНОГО СПРЯМУВАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Задача 1. Норма поливу сільськогосподарських культур м^3 на га визначається за формулою $\omega = k(b - x)$, де k – деякадодатна величина, яка залежить від властивостей ґрунту даного поля, b– максимально допустима вологість ґрунту, x – вологість ґрунту перед поливом. Побудуйте графік функції $\omega(x)$ при $k = 65$, $b = 20\%$. Яка область визначення функції? Як змінюється норма поливу із збільшенням вологості ґрунту?

Задача 2. Середній урожай люцерни залежно від глибини зрошення x характеризується залежністю $y = -0{,}028x^2 + 0{,}253x + 3{,}520$, x в см, y в ц/га. Побудувати криву врожайності на відрізку $[0; 15]$. Визначити за графіком, при яких значеннях x урожай буде найбільшим на заданому відрізку.

Задача 3. Один качан кукурудзи містить 600 зернин. Через скільки років можна одержати 150 кг кукурудзи з одного качана цього сорту, якщо відомо, що абсолютна вага (1000 зернин) кукурудзи становить 350 г.

Задача 4. Задано графічно залежності продуктивності бортового автомобіля $W_{Tб}$ і автомобіля-самоскида W_{Tc} від відстані перевезень L. Використовуючи рис. ***B***.1, дайте відповіді на питання:

1) на якій відстані продуктивності бортового автомобіля $W_{Tб}$ та автомобіля самоскида W_{Tc} однакові?

2) На якій відстані перевезень доцільніше використовувати автомобілі-самоскиди?

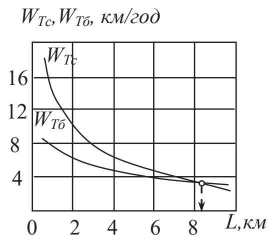

Рисунок ***B***.1

3) На якій відстані перевезень доцільніше використовувати бортові автомобілі?

Задача 5. Зерно розвантажує елеватор, стрічка якого рухається горизонтально з швидкістю v м/с і знаходиться на висоті h від поверхні землі. Знайти траєкторію руху зерна (опір повітря не враховувати). На яку відстань (по горизонталі) відлітає зерно після скидання його з елеватора?

Задача 6. Визначити залишок палива в баці трактора після його заправки (58 л) залежно від тривалості роботи, якщо при навантаженні він витрачає 8 л палива за годину, а при холостому пересуванні 4 л за годину. Знайти область визначення і область зміни функції, побудувати її графік, якщо після заправки трактор працював 4 год під навантаженням, холосте пересування після цього тривало 0,5 год, зупинка – 1 год і знову робота під навантаженням до повної витрати палива в баці.

Задача 7. Кількість хворих тварин $p(t)$ під час епідемії хвороби змінювалась з часом t (у днях) від початку вакцинації тварин за законом $p(t) = 20t/(t^2+10)$. Визначити час максимального захворювання, інтервали його зростання та спадання.

Задача 8. Нехай виробнича функція $y = -0.0031x^2 + 093x + 51.8$ відображає залежність урожайності пшениці ц/га від кількості внесеного азотного добрива кг/га. Дослідити залежність урожайності пшениці від кількості внесених азотних добрив.

Задача 9. Передбачається, що об’єм стовбура дерева пропорційний його діаметру в кубі і, що останній рівномірно збільшується щорічно з ростом дерева. Показати, що швидкість росту об’єму стовбура при діаметрі 1 м у 25 разів більше, ніж при діаметрі 20 см.

Задача 10. Агрофірма виготовляє продукцію одного виду. Витрати на виробництво x одиниць цієї продукції виражаються функцією

$$V(x) = x^3 - 40x^2 + 270x + 1800,$$

а доход, одержаний від її реалізації, – $D(x) = 126x - x^2$. Визначити, яку кількість продукції треба виготовити, щоб прибуток від її реалізації був максимальним?

Задача 11. З пункту A в напрямку до пункту B вирушає вантажна машина зі швидкістю 45 км/год. Одночасно з пункту B зі швидкістю 60 км/год вирушає легковий автомобіль у напрямку, перпендикулярному до AB. В який момент часу (від початку руху) відстань між машинами буде найменшою, якщо AB дорівнює 100 км і машини рухалися не менше 2 год.

Задача 12. З круга радіуса R потрібно вирізати сектор так, щоб з нього можна було виготовити конусоподібний фільтр з максимальним об'ємом, який використовують у хімічних лабораторіях.

Задача 13. Визначити запас продукції на овочевій базі, створений за три дні, якщо надходження продукції характеризується функцією $f(t) = 6t^2 + 6t + 3$.

Задача 14. Потреба в електроенергії фермерських господарств, починаючи з 7-ої години ранку, наближено виражається функцією $y = 300 - 7{,}7x + 0{,}6x^2$, де x – число годин. Обчисліть вартість електроенергії, що витрачається господарствами впродовж доби, якщо вартість 1 кВт год становить 24 коп.

Задача 15. Залежність густини ρ, г/см^3 легкосуглинистого ґрунту від глибини h, м до проходження трактора виражається залежністю $\rho(h) = 0{,}93 + 2h$, а після його проходження – залежністю $\rho(h) = 1{,}11 + 1{,}54h$, де $0 \le h \le 0{,}36$. Знайти приріст маси циліндричного стовпчика ґрунту, утвореного проходженням трактора і розміщеного на глибині від 0,1 м до 0,2 м, якщо твірна циліндричного стовпчика перпендикулярна поверхні ґрунту, а площа його основи 1 см^2.

Задача 16. Залежність між віком корів x (років) і добовим надоєм y (літрах) виражається виробничою функцією $y = -9{,}53 + 6{,}86x - 0{,}49x^2$. Чому дорівнює середньодобовий надій корів, якщо їх вік змінюється від 4 до 7 років?

Задача 17. Для поливу помідорів достатньо промочити шар ґрунту глибиною 30 см. Чи достатньо дощувальному агрегату стояти на одному місці 60 хв, щоб намочити ґрунт на потрібну глибину?

Задача 18. З метою економії палива водій автомобіля на тривалому прямолінійному спуску включив нейтральну передачу, в результаті чого автомобіль рухається по інерції з прискоренням 0,2 м/с^2. Чому буде дорівнювати швидкість автомобіля наприкінці спуску через 40 с з моменту вимикання двигуна, якщо через 5 с його швидкість становила 40 км/год?

Тестові завдання з курсу вищої математики

1. За теоремою про розкладання обчислюється:

a) обернена матриця;

b) <u>визначник;</u>

c) елементи матриці;

d) алгебраїчне доповнення.

2. Умовою паралельності прямих $y = k_1 x + b_1$ та $y = k_2 x + b_2$ є рівність:

a) $\dfrac{k_1}{k_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$;

b) $k_1 k_2 + b_1 b_2 = 0$;

c) $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$;

d) <u>$k_1 = k_2$.</u>

3. Кут φ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ обчислюється за формулою:

a) $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$;

b) $\sin\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$;

c) <u>$\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$;</u>

d) $\cos\varphi = \pi - \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

4. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$:

a) <u>7</u>;

b) 15;

c) -7;

d) 8.

5. Відстань від точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ до площини $Ax+By+Cz+D=0$ обчислюється за формулою:

a) $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}$;

b) $d=\dfrac{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$;

c) $d=\dfrac{\sqrt{A^2+B^2+C^2+D^2}}{|x_0^2+y_0^2+z_0^2|}$;

d) $\underline{d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$.

6. Границя $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{x^2-x}$ дорівнює:

a) ∞;

b) <u>0;</u>

c) -2;

d) 2.

7. Сума добутків елементів рядка матриці на їхні алгебраїчні доповнення дорівнює:

a) нулеві;

b) оберненій матриці;

c) <u>визначнику матриці;</u>

d) визначнику оберненої матриці.

8. Умовою перпендикулярності прямих $y=k_1x+b_1$ та $y=k_2x+b_2$ є рівність:

a) $\underline{k_1\cdot k_2=-1}$;

b) $k_1\cdot k_2=1$;

c) $\frac{k_1}{k_2} = -\frac{b_1}{b_2}$;

d) $k_1 b_2 = k_2 b_1$.

9. Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2;5)$ перпендикулярно вектору $\vec{N} = \{-3;8\}$ має вигляд:

a) $2(x+3)+5(y-8)=0$;

b) $\underline{-3(x-2)+8(y-5)=0}$;

c) $2(x-3)+5(y+8)=0$;

d) $-3(x+2)+8(y+5)=0$.

10. Площина $-3x-2y+z+4=0$ перпендикулярна до площини:

a) $3x+2y-z+5=0$;

b) $\underline{2x+2y+10z+1=0}$;

c) $2x+3y-z-4=0$;

d) $\frac{x}{-3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{1}=\frac{1}{4}$.

11. Границя: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2}{1-2x^2}$ дорівнює

a) $-\frac{4}{9}$;

b) $\underline{-\frac{3}{2}}$;

c) 0;

d) ∞.

12. Формули Крамера використовуються для:

a) знаходження оберненої матриці;

b) обчислення визначника;

c) знаходження скалярного добутку векторів;

d) <u>розв’язування системи алгебраїчних рівнянь.</u>

13. Мішаний добуток векторів $\vec{a}=\{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2; y_2; z_2\}$, $\vec{c}=\{x_3; y_3; z_3\}$ дорівнює:

a) $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$;

c) $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\times\vec{c}$;

d) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$.

14. Вектор $\vec{a}=\{3;-2;1\}$ перпендикулярний до вектора:

a) $\{0;-1;-2\}$;

b) $\{1; 1; 1\}$;

c) $\{-6; 4; -2\}$;

d) $\{3; 1; -2\}$.

15. Площина $3x+5y-2z+1=0$ паралельна площині:

a) $-3x-5y-2z-1=0$;

b) $3x-5y+2z=5$;

c) $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5}+\dfrac{z}{-2}+1=0$;

d) $-6x-10y+4z+1=0$.

16. Довжиною вектора $N\{-1;\ 2;\ 2\}$ є:

a) 5;

b) 10;

c) 1;

d) 3.

17. Границя $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2x-8}{\sin(x-4)}$ дорівнює:

a) 0;

b) 1;

c) 2;

d) ∞.

18. Нехай φ – кут між векторами $\vec{a}=\{x_1;\ y_1;\ z_1;\}$ та $\vec{b}=\{x_2;\ y_2;\ z_2;\}$. Тоді скалярним добутком цих векторів називається число, яке дорівнює:

a) $\sqrt{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}$;

b) $|\vec{a}|\cdot Пр_{\vec{a}}\vec{b}$;

c) $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$;

d) $x_1x_2+z_1y_2+y_1z_2$.

19. Квадратна матриця А не має оберненої, якщо:

a) $A\cdot A^{-1}\neq E$;

b) $\det A\neq 0$;

c) $\det A=\det A^{-1}$;

d) $\det A=0$.

20. Проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ дорівнює:

a) $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$;

b) $|\vec{b}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$;

c) $|\vec{a}|\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$;

d) $|\vec{a}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$.

21. Вектор $\vec{a}=\{2;\ -1;\ 3\}$ паралельний вектору:

a) $\{2;\ 1;\ -3\}$;

b) $\underline{\{-2;\ 1;\ -3\}}$;

c) $\{-2;\ -1;\ 3\}$;

d) $\{2;\ -1;\ -3\}$.

22. Прямі $\frac{x-1}{-2}=\frac{z+5}{2}$ та $\frac{x-1}{2}=\frac{z+5}{-2}$:

a) паралельні;

b) перпендикулярні;

c) мимобіжні;

d) <u>збігаються.</u>

23. Нормальний вектор площини $2x = y$ має вигляд:

a) $\{2;\ 1;\ 1\}$;

b) $\{2;\ -1;\ 1\}$;

c) $\underline{\{2;\ -1;\ 0\}}$;

d) $\{2;\ 0;\ 1\}$.

24. Границя $\lim\limits_{x\to 2}\frac{e^{x-2}}{x-1}$ дорівнює:

a) 0;

b) $\underline{1}$;

c) e^4;

d) ∞.

25. Перетином прямих $2x - y = 1$ та $x + y = 5$ є точка:

a) $A(3;\ 2)$;

b) $B(2;\ -1)$;

c) $\underline{C(2;\ 3)}$;

d) $D(0;\ -1)$.

26. Рівняння прямої $2x + 3y - 6 = 0$ з кутовим коефіцієнтом має вигляд:

a) $\underline{y = -\frac{2}{3}x + 2;}$

b) $3x + 2y = 1$;

c) $\frac{x}{6} + \frac{y}{-6} = 1$;

d) $3(x-1) + 2(y-1) = 1$.

27. Прямі $\frac{x-2}{3} = \frac{y-5}{4} = \frac{z+7}{-10}$ та $\frac{x-2}{-6} = \frac{y-5}{-8} = \frac{z+7}{20}$:

a) паралельні;

b) <u>збігаються;</u>

c) мимобіжні;

d) перпендикулярні.

28. Направляючий вектор прямої $\frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-4}{1}$ паралельний вектору:

a) $\{-5; 1; -4\}$;

b) $\{5; -1; 4\}$;

c) $\{6; -4; -1\}$;

d) $\underline{\{-6;\ 4;\ -2\}.}$

29. Границя $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{2 - x}$ дорівнює:

a) ∞;

b) 4;

c) $\underline{-4};$

d) 0.

30. Для того, щоб вектори були колінеарні, необхідно, щоб:

a) їх скалярний добуток дорівнював нулеві;

b) їхній мішаний добуток дорівнював нулеві;

c) <u>їх координати були пропорційні;</u>

d) сума добутків їх відповідних координат дорівнювала нулеві.

31. Відстань від точки $M_0(x_0;\ y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ дорівнює:

a) $|Ax_0 + By_0 + C|$;

b) $\dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$;

c) $\dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$;

d) $\sqrt{Ax_0 + By_0 + C}$.

32. Пряма $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+5}{4}$ проходить через точку:

a) $M_1(3;\ 4)$;

b) $M_2(-2;\ 5)$;

c) $M_3(-3;\ -4)$;

d) $M_4(2;\ -5)$.

33. Площина $3x - 2y + z - 5 = 0$ містить точку:

a) $M_1(-1; 2; -6)$;

b) $M_2(2; -1; 6)$;

c) $M_3(0; 0; 2)$;

d) $M_4(1; -1, 0)$.

34. Відстань від початку координат до точки, в якій площина $3x - 2y - 5z + 15 = 0$ перетинає вісь Oz дорівнює:

a) 3;

b) 2;

c) 5;

d) 15.

35. Границя $\lim\limits_{x \to 0} 3\dfrac{x}{\sin 3x}$ дорівнює:

a) 0;

b) $\frac{1}{3}$;

c) $\frac{1}{9}$;

d) $\underline{1}$.

36. Векторний добуток вектора $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ на вектор $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ обчислюється за формулою:

a) $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$;

b) $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$;

c) $\sqrt{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$;

d) $\underline{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.}$

37. Для того, щоб вектори $\vec{a} = \{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ та $\vec{b} = \{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ були перпендикулярні, необхідно, щоб:

a) $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$;

b) $\underline{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0}$;

c) $Пр_{\vec{b}}\vec{a} = 0$;

d) $|\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi = 0$.

38. Відносно прямої $3x - 4y + 1 = 0$ вектор $\vec{s} = \{3;\ -4\}$ є:

a) паралельним;

b) <u>перпендикулярним;</u>

c) належить прямій;

d) утворює з нею тупий кут.

39. Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(4;\ -3)$ паралельно вектору $\vec{s} = \{-5;\ 2\}$ має вигляд:

a) $\frac{x-4}{-5}=\frac{y+3}{2}$;

b) $\frac{x+4}{-5}=\frac{y-3}{2}$;

c) $\frac{x-5}{4}=\frac{y+2}{-3}$;

d) $\frac{x+5}{4}=\frac{y-2}{-3}$.

40. Довжина нормального вектора площини $(x-2)+3(y+2)-3(z+3)=0$ дорівнює:

a) $\sqrt{17}$;

b) $\sqrt{19}$;

c) $\sqrt{7}$;

d) $2\sqrt{3}+1$.

41. На прямій $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{-4}=\frac{z+5}{6}$ лежить точка:

a) $A_1(2;\ 0;\ -5)$;

b) $A_2(2;\ 1;\ -5)$;

c) $A_3(3;\ -4;\ 6)$;

d) $A_4(-3;\ 4;\ -6)$.

42. Кут між прямими $2x-y+5=0$ та $-3x-6y+1=0$ дорівнює:

a) 90^0;

b) 0^0;

c) 45^0;

d) 60^0.

43. Який з векторів має одиничну довжину:

a) $\{1;\ 1;\ 1\}$;

b) $\{0;\ 1;\ 1\}$;

c) $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}};\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$;

d) $\left\{\frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right\}$.

44. На перетині двох площин $2(x-1)-5(y+6)+3(z-4)=0$ та $x-y+z-12=0$ лежить точка:

a) $M_1(1;\ -6;\ 4)$;

b) $M_2(2;\ -5;\ 3)$;

c) $\underline{M_3(2;\ -5;\ 5)}$;

d) $M_4(-1;\ 6;\ -4)$.

45. Відстань від точки $M_0(2;\ 3;\ -5)$ до площини Oxy дорівнює:

a) $\sqrt{2^2+3^2+(-5)^2}$;

b) $|2+3-5|$;

c) $\sqrt{2^2+3^2}$;

d) $\underline{5.}$

46. Границя $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$ дорівнює:

a) 0;

b) ∞;

c) $\underline{3}$;

d) 1.

47. Модуль векторного добутку $\vec{a}\times\vec{b}$ дорівнює:

a) $|\vec{a}|\times|\vec{b}|$;

b) <u>площі паралелограма, побудованого на векторах</u> $\vec{a}$ та $\vec{b}$;

c) $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$;

d) $np_{\vec{b}}\vec{a}$.

48. Рівняння прямої що проходить через точки $A(5;\ -2)$ та $B(1;\ 1)$ має вигляд:

a) $5(x-1)-2(y-1)=0$;

b) $\frac{x-1}{5}=\frac{y-1}{-2}$;

c) $\frac{x-5}{-4}=\frac{y+2}{3}$;

d) $1\cdot(x-5)+1(y+2)=0$.

49. Вектор $\vec{a}=\{4;\ -6\}$ вдвічі довший за вектор:

a) $\{4;\ 4\}$;

b) $\{-2;\ 3\}$;

c) $\{2;\ -3\}$;

d) $\{16;\ -24\}$.

50. Дано точки $A(2;\ 1;\ -3)$, $B(4;\ 2;\ -2)$ та площину $2x+y+z-8=0$.

Вектор $\vec{AB}$:

a) перпендикулярний до площини;

b) паралельний площині;

c) його початок належить площині;

d) його кінець належить площині.

51. Площина $2x-3y+6z+30=0$ перетинає вісь Oy в точці:

a) $A_1(2;\ 0;\ 6)$;

b) $A_2(0;\ -10;\ 0)$;

c) $A_3(2;\ -3;\ 6)$;

d) $A_4(0;\ 10;\ 0)$.

52. Границя $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,3x}{5x}$ дорівнює:

a) $\frac{9}{5}$;

b) 0;

c) $\frac{3}{5}$;

d) $\frac{1}{15}$.

53. Для того, щоб три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ були компланарні необхідно, щоб:

a) їх координати компланарні;

b) вони лежали на одній прямій;

c) їх скалярний добуток дорівнював нулеві;

d) їх мішаний добуток дорівнював нулеві.

54. Вектор $\vec{s} = \{2;\ -7\}$ паралельний прямій:

a) $\frac{x+4}{7} = \frac{y-5}{-2}$;

b) $\frac{x+4}{2} = \frac{y-5}{-7}$;

c) $\frac{x-2}{1} = \frac{y+7}{-1}$;

d) $\frac{x-2}{-7} = \frac{y+7}{2}$.

55. Дві прямі $\frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{-1}$ та $\frac{x-5}{4} = \frac{y+8}{-1}$:

a) паралельні;

b) перпендикулярні;

c) збігаються;

d) мимобіжні.

56. Два вектори $\vec{a}\{3;\ 4;\ 0\}$ $\vec{b}\{-4;\ 3;\ -2\}$:

a) не паралельні;

b) паралельні;

c) перпендикулярні;

d) однакової довжини.

57. Дано точки $A(2;\ 1;\ -4)$, $B(3;\ 2;\ -2)$. Вектор $\vec{AB}$ перпендикулярний до площини:

a) $\underline{x+y+2z+3=0}$;

b) $2x+y-4z+3=0$;

c) $3x+2y-2z+3=0$;

d) $x+y-2z+3=0$.

58. Границя $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+1}{2x^2-1}$ дорівнює:

a) $\dfrac{3}{2}$;

b) ∞;

c) $\underline{4}$;

d) 2.

59. Відстань від точки $M_0(4;\ 3;\ 0)$ до початку координат $O(0;\ 0;\ 0)$ дорівнює:

a) 7;

b) 4;

c) 3;

d) $\underline{5}$.

60. Скалярний добуток векторів $\vec{a}\{3;\ 1\}$, $\vec{b}\{5;\ -2\}$ дорівнює:

a) $\underline{13}$;

b) 10;

c) 7;

d) -1.

61. Модуль векторного добутку векторів $\vec{a}\{3;\ 1\}$, $\vec{b}\{5;\ -2\}$ дорівнює:

a) 3;

b) 5;

c) 7;

d) $\underline{11}$.

62. Відстань від осі OX до прямої $y=2$ дорівнює:

a) 1;

b) $\underline{2}$;

c) 3;

d) 4.

63. Одиничним називається вектор:

a) його довжина рівна 1;

b) усі координати рівні 1;

c) усі координати рівні 0;

d) одна координата рівна 1, а друга рівна –1.

64. Границя $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg\, 6x}{2x}$ дорівнює:

a) 6;

b) 2;

c) 3;

d) 1.

65. Границя $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x}$ дорівнює:

a) 0;

b) 1;

c) -1;

d) ∞.

66. Відстань між точками $A(1;\, 1)$ і $B(4;5)$ дорівнює:

a) 1;

b) 3;

c) 5;

d) 7.

67. Відстань між паралельними площинами $z = 0$ і $z = 4$ дорівнює:

a) 2;

b) 4;

c) 16;

d) 64.

68. Мимобіжними називаються прямі:

a) паралельні;

b) перпендикулярні;

c) <u>не паралельні і не перетинаються</u>;

d) не паралельні і перетинаються.

69. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$:

a) <u>26</u>;

b) 16;

c) 5;

d) –4.

70. При додаванні відповідних чисел двох довільних рядків визначника його значення:

a) збільшиться;

b) зменшиться;

c) <u>не зміниться</u>;

d) подвоїться.

71. Довжина векторного добутку векторів $\vec{a} = \{1;1;1\}$ та $\vec{b} = \{-2;-2;-2\}$ дорівнює:

a) <u>0</u>;

b) 1;

c) 2;

d) 4.

72. Границя константи дорівнює:

a) 0;

b) ∞;

c) <u>константі</u>;

d) не існує.

73. Якщо вектор $\vec{a} = \{1;-2;2\}$, тоді вектор $2\vec{a}$ буде:

a) $\{2;-2;2\}$;

b) $\{1;1;1\}$;

c) $\{-2;4;-4\}$;

d) $\underline{\{2;-4;4\}}$.

74. Векторний добуток $\vec{i} \times \vec{j}$ дорівнює:

a) 0;

b) 1;

c) ∞;

d) $\underline{\vec{k}}$

75. Скалярний добуток ($\vec{i}$ $\vec{j}$) дорівнює:

a) <u>0</u>;

b) 1;

c) ∞;

d) 2.

76. Яка точка належить прямій $2x+3y-6=0$:

a) $M_1(2;\ 3)$;

b) $\underline{M_2(0;\ 2)}$;

c) $M_3(0;\ 3)$;

d) $M_4(6;\ 0)$.

77. Яка точка належить площині $x+y+z-3=0$:

a) $\underline{M_1(1;\ 1;1)}$;

b) $M_2(-1;1;1)$;

c) $M_3(0;\ 1;-1)$;

d) $M_4(2;\ 5;1)$.

78. Визначник $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$ дорівнює:

a) 3;

b) 15;

c) <u>0</u>;

d) -7.

79. Рівність $tg\, x \approx x$ діє, коли:

a) $x \to 1$;

b) $\underline{x \to 0}$;

c) $x \to -1$;

d) $x \to \infty$.

80. Три вектори компланарні, якщо;

a) взаємно перпендикулярні;

b) усі три одиничні;

c) усі лежать в одній площині;

d) утворюють базис.

81. Похідна функції $y = \cos^3 x$ дорівнює:

a) $\underline{-3\cos^2 x \cdot \sin x}$;

b) $3\sin^2 \cos x$;

c) $\dfrac{\cos^4 x}{4}$;

d) $\dfrac{\cos^2 x}{3}$.

82. Інтеграл $\int \frac{1}{\sin^2(3x+1)}dx$ дорівнює:

a) $ctg(3x+1)+C$;

b) $tg(3x+1)+C$;

c) $-3ctg(3x+1)+C$;

d) $\underline{-\dfrac{1}{3}ctg(3x+1)+C}$.

83. Похідна функції $y = tg^5 x$ дорівнює:

a) $5tg^4 x$;

b) $\dfrac{tg^6 x}{6}$;

c) $\frac{tg^4 x}{4}$;

d) $5tg^4 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$.

84. Інтеграл $\int \sqrt{1+x}dx$ дорівнює:

a) $\frac{1}{2\sqrt{1+x}} + C$;

b) $\frac{(1+x)^{3/2}}{3/2} + C$;

c) $\frac{1}{2}\sqrt{1+x} + C$;

d) $\frac{(1+x)^{2/3}}{2/3} + C$.

85. Похідна функції $y = e^{-3x}$ дорівнює:

a) $\frac{e^{-3x+1}}{-3x+1}$;

b) $\frac{e^{-3x-1}}{-3x-1}$;

c) $-3e^{-3x}$;

d) $\frac{e^{-3x}}{-3}$.

86. Інтеграл $\int \sin^4 x \cdot \cos x dx$ дорівнює:

a) $\frac{\sin^5 x}{5} + C$;

b) $\frac{\cos^5 x}{5} + C$;

c) $4\sin^3 x + C$;

d) $4\cos^3 x + C$.

87. Похідна функції $y = \arcsin 3x$ дорівнює:

a) $3\arccos x$;

b) $\frac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}$;

c) $3\arcsin x$;

d) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

88. Інтеграл $\int \sin^4 x \cdot \cos x dx$ дорівнює:

a) $\frac{\sin^5 x}{5} + C$;

b) $\frac{arctg^3 x}{3}$;

c) $\frac{2}{1+x^2}$;

d) $2\, arctg\, x$.

89. Похідна функції $y = arctg^2 x$ дорівнює:

a) $\frac{2arctg\ x}{1+x^2}$;

b) $\frac{arctg^3 x}{3}$;

c) $\frac{2}{1+x^2}$;

d) $2\, arctg\, x$.

90. Інтеграл $\int tg^3 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$ дорівнює:

a) $\frac{tg^4 x}{4} + C$;

b) $3tg^2 x + C$;

c) $\frac{1}{3} tg^4 x + C$;

d) $\frac{tg^2 x}{2} + C$.

91. Інтеграл $\int \frac{1}{x^2} dx$ дорівнює:

a) $-\frac{1}{x}+C$;

b) $\frac{x^{-3}}{-3}+C$;

c) $\ln^2 x+C$;

d) $\frac{x^3}{3}+C$.

92. Інтеграл $\int \cos(1-2x)dx$ дорівнює:

a) $2\sin(1-x)+C$;

b) $-4\sin(1-2x)+C$;

c) $-\frac{1}{2}\sin(1-2x)+C$;

d) $\frac{1}{4}\sin(1-2x)+C$.

93. Похідна функції $y=\ln(5x+1)$ дорівнює:

a) $\frac{1}{x+1}$;

b) $\frac{5}{x+1}$;

c) $\frac{5}{5x+1}$;

d) $\frac{5\ln^2(5x+1)}{2}$.

94. Інтеграл $\int \sin(2x-3)dx$ дорівнює:

a) $-\frac{1}{2}\cos(2x-3)+C$;

b) $2\cos(2x-3)+C$;

c) $\frac{1}{4}\sin^2(2x-3)+C$;

d) $2\cos(x-3)+C$

95. Похідна функції $y=ctg(4x+1)$ дорівнює:

a) $-\frac{4}{\sin^2(4x+1)}$;

b) $-\frac{4}{\cos^2(4x+1)}$;

c) $\frac{1}{\sin^2(4x+1)}$;

d) $-\frac{4}{\sin^2(x+1)}$.

96. Інтеграл $\int \frac{1}{3x+5}dx$ дорівнює:

a) $\frac{(3x+5)^{-2}}{-2}+C$;

b) $\frac{1}{3}\ln(3x+5)+C$;

c) $3\ln(3x+5)+C$;

d) $arctg\frac{5}{3}x+C$.

97. Похідна функції $y=\cos(\ln x)$ дорівнює:

a) $\frac{\cos^2(\ln x)}{2}$;

b) $-\frac{\sin(\ln x)}{x}$;

c) $\sin(\ln x)$;

d) $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

98. Похідна функції $y=\ln(\sin x)$ дорівнює:

a) $tg\,x$;

b) $ctg\,x$;

c) $\frac{1}{\sin x}$;

d) $\frac{1}{\cos x}$.

99. Інтеграл $\int e^{-5x}\,dx$ дорівнює:

a) $\underline{-\frac{e^{-5x}}{5}+C}$;

b) $\frac{e^{-5x+1}}{-5x+1}+C$;

c) $\frac{e^{-5x-1}}{-5x-1}+C$;

d) $-5e^{-5x}+C$.

100. Точка $x_1=1$ для функції $y=x^2-2x$ є точкою:

a) максимуму;

b) <u>мінімуму;</u>

c) перегину;

d) розриву.

Примітка: *в усіх тестах серед варіантів відповідей підкреслено правильну відповідь до даного тесту.*

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бабенко В.В., Зіневич А.Г., Кічура С.М., Тріщ Б.М., Цаповська Ж.Я. Збірник задач з вищої математики. Львів: Вид. ЛНУ ім. І.Франка, 2005. 256 с.

2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. Москва: Наука, 1975. 416 с.

3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Москва: Наука, 1988.240 с.

4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. Москва: Наука, 1988. 432 с.

5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения, интегралы, ряды, функции комплексного переменного.Москва: Наука, 1989. 464 с.

6. Валєєв К.Г., Джалладова І.А. Вища математика: навч. посіб. Ч. 1: Київ: КНЕУ, 2001. 546 с.

7. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике Москва: Наука, 2003. 870 с.

8. Збірник задач з вищої математики /За ред. Ф. С. Гудименка. Київ: КУ, 1967. 352 с.

9. Данко П.Е. Попов А.Г. Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1: учеб. пособие. Москва: Высшая школа, 1986. 304 с.

10. Задачи и упражнения по математическому анализу / под ред. Б.П. Демидовича. Москва: Наука, 1968. 472 с.

11. Дубовик В.П. Юрик І.І. Вища математика: навч. посіб. для студ. вузів. Київ: Вища школа, 1993. 648 с.

12. Дубчак В.М., Пришляк В.М., Новицька Л.І. Вища математика в прикладах та задачах: навч. посіб. Вінниця: ВНАУ, 2018. 254 с.

13. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю.. Михалін Г.О. Вища математика: приклади і задачі. Київ: Академія, 2003. 624 с.

14. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. Москва: Наука, 1975. 272 с.

15. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. Ч. 1. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве: учеб. пособие 5-е изд. Харьков: ХГУ, 1973. 203 с.

16. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. Ч. 2: Дифференциальное исчисление функций одной и многих независимых переменных: учеб. пособие 5-е изд. Харьков: ХГУ, 1973. 367 с.

17. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. Ч. 3: Интегральное исчисление функции одной независимой переменной. Интегрирование дифференциальных уравнений: учеб. пособие4-е изд. Харьков: ХГУ, 1974. 375 с.

18. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. Ч.4. Кратные и криволинейные интегралы: учеб. пособие 2-е изд. Харьков: ХГУ, 1971. 498 с.

19. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. Москва: Наука, 1986. 224 с.

20. Клепко В.Ю. Голець В.Л. Вища математика в прикладах і задачах: навч. посібн. Київ: ЦУЛ, 2009. 592 с.

21. Коваленко І.П. Вища математика: навч. посіб. Київ: Вища школа, 2006. 624 с.

22. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики / под ред. Г.И. Кручковича. Москва: Высш., шк., 1970. 512 с.

23. Кудрявцев В.А. Краткий курс высшей математики: учеб. пособие для студ. вузов. Москва: Наука, 1975. 624 с.

24. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. Москва: Наука, 1985. 576 с.

25. Вища математика: підручник. Кн. 1. Основні розділи / За ред. Г.Л. Кулініча. Київ: Либідь, 2003. 400 с.

26. Вища математика: підручник. Кн. 2. Спеціальні розділи/ За ред. Г.Л.

Кулініча. Київ:Либідь, 2003. 368 с.

27. Левчук О.В., Новицька Л.І. Вища математика: методичні рекомендації для проведення практичних занять та самостійної підготовки здобувачів першого (бакалаврського) рівня освіти галузей знань – 13 «Механічна інженерія», 14 «Електрична інженерія», спеціальностей – 133 «Галузеве машинобудування», 141 «Електроенергетика, електротехніка, електромеханіка» денної та заочної форм навчання. Вінниця: ВНАУ, 2019. 53 с.

28. Минин Н.А. Перевозников А.Ю. Черенков А.А. Чинаев П.И. Высшая математика. Київ: Вища школа, 1981. 368 с.

29. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие для вузов. Москва: Наука. 1987. 352 с.

30. Мисюркеев Й.В. Сборник задач по методам математической физики.Москва: Просвещение, 1975. 220 с.

31. Михайленко В.В., Добряков Л.Д., Головня Р.М. Вища математика. Книга 2. Диференціальне числення функцій однієї та кількох змінних: навч. посіб. Житомир: ЖДТУ, 2012. 576 с.

32. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. СПб: Лань, 2001. 736 с.

33. Новицька Л.І. Левчук О.В. Вища математика. Частина ІІ: методичні вказівки для проведення практичних занять та самостійної підготовки здобувачів першого (бакалаврського) рівня освіти галузей знань – 13 «Механічна інженерія», 14 «Електрична інженерія», спеціальностей – 133 «Галузеве машинобудування», 141 «Електроенергетика, електротехніка, електромеханіка». Вінниця: ВНАУ, 2017. 115 с.

34. Новицька Л.І., Хрипко Т.Є. Вища математика. методичні рекомендації для проведення практичних занять та самостійної підготовки здобувачів першого (бакалаврського) рівня освіти галузей знань – 13 «Механічна інженерія», 14 «Електрична інженерія», спеціальностей – 133 «Галузеве машинобудування», 141 «Електроенергетика, електротехніка,

електромеханіка» денної та заочної форм навчання. Вінниця: ВНАУ, 2019. 141 с.

35. Овчинников П.Ф. Овчинников П.Ф. Яремчук Ф.П. Михайленко В.М. Высшая математика: учеб. пособие для студ. втузов. Київ: Вища освіта, 1987. 552 с.

36. Рудавський Ю.К. та ін. Математичний аналіз: навч. посібник. Львів: Вид. НУ «Львівська політехніка», 2002. 404 с.

37. Пак В.В. Носенко Ю.Л. Вища математика: підручник. Донецьк: Сталкер, 2003. 496 с.

38. Пак В.В., Носенко Й.Л. Вища математика. К: Либідь, 1996.440 с.

39. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 1, 2. Москва: Наука, 1985. – 580 с., 602 с.

40. Привалов И.И. Аналитическая геометрия. Москва: Наука,1961. 300 с.

41. Призва Г.Н., Плахотник В.В., Гординський Л.Д. та ін. Вища математика:підручник. Ч. 1. Основні розділи. Київ: Либідь, 2003. 400 с.

42. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. Київ: Вища школа, 1994. 454 с.

43. Сизоненко В.Л., Чібісов Д.В., Коваленко М.Й., Масленніков Д.І. Вища математика: навч. посіб. для студ. аграр. вузів. Харків: ХДАУ, 1999. 106 с.

44. Стрижак Т.Г., Коновалова Н.Р. Математический анализ. Київ: Либідь, 1995. 240 с.

45. Соколенко О.І. Вища математика: підруч. для студ. вузів. Київ: Академія, 2003. 432 с.

46. Тевяшов А.Д. Вища математика. Харків: ХТУРЕ, 1997. 192 с.

47. Турчанінова Л.І., Доля О.В. Практикум із вищої математики: підруч. для студ. вищ. навч. закл. Київ: Кондор, 2010. 172 с.

48. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика: Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної. Ряди. Київ: Либідь, 2004. 251 с.

49. Щипачев В.С. Высшая математика. Москва: Высшая школа, 1985. 479 с.

Навчальне видання

Новицька Людмила Іванівна
Хрипко Тетяна Єлисеївна

ВИЩА МАТЕМАТИКА
Частина I

Навчальний посібник

27

50