

УДК 621

О. С. Ланець¹, В. М. Боровець¹, І. А. Деревенько²¹Національний університет "Львівська політехніка", кафедра механіки та автоматизації машинобудування, Інститут інженерної механіки і транспорту,²Вінницький національний аграрний університет, кафедра загальнотехнічних дисциплін та охорони праці, факультет механізації сільського господарства

УТОЧНЕННЯ АНАЛІТИЧНИХ ВИРАЗІВ ДЛЯ ВСТАНОВЛЕННЯ ІНЕРЦІЙНО-ЖОРСТКІСНИХ ПАРАМЕТРІВ ДВОМАСОВИХ РЕЗОНАНСНИХ ВІБРАЦІЙНИХ МАШИН

О. Ланець О. С., Боровець В. М., Деревенько І. А., 2018

Мета полягає у синтезі інерційно-жорсткісних параметрів двомасових резонансних вібраційних машин з урахуванням взаємовпливу жорсткісних параметрів у коливальних системах. **Актуальність.** Потреба в цих дослідженнях зумовлена тим, що на роботу вібраційної машини взаємно впливають параметри коливальної системи, основними з яких є інерційні, жорсткісні та силові. Якщо правильно їх розрахувати і реалізувати в конструкції вібраційної машини, вона буде роботоздатною. Неврахування одного виду параметрів спричиняє похибку під час розрахунків. **Методика.** Уточнюють аналітичні вирази за класичними підходами до лінійних коливальних систем із гармонійним збуренням. Для цього розглядають фізичну модель двомасової резонансної коливальної системи та складають її математичну модель у вигляді системи лінійних диференціальних рівнянь. На основі цього формується розв'язок (значення амплітуд коливань). Невідомими параметрами залишаються жорсткісні, за умови, що інерційні конструктивно задано. Тож, використовуючи детермінант матриці коефіцієнтів при невідомих, проводяться необхідні математичні операції, що задовольняють накладені умови із встановлення жорсткісних параметрів. **Результати.** Отримано низку аналітичних виразів, в яких враховано взаємовплив жорсткісних параметрів в системі. Порівняно отримані результати згідно з уточненими виразами та класичними аналітичними виразами. Встановлено, що значення запропонованих виразів не суттєво відрізняється від класично визначених, а тому для інженерних розрахунків достатньо використовувати існуючі вирази. Запропоновані вирази є точнішими, а тому їх рекомендується використовувати під час наукових досліджень. **Наукова новизна.** Вперше вдалось синтезувати аналітичні вирази для встановлення інерційно-жорсткісних параметрів, що дають змогу точніше розраховувати двомасові резонансні коливальні системи. Встановлено, що за правильного вибору резонансних налагоджень у системі взаємовплив жорсткісних параметрів у системі незначний, а тому науково обґрунтовано можна використовувати класичні підходи. **Практична значущість.** Встановлені аналітичні вирази можуть широко застосовуватись під час проектування вібраційного технологічного обладнання. Прозорість виведення та відносна простота запропонованих аналітичних виразів сприяє їх широкому використанню на практиці.

Ключові слова: двомасова коливальна система, інерційно-жорсткісні параметри, вібраційна машина.

Вступ. Вібраційна машина – це складна динамічна система, роботу якої описано диференціальними рівняннями. Заклавши в них параметри машини і розв'язавши ці рівняння, отримуємо графічні залежності коливальних рухів мас системи в усталених та перехідних режимах роботи, за якими можемо встановити, чи розвиваються закладені під час проектування характеристики. По суті, роботу вібраційної машини визначають параметри системи, основними з яких для нас є інерційні, жорсткісні та силові. Якщо правильно їх розрахувати і реалізувати в конструкції вібраційної машини, вона буде роботоздатною.

Практично усі параметри системи розраховують за аналітичними залежностями. Одним з вихідних матеріалів для їх встановлення є диференціальні рівняння. Саме за ними виводять основну аналітику, яка формує визначальні параметри системи, що задовольняють умови роботи вібромашини. Тож параметри є вирішальними, адже саме вони формують роботу вібромашини.

Конструктивну реалізацію виконують, перетворюючи розрахункові параметри на геометричні. Якщо це виконано коректно, вібромашина буде роботоздатною.

Тому для того, щоб вивести аналітичні залежності, які надалі використовуватимемо під час розрахунків, ми повинні підійти до формування диференціальних рівнянь. Цього можна було б уникнути і навести готові вирази, але без цього грамотно розрахувати вібраційну машину неможливо.

Аналіз літературних джерел за темою статті. Існує багато праць, пов'язаних зі встановленням інерційно-жорсткісних параметрів коливальних систем для вібраційних машин. Так, професор М. В. Медвідь у праці [1] надає аналітичний вираз, що пов'язує між собою віброізоляційну та резонансну жорсткості, проте чіткого (незалежного) їх встановлення не наведено. Це ж стосується і досліджень авторів В. О. Баумана та І. І. Биховського [2] та професора І. І. Назаренка [3]. На відміну від уже згаданих науковців, професори І. Ф. Гончаревич та Л. П. Стрельников [4] обмежились лише встановленням параметрів без врахування жорсткості віброізоляторів. У дослідженнях А. Н. Рабіновича, В. О. Яхимовича, Б. Ю. Боечка (праця [5]) увагу зосереджено лише на встановленні значення резонансної жорсткості, а вплив на неї віброізоляційної не розглядали. Комплексного ж підходу до встановлення інерційно-жорсткісних параметрів перерахованими авторами не було остаточно сформовано. А звідси висновок: розрахунки мали досить наближений характер.

Мета. Тож метою роботи є синтез інерційно-жорсткісних параметрів двомасових резонансних вібраційних машин із врахуванням взаємовпливу жорсткісних параметрів у коливальних системах. По суті, планується запропонувати уточнені аналітичні вирази, що забезпечать достовірне встановлення взаємопов'язаних параметрів.

Методика проведення досліджень

Математична модель двомасової системи з електромагнітним приводом. Складемо систему диференціальних рівнянь руху двомасової коливальної системи (рис. 1), використовуючи узагальнені рівняння Лагранжа II роду. Розглядаючи лише прямолінійні коливання вздовж осі x , можемо виділити дві узагальнені (незалежні одна від одної) координати x_1 та x_2 , що повністю описують рух системи. Дві координати – отже, два диференціальні рівняння, які загалом запишемо так:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}_1(t)} \right) - \frac{\partial K}{\partial x_1(t)} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial x_1(t)} - \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1(t)} + P_{x1}; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}_2(t)} \right) - \frac{\partial K}{\partial x_2(t)} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial x_2(t)} - \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2(t)} + P_{x2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Повна кінетична енергія K системи дорівнює сумі кінетичних енергій K_1 та K_2 відповідно коливальних мас m_1 та m_2 . Оскільки маси перебувають у прямолінійному русі, матимемо

$$K = K_1 + K_2 = \frac{m_1 \dot{x}_1(t)^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2(t)^2}{2}. \quad (2)$$

Вважаємо, що початковий стан системи – стан спокою, коли система, встановлена на віброізоляторах жорсткістю c_{i3} , просіла на величину статичної деформації δ_{cm} за дії власної сили ваги $F_G = (m_1 + m_2)g$. Під час встановлення сумарної потенціальної енергії Π системи реакцію віброізоляторів від просідання коливальної системи та силу ваги, як такі, що взаємно компенсуються, не враховуємо. Потенціальну енергію визначаємо лише за деформаціями пружних вузлів, спричиненими процесами коливань, а саме

$$\Pi = \frac{1}{2} c_{12} (x_1(t) - x_2(t))^2 + \frac{1}{2} c_{i3} x_1(t)^2. \quad (3)$$

Дисипативну функцію D системи, припускаючи, що розсіювання енергії пропорційне до швидкості, розраховуємо за виразом

$$D = \frac{1}{2} \mu_{12} (\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t))^2 + \frac{1}{2} \mu_{i3} \dot{x}_1(t)^2. \quad (4)$$

Вважатимемо, що $m_1 = m_{po} + m_{np}$, тобто маса m_1 є робочою, і в її інерційному значенні уже закладена частка m_{np} маси середовища завантаження $m_{зав}$, що умовно приєднується до робочого органа; коефіцієнт опору $\mu_{зав}$, що відображає втрати енергії на роботу над середовищем, входить до коефіцієнта μ_{i3} .

Узагальненими силами P_{x1} та P_{x2} за координатами x_1 та x_2 буде гармонійна сила збурення $F_0 \sin(\omega t)$ електромагнітного віброзбуджувача. Тож:

$$P_{x1} = -F(t) = -F_0 \sin(\omega t); \quad P_{x2} = F(t) = F_0 \sin(\omega t). \quad (5)$$

Використовуючи (2), (3) та (4), знаходимо складові системи рівнянь (1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial \dot{x}_1(t)} = m \dot{x}_1(t); \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}_1(t)} \right) = m \ddot{x}_1(t); \quad \frac{\partial K}{\partial x_1(t)} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial x_1(t)} = c_{12} (x_1(t) - x_2(t)) + c_{i3} x_1(t); \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1(t)} = \mu_{12} (\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) + \mu_{i3} \dot{x}_1(t); \quad \frac{\partial K}{\partial \dot{x}_2(t)} = m \dot{x}_2(t); \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}_2(t)} \right) = m \ddot{x}_2(t); \quad \frac{\partial K}{\partial x_2(t)} = 0; \quad (6) \\ \frac{\partial \Pi}{\partial x_2(t)} = c_{12} (x_2(t) - x_1(t)); \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2(t)} = \mu_{12} (\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)). \end{aligned}$$

Якщо підставити вирази (5) та (6) до рівняння (1), система диференціальних рівнянь руху двомасової системи (рис. 1) набуде вигляду:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1(t) + c_{12} (x_1(t) - x_2(t)) + c_{i3} x_1(t) + \mu_{12} (\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) + \mu_{i3} \dot{x}_1(t) = -F_0 \sin(\omega t); \\ m_2 \ddot{x}_2(t) + c_{12} (x_2(t) - x_1(t)) + \mu_{12} (\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)) = F_0 \sin(\omega t). \end{cases} \quad (7)$$

Надалі, щоб скоротити запис, часової залежності координат та їхніх похідних наводити не будемо. Розв'язок системи (7), загалом шукатимемо у виглядах:

$$x_1(t) = X_1 \sin(\omega t - Z_1); \quad x_2(t) = X_2 \sin(\omega t - Z_2), \quad (8)$$

тобто вважатимемо, що коливання мас системи здійснюватимуться за гармонійним законом, як це і є насправді. Зобразимо вектори сил складових (7) на діаграмі (рис. 2) та спроекуємо їх на координатні осі x та y .

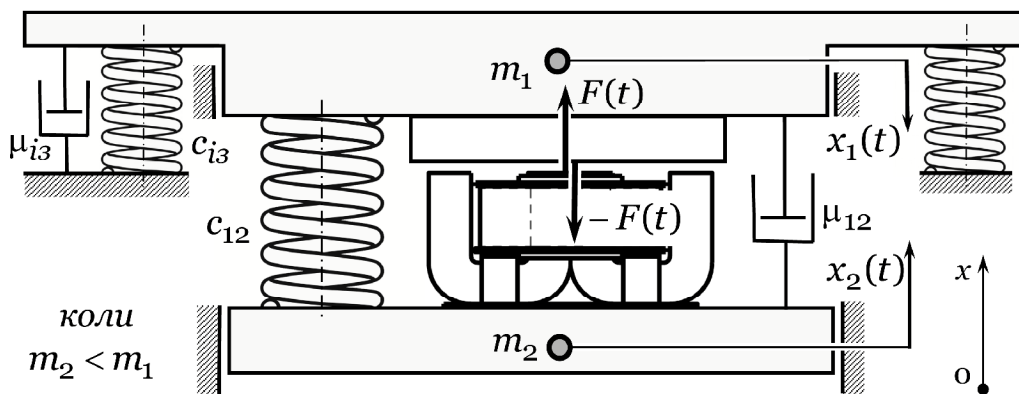


Рис. 1. Принципові схеми двомасових коливальних систем з електромагнітним приводом

Проекції сил в амплітудних значеннях по осях розподіляться так:

– для маси m_1 , користуючись рис. 2, а:

$$\Sigma x: -F_0 - m_1 X_1 \omega^2 \cos Z_1 + c_{i3} X_1 \cos Z_1 + c_{12} (X_1 - X_2) \cos Z_1 - \\ + \mu_{i3} X_1 \omega \cos (\pi/2 - Z_1) + \mu_{12} (X_1 - X_2) \omega \cos (\pi/2 - Z_1) = 0;$$

$$\Sigma y: -m_1 X_1 \omega^2 \sin Z_1 + c_{i3} X_1 \sin Z_1 + c_{12} (X_1 - X_2) \sin Z_1 - \\ - \mu_{i3} X_1 \omega \sin (\pi/2 - Z_1) - \mu_{12} (X_1 - X_2) \omega \sin (\pi/2 - Z_1) = 0;$$

– для маси m_2 , користуючись рис. 2, б:

$$\Sigma x: F_0 + m_2 X_2 \omega^2 \cos Z_2 - c_{12} (X_2 - X_1) \cos Z_2 - \mu_{12} (X_2 - X_1) \omega \cos (\pi/2 - Z_2) = 0;$$

$$\Sigma y: m_2 X_2 \omega^2 \sin Z_2 - c_{12} (X_2 - X_1) \sin Z_2 + \mu_{12} (X_2 - X_1) \omega \sin (\pi/2 - Z_2) = 0. \quad (9)$$

Спростивши вирази (9), отримуємо систему чотирьох рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} -F_0 - m_1 X_1 \omega^2 \cos Z_1 + c_{i3} X_1 \cos Z_1 + c_{12} (X_1 - X_2) \cos Z_1 + \\ + \mu_{i3} X_1 \omega \sin Z_1 + \mu_{12} (X_1 - X_2) \omega \sin Z_1 = 0; \\ -m_1 X_1 \omega^2 \sin Z_1 + c_{i3} X_1 \sin Z_1 + c_{12} (X_1 - X_2) \sin Z_1 - \\ - \mu_{i3} X_1 \omega \cos Z_1 - \mu_{12} (X_1 - X_2) \omega \cos Z_1 = 0; \\ F_0 + m_2 X_2 \omega^2 \cos Z_2 - c_{12} (X_2 - X_1) \cos Z_2 - \mu_{12} (X_2 - X_1) \omega \sin Z_2 = 0; \\ m_2 X_2 \omega^2 \sin Z_2 - c_{12} (X_2 - X_1) \sin Z_2 + \mu_{12} (X_2 - X_1) \omega \cos Z_2 = 0. \end{array} \right. \quad (10)$$

Якщо векторні діаграми на рис. 2 зобразити для прикладу так, щоб вектори переміщень x_1 та x_2 збігались з віссю x , тобто розгорнувши діаграми відповідно на кути Z_1 та Z_2 у напрямку обертання кутової швидкості ω , то систему (10) запишемо у значно простішому вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} -F_0 \cos Z_1 - m_1 X_1 \omega^2 + c_{i3} X_1 + c_{12} (X_1 - X_2) = 0; \\ F_0 \sin Z_1 - \mu_{i3} X_1 \omega - \mu_{12} (X_1 - X_2) \omega = 0; \\ F_0 \cos Z_2 + m_2 X_2 \omega^2 - c_{12} (X_2 - X_1) = 0; \\ -F_0 \sin Z_2 + \mu_{12} (X_2 - X_1) \omega \cos Z_2 = 0. \end{array} \right. \quad (11)$$

Аналітичний розв'язок системи рівнянь (10) або ж ідентичної їй (11) щодо чотирьох невідомих X_1 , X_2 , Z_1 та Z_2 є дуже громіздким. Тож під час аналізу двомасової коливальної системи упустимо коефіцієнти опору μ_{12} та μ_{i3} , власне через які й ускладнюється запис розв'язку.

Враховуючи вищесказане, вважаємо, що $\mu_{12} = 0$ та $\mu_{i3} = 0$, а тому: $Z_1 = 0$ та $Z_2 = 0$. У такому випадку системи (10) та (11) із чотирьох рівнянь вироджуються у систему із двох:

$$\left\{ \begin{array}{l} -m_1 X_1 \omega^2 + c_{i3} X_1 + c_{12} (X_1 - X_2) = -F_0; \\ -m_2 X_2 \omega^2 + c_{12} (X_2 - X_1) = F_0. \end{array} \right. \quad (12)$$

Систему (12) можна було б відразу вивести з (7), якщо прийняти, що дисипація у системі відсутня. Так, враховуючи, що $\mu_{12} = 0$ та $\mu_{i3} = 0$, вираз (7) набуде вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \ddot{x}_1(t) + c_{12} (x_1(t) - x_2(t)) + c_{i3} x_1(t) = -F_0 \sin(\omega t); \\ m_2 \ddot{x}_2(t) + c_{12} (x_2(t) - x_1(t)) = F_0 \sin(\omega t). \end{array} \right. \quad (13)$$

Шукаючи розв'язок у вигляді $x_1(t) = X_1 \sin(\omega t)$; $x_2(t) = X_2 \sin(\omega t)$, підставляємо ці вирази до (13) і отримуємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} -m_1 X_1 \omega^2 \sin(\omega t) + c_{12} (X_1 - X_2) \sin(\omega t) + c_{i3} X_1 \sin(\omega t) = -F_0 \sin(\omega t); \\ -m_2 X_2 \omega^2 \sin(\omega t) + c_{12} (X_2 - X_1) \sin(\omega t) = F_0 \sin(\omega t). \end{array} \right. \quad (14)$$

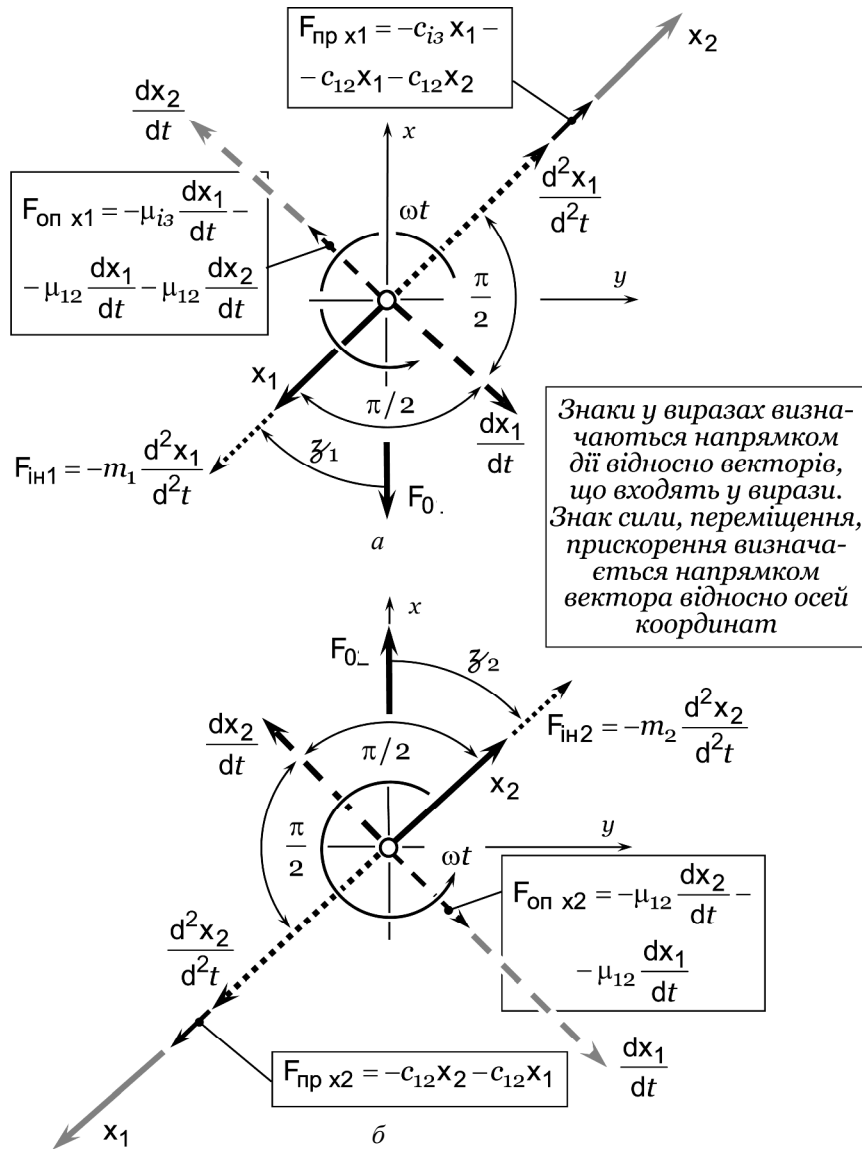


Рис. 2. Векторні діаграми розподілу сил, що діють на маси m_1 (а)

та m_2 (б) двомасової коливальної системи, наведеної на рис. 1

Поділивши ліві та праві частини рівнянь (14) на $\sin(\omega t)$, одержимо систему, ідентичну (12). Проте потрібно розуміти, що вилучення на цьому етапі коефіцієнтів опору суттєво спростило аналіз коливальних систем та дало змогу сформулювати стислі аналітичні залежності, за якими можна розрахувати основні параметри системи. Однак після встановлення параметрів необхідно завжди аналізувати систему з урахуванням дисипації. Для цього можна систему рівнянь (10) або (11) розв'язати чисельним способом. У такому випадку побудуємо АЧХ та ФЧХ коливальної системи з урахуванням коефіцієнтів опору.

Щоб не складати діаграм (див. рис. 2), побудувати АЧХ із врахуванням дисипації можна, використовуючи комплексне числення. Для цього за основу беремо систему (7), силу збурення подаємо як $\bar{F}_0 e^{i\omega t}$, а результат шукаємо у вигляді $\bar{X}_1 e^{i\omega t}$ та $\bar{X}_2 e^{i\omega t}$, де $i = \sqrt{-1}$ – комплексна одиниця; \bar{X}_1 та \bar{X}_2 – комплексні амплітуди, а \bar{F}_0 – амплітуда комплексної сили збурення. Тож, підставивши комплексні величини до системи (7), матимемо:

$$\begin{cases} -m_1 \bar{X}_1 \omega^2 e^{i\omega t} + c_{12}(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) e^{i\omega t} + c_{i3} \bar{X}_1 e^{i\omega t} + \\ + i\omega \mu_{i3} \bar{X}_1 e^{i\omega t} + i\omega \mu_{12}(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) e^{i\omega t} = -\bar{F}_0 e^{i\omega t}; \\ -m_2 \bar{X}_2 \omega^2 e^{i\omega t} + c_{12}(\bar{X}_2 - \bar{X}_1) e^{i\omega t} + i\omega \mu_{12}(\bar{X}_2 - \bar{X}_1) e^{i\omega t} = \bar{F}_0 e^{i\omega t}. \end{cases} \quad (15)$$

Поділивши в (15) ліві та праві частини одержаних рівнянь на $e^{i\omega t}$, отримаємо систему:

$$\begin{cases} -m_1 \bar{X}_1 \omega^2 + c_{12}(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + c_{i3} \bar{X}_1 + i\omega \mu_{i3} \bar{X}_1 + i\omega \mu_{12}(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = -\bar{F}_0; \\ -m_2 \bar{X}_2 \omega^2 + c_{12}(\bar{X}_2 - \bar{X}_1) + i\omega \mu_{12}(\bar{X}_2 - \bar{X}_1) = \bar{F}_0. \end{cases} \quad (16)$$

Інколи простіше розрахунки виконати, подавши систему рівнянь у матричному вигляді, й алгебраїчні перетворення здійснювати з використанням одного з математичних програмних продуктів, що, автоматизуючи, значно спрощує розрахунок. Отож, якщо систему (16) записати у вигляді:

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_1 \omega^2 + c_{12} + c_{i3} + i\omega(\mu_{i3} + \mu_{12}) & -c_{12} - i\omega \mu_{12} \\ -c_{12} - i\omega \mu_{12} & -m_2 \omega^2 + c_{12} + i\omega \mu_{12} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\bar{F}_0 \\ \bar{F}_0 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

розв'язком як (17), так і (16) буде:

$$\bar{X}_1 = \frac{m_2 \omega^2 \bar{F}_0}{\begin{bmatrix} m_1 m_2 \omega^4 - i\omega^3(\mu_{12}(m_1 + m_2) + m_2 \mu_{i3}) - \\ -\omega^2(m_2 c_{i3} + c_{12}(m_1 + m_2) + \mu_{12} \mu_{i3}) + i\omega(\mu_{12} c_{i3} + \mu_{i3} c_{12}) + c_{12} c_{i3} \end{bmatrix}}; \quad (18)$$

$$\bar{X}_2 = -\bar{F}_0 \frac{i\omega^3 \mu_{12} m_1 + \omega^2(c_{12} m_1 + \mu_{12} \mu_{i3}) - i\omega(\mu_{12} c_{i3} + c_{12} \mu_{i3}) - c_{12} c_{i3}}{\begin{bmatrix} m_1 m_2 \omega^4 - i\omega^3(\mu_{12}(m_1 + m_2) + m_2 \mu_{i3}) - \\ -\omega^2(m_2 c_{i3} + c_{12}(m_1 + m_2) + \mu_{12} \mu_{i3}) + \\ + i\omega(\mu_{12} c_{i3} + \mu_{i3} c_{12}) + c_{12} c_{i3} \end{bmatrix}} [c_{12} + \omega \mu_{12}]. \quad (19)$$

Для комплексної амплітуди \bar{X}_1 , використавши (18), її модуль запишемо

$$X_1 = \frac{m_2 \omega^2 F_0}{\sqrt{(m_1 m_2 \omega^4 - \omega^2(m_2 c_{i3} + c_{12}(m_1 + m_2) + \mu_{12} \mu_{i3}) + c_{12} c_{i3})^2 + (\omega(\mu_{12} c_{i3} + c_{12} \mu_{i3}) - \omega^3(\mu_{12}(m_1 + m_2) + m_2 \mu_{i3}))^2}}. \quad (20)$$

Для комплексної амплітуди \bar{X}_2 модуль занадто громіздкий, а тому наводити його не будемо. Користуючись (20), можна досліджувати АЧХ системи з урахуванням впливу дисипації.

Необхідно зазначити, що з використанням чисельних методів розрахунку можна розв'язати будь-якої складності задачу. Основне, щоб було правильно задано параметри та вихідні умови. Математично обґрунтувати параметри можна лише аналітичними методами, тому аналіз двомасових систем розпочнемо зі спрощеної моделі (12). Дослідимо її, застосовуючи кілька найпоширеніших припущень, що дають змогу значно спростити аналіз, не вносячи істотної похибки в результати розрахунку.

Аналіз двомасової резонансної системи з електромагнітним приводом та формування її основних параметрів. Випадок, коли нехтуємо лише коефіцієнтами в'язкого опору. Якщо в системі на рис. 1 прийняти, що $\mu_{12} = \mu_{i3} = 0$, вона зводиться до вигляду, як на рис. 3, а, і описується системою (12), що відтворює такий ідеалізований випадок. Це дає нам змогу з достатньою для інженерних розрахунків точністю встановити інерційно-жорсткісні параметри системи. У матричному вигляді систему (12) можна подати як

$$[K_{ij}][X] = [F], \quad (21)$$

де $[K_{ij}]$, $[X]$, $[F]$ – відповідно матриця коефіцієнтів при невідомих, матриця невідомих (амплітуд) та матриця сил збурення. Розкриваючи (21), маємо:

$$\begin{bmatrix} -m_1 \omega^2 + c_{12} + c_{i3} & -c_{12} \\ -c_{12} & -m_2 \omega^2 + c_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_{01} \\ F_{02} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Запис (22) ідентичний (17), тільки без коефіцієнтів в’язкого опору. Амплітуди коливань з (22) можна визначити, використовуючи обернену матрицю, а саме:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_1 \omega^2 + c_{12} + c_{i3} & -c_{12} \\ -c_{12} & -m_2 \omega^2 + c_{12} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -F_0 \\ F_0 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

або за правилом Крамера:

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} -F_0 & -c_{12} \\ F_0 & -m_2 \omega^2 + c_{12} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -m_1 \omega^2 + c_{12} + c_{i3} & -c_{12} \\ -c_{12} & -m_2 \omega^2 + c_{12} \end{vmatrix}} = -\frac{F_0 m_2 \omega^2}{D_1}; \quad (24)$$

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} -m_1 \omega^2 + c_{12} + c_{i3} & -F_0 \\ -c_{12} & F_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -m_1 \omega^2 + c_{12} + c_{i3} & -c_{12} \\ -c_{12} & -m_2 \omega^2 + c_{12} \end{vmatrix}} = \frac{F_0 (c_{i3} - m_1 \omega^2)}{D_1}, \quad (25)$$

де

$$D_1 = (c_{12} + c_{i3} - m_1 \omega^2)(c_{12} - m_2 \omega^2) - c_{12}^2 \quad (26)$$

– визначник матриці коефіцієнтів $[K_{ij}]$ при невідомих.

Матрицю $[K_{ij}]$ часто називають частотною. Згідно з (24) та (25) можна визначити амплітуди коливань двомасової системи, зображеної на рис. 3, а, за будь-якого значення вимушеної частоти $\omega = \Omega$. За цими виразами і будують АЧХ системи, що відображає картину розподілу амплітуд коливань X_1 та X_2 на частотній області $\omega \in 0 \dots \infty$ (рис. 3, б). Зрозуміло, що, користуючись (24) або (25), можна встановити амплітудне значення сили збурення F_0 через параметри системи. Вихідним рівнянням найзручніше брати те, що встановлює амплітуду коливань робочого органа, адже це значення часто уже технологічно задано. Так, якщо робочим органом є маса m_1 або m_2 , для якої відома амплітуда коливань, то, користуючись (24) або (25), значення F_0 знаходять так:

$$F_0 = \left| X_1 \frac{D_1}{-m_2 \omega^2} \right|; \quad F_0 = \left| X_2 \frac{D_1}{c_{i3} - m_1 \omega^2} \right|. \quad (27)$$

Розрахункові значення F_0 забезпечують технологічно необхідну амплітуду коливань робочого органа на заданій частоті вимушених коливань $\omega = \Omega$. Закони ж руху та збурення коливальних мас, відповідно до (24), (25) і (27), набудуть вигляду:

$$x_1(t) = -\frac{F_0 m_2 \omega^2}{D_1} \sin(\omega t); \quad x_2(t) = \frac{F_0 (c_{i3} - m_1 \omega^2)}{D_1} \sin(\omega t);$$

$$F(t) = \frac{D_1}{-m_2 \omega^2} X_1 \sin(\omega t) = \frac{D_1}{c_{i3} - m_1 \omega^2} X_2 \sin(\omega t).$$

Оскільки заплановано коливальну систему з електромагнітним приводом реалізовувати резонансною, необхідно параметрично закласти такий режим роботи, що передбачає другий робочий

резонансний пік двомасової коливальної системи в околі технологічно заданої частоти вимушених коливань $\omega = \Omega$. Цього досягають лише узгодженням інерційно-жорсткісних параметрів системи.

Встановлення частотних та жорсткісних параметрів. Скористаємось визначником D_1 (вираз (26)) матриці коефіцієнтів при невідомих. Прирівнявши його до нуля, ми тим самим сформуємо вираз, що встановлює залежність власних частот системи від її параметрів. Отож, записавши

$$D_1 = (c_{12} + c_{i3} - m_1 \omega^2)(c_{12} - m_2 \omega^2) - c_{12}^2 = 0, \tag{28}$$

встановимо, де функція $D_1(\omega)$ перетинає вісь ω . Рівняння (28) можна подати і у вигляді

$$D_1 = \omega^4 - \left(\frac{c_{12} + c_{i3}}{m_1} + \frac{c_{12}}{m_2} \right) \omega^2 + \frac{c_{12} c_{i3}}{m_1 m_2} = 0. \tag{29}$$

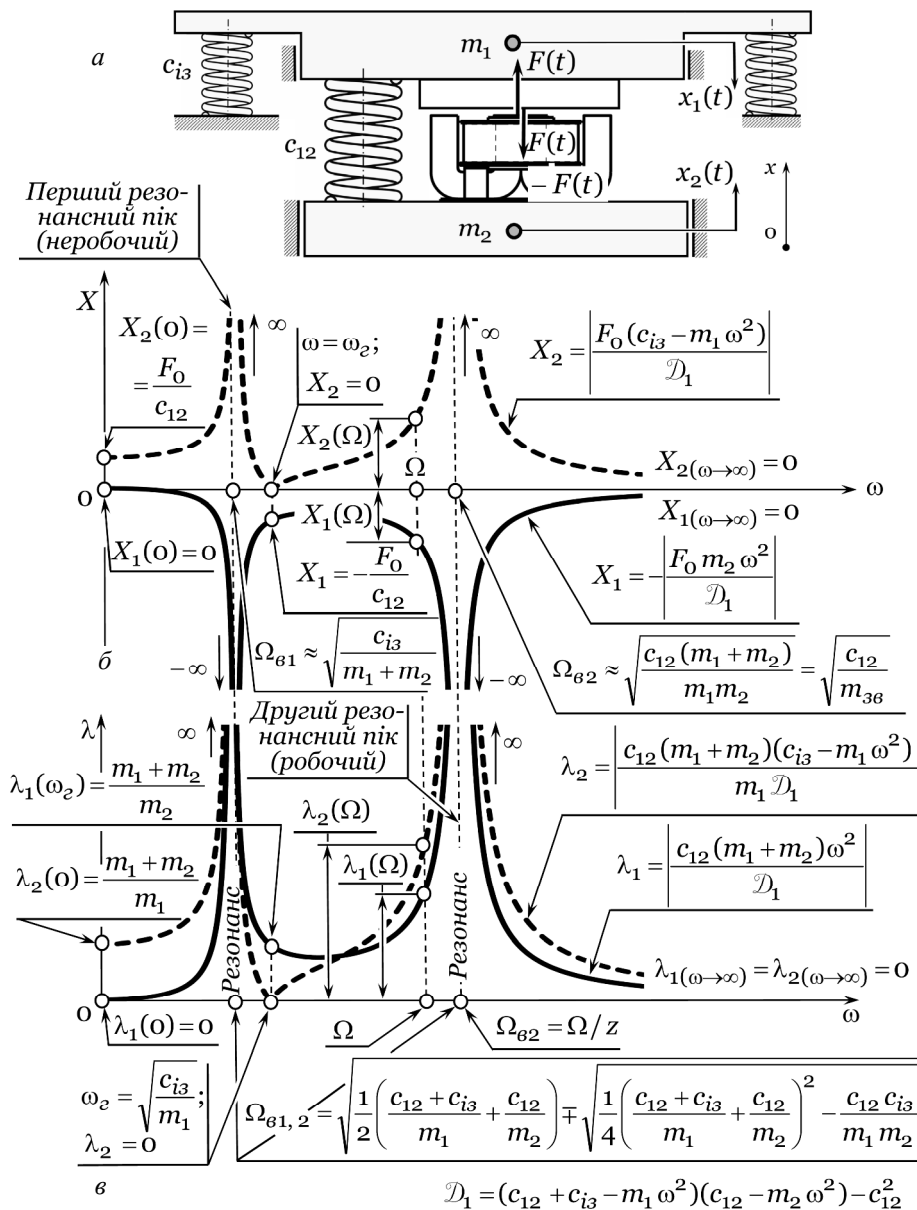


Рис. 3. Принципова схема двомасової коливальної системи з електромагнітним приводом (а) та відповідні їй залежності амплітуд коливань мас (б) і коефіцієнтів динамічності (в), що відображені на частотній області

Оскільки під час резонансу частота вимушених коливань Ω збігається з власною Ω_g , прийнявши $\omega = \Omega_g$, дійсні корені рівнянь (28) та (29) (власні частоти системи) визначатимемо як

$$\Omega_{g1,2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{c_{12} + c_{i3}}{m_1} + \frac{c_{12}}{m_2} \right)} \mathbf{m} \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{c_{12} + c_{i3}}{m_1} + \frac{c_{12}}{m_2} \right)^2 - \frac{c_{12} c_{i3}}{m_1 m_2}}. \quad (30)$$

Як бачимо, отримано два корені, оскільки розглядаємо двомасову систему, встановлену на віброізоляторах жорсткістю c_{i3} . Знаки (-) та (+) необхідно використовувати для встановлення відповідно першої та другої власних частот системи. Згідно з виразом (30) можна визначити власні частоти двомасової коливальної системи, за умови, що відомі її інерційно-жорсткісні параметри.

Насправді, система на рис. 3, а тримасова, якщо розглядати додатково масу фундаменту m_ϕ . Вважаємо, що маса фундаменту безмежно велика і не коливається, а тому під час розрахунків її упускаємо. Крім того, як і в одномасових системах із зарезонансним режимом роботи, коли маса m уже не сприймає масу фундаменту за коливальну, те саме відбувається і в двомасових. Встановлена на м'яких віброізоляційних пружних елементах двомасова система не сприймає їх, адже вона працює на частоті, значно вищій за частоту резонансного піка, спричиненого віброізоляторами. Тобто режим роботи двомасової резонансної системи можна розцінювати як зарезонансний відносно першого резонансного піка.

Якщо необхідно враховувати масу фундаменту m_ϕ , власні частоти системи можна визначити згідно з виразом, аналогічним до (30), а саме

$$\Omega_{g1,2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{c_{12} + c_{i3}}{m_1} + \frac{c_{12}}{m_2} + \frac{c_{i3}}{m_\phi} \right)} \mathbf{m} \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{c_{12} + c_{i3}}{m_1} + \frac{c_{12}}{m_2} + \frac{c_{i3}}{m_\phi} \right)^2 - \frac{c_{12} c_{i3}}{m_1 m_2 m_\phi} (m_1 + m_2 + m_\phi)}. \quad (31)$$

Якщо застосувати до (31) границю $m_\phi \rightarrow \infty$, він виродиться у (30).

Під час проектування коливальних систем вібраційних машин необхідно задати інерційно-жорсткісні параметри так, щоб вони забезпечували строго задані власні частоти системи. В цьому випадку дотримуються такого підходу. Вважаючи, що коливальні маси m_1 та m_2 уже встановлено, власні частоти системи Ω_{g1} та Ω_{g2} передбачають (по суті, їх конструктивно закладають) за умов:

$$\Omega_{g1} = \Omega_{i3} = \frac{\Omega}{z_{i3}}; \quad \Omega_{g2} = \frac{\Omega}{z}, \quad (32)$$

де z – резонансне налагодження, вибране за умови

$$z = \frac{\Omega}{\Omega_g} \approx 0.94 \dots 0.97, \quad (32^*)$$

z_{i3} – резонансне налагодження, яке вибирають за умови

$$z = z_{i3} = \frac{\Omega}{\Omega_g} \approx 5 \dots 7, \quad (32^{**})$$

а Ω – частота вимушених коливань. Невідомими параметрами для нас залишаються жорсткості c_{12} та c_{i3} . Використавши (28), можемо скласти систему двох рівнянь, вводячи до них замість ω вирази (32):

$$\begin{cases} \left(c_{12} + c_{i3} - m_1 \left(\frac{\Omega}{z_{i3}} \right)^2 \right) \left(c_{12} - m_2 \left(\frac{\Omega}{z_{i3}} \right)^2 \right) - c_{i3}^2 = 0; \\ \left(c_{12} + c_{i3} - m_1 \left(\frac{\Omega}{z} \right)^2 \right) \left(c_{12} - m_2 \left(\frac{\Omega}{z} \right)^2 \right) - c_{i3}^2 = 0. \end{cases} \quad (33)$$

Розв'язуючи (33), отримаємо:

$$c_{i3} = \frac{(m_1 + m_2) \Omega^2 \left[m_1 (z^2 - z_{i3}^2) + \sqrt{m_1^2 (z^2 - z_{i3}^2)^2 - 4 m_1 m_2 z^2 z_{i3}^2} \right]}{z^2 \left[m_1 (z^2 - z_{i3}^2) - 2 z_{i3}^2 m_2 + \sqrt{m_1^2 (z^2 - z_{i3}^2)^2 - 4 m_1 m_2 z^2 z_{i3}^2} \right]}; \quad (34)$$

$$c_{12} = \frac{m_2 \Omega^2 \left[m_1 (z^2 + z_{i3}^2) + \sqrt{m_1^2 (z^2 - z_{i3}^2)^2 - 4 m_1 m_2 z^2 z_{i3}^2} \right]}{4 z^2 z_{i3}^2 (m_1 + m_2)}. \quad (35)$$

Закладаючи в (34) та (35) необхідні параметри, знаходимо жорсткості c_{12} та c_{i3} , що пов'язують коливальну систему так, що в системі формуються задані власні частоти, а отже, і реалізуються закладені режими роботи.

Якщо жорсткість c_{12} шукати через уже відоме значення параметра c_{i3} , то, використовуючи (28) або ж (30) у вигляді

$$\left(c_{12} + c_{i3} - m_1 \left(\frac{\Omega}{z} \right)^2 \right) \left(c_{12} - m_2 \left(\frac{\Omega}{z} \right)^2 \right) - c_{12}^2 = 0,$$

отримаємо дещо простіший, порівняно з (35), вираз у вигляді

$$c_{12} = \frac{m_2 \left(\frac{\Omega}{z} \right)^2 \left[m_1 \left(\frac{\Omega}{z} \right)^2 - c_{i3} \right]}{(m_1 + m_2) \left(\frac{\Omega}{z} \right)^2 - c_{i3}}. \quad (36)$$

Відразу ж зазначимо, що вирази (34), (35) та (36) на практиці використовують рідко. Для встановлення параметра c_{12} значно частіше застосовують запис, в якому знехтувано жорсткістю віброізоляторів. Якщо прийняти, що в коливальній системі $c_{i3} \rightarrow 0$, визначник (28) набуде вигляду $m_1 m_2 (\Omega/z)^2 - c_{12} (m_1 + m_2) = 0$, звідки

$$c_{12} = m_{36} \left(\frac{\Omega}{z} \right)^2, \quad (37)$$

де m_{36} – зведена маса, що визначається як

$$m_{36} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (38)$$

Для запису спрощеного виразу, що встановлюватиме параметр c_{i3} , використаємо знову ж таки вираз (28) (або ж (30)), записавши його як

$$\left(c_{12} + c_{i3} - m_1 \left(\frac{\Omega}{z_{i3}} \right)^2 \right) \left(c_{12} - m_2 \left(\frac{\Omega}{z_{i3}} \right)^2 \right) - c_{12}^2 = 0,$$

звідки

$$c_{i3} = \left(\frac{\Omega}{z_{i3}} \right)^2 \left(\frac{m_1 m_2 \left(\frac{\Omega}{z_{i3}} \right)^2 - c_{12} (m_1 + m_2)}{m_2 \left(\frac{\Omega}{z_{i3}} \right)^2 - c_{12}} \right). \quad (39)$$

Оскільки передбачено, що $c_{i3} \ll c_{12}$ (так і реалізується на практиці), то до виразу (39) можна застосувати умову $c_{12} \rightarrow \infty$, звідки

$$c_{i3} = m_{\text{вм}} \left(\frac{\Omega}{z_{i3}} \right)^2, \tag{40}$$

де $m_{\text{вм}} = m_1 + m_2$ – сумарна маса коливальної системи вібраційної машини.

З викладень, наведених вище, можна зробити певні висновки. Беручи до уваги вираз (40), першу власну частоту коливань $\Omega_{\text{в}1}$ двомасової системи, встановлену на віброізоляторах (рис. 4), з високою точністю можна визначити згідно з залежністю

$$\Omega_{\text{в}1} = \frac{\Omega}{z_{i3}} \approx \sqrt{\frac{c_{i3}}{m_{\text{вм}}}} = \sqrt{\frac{c_{i3}}{m_1 + m_2}}. \tag{41}$$

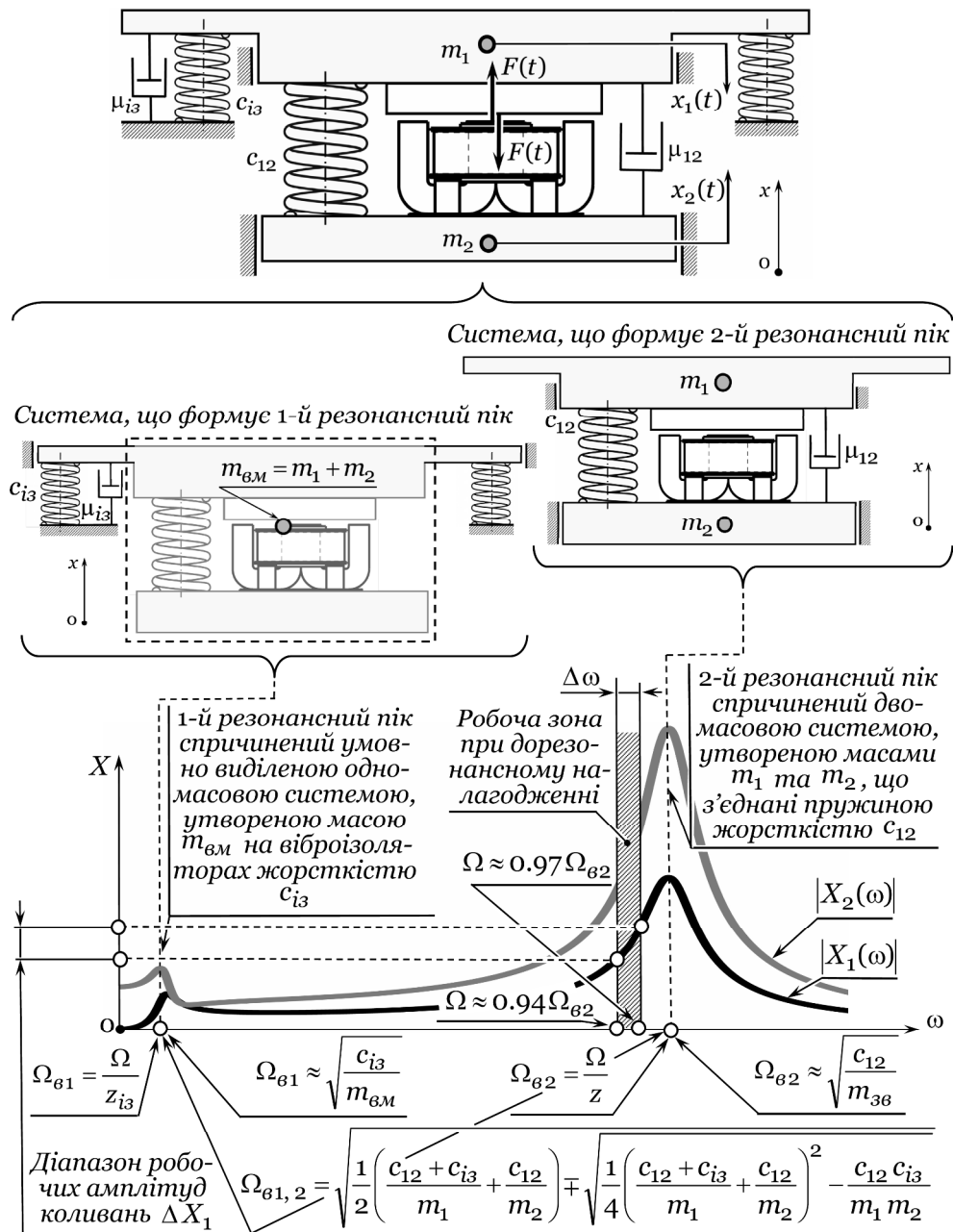


Рис. 4. Принципова схема та АЧХ двомасової коливальної системи з відображенням умовно виділених коливальних систем, що відповідають за формування резонансних піків (АЧХ наведено з урахуванням коефіцієнтів в'язкого опору і встановлено за виразами (18) та (19))

Вираз (41) отримують безпосередньо за (30), наклавши на нього умову $c_{12} \rightarrow \infty$, вважаючи, що $c_{12} \gg c_{i3}$. Отож, якщо виконується умова $c_{i3} \ll c_{12}$ – перший резонансний пік на частоті $\omega = \Omega_{e1}$ спричинений практично тільки наявністю віброізоляційних пружних елементів (рис. 4). Що вони м'якші (вибрані за умови віброізоляції (32**)), то більше цей пік прямує до $\omega = 0$, а їх жорсткість c_{i3} , то менше впливатиме на значення другої власної частоти Ω_{e2} системи. По суті, робота вібромашини на першому резонансному піку зводиться до одномасової системи, утвореної умовно виділеною масою $m_{eM} = m_1 + m_2$ на віброізоляторах жорсткістю c_{i3} . Жорсткість $c_{12} \gg c_{i3}$, тож система на частоті Ω_{e1} коливатиметься як одне ціле без відносного зміщення мас m_1 та m_2 .

Другий резонансний пік на частоті Ω_{e2} , що для нас є робочим, формується практично тільки резонансною двомасовою коливальною системою, утвореною масами m_1 , m_2 та пружним вузлом жорсткістю c_{12} , що з'єднує їх (рис. 4). Так, користуючись (37)

$$\Omega_{e2} = \frac{\Omega}{z} \approx \sqrt{\frac{c_{12}}{m_{3e}}} = \sqrt{\frac{c_{12}}{\left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)}}. \quad (42)$$

Вираз (42) отримують безпосередньо з (30), наклавши на нього умову $c_{i3} \rightarrow 0$. Вплив “м'яких” віброізоляторів на формування другого (робочого) резонансного піка мізерний.

Вирази (37) та (40), власне, і забезпечують формування двомасової резонансної коливальної системи, за умови, що її інерційні параметри (маси m_1 , m_2) та резонансні налагодження z і z_{i3} конструктивно задано. Їх найчастіше використовують під час практичних розрахунків. Точність розрахунку згідно з (37) та (40), порівняно з (34) та (35), доволі висока, якщо використовувати умови (32*) та (32**).

Результати досліджень та їх обговорення

Встановлення частотних та жорсткісних параметрів резонансної двомасової системи.
Допустимо, нам необхідно встановити значення жорсткостей c_{12} та c_{i3} двомасової коливальної системи (рис. 3, а), в якій передбачено резонансний режим роботи на частоті вимушених коливань $\omega = \Omega = 314 \text{ рад/с}$. ($N = 50 \text{ Гц}$). Нехай маса $m_1 = 100 \text{ кг}$, а маса $m_2 = 50 \text{ кг}$. З умови (32*) приймаємо, що резонансне налагодження умовно виділеної двомасової системи, утвореної масами m_1 та m_2 , які з'єднані пружним вузлом жорсткістю c_{12} , становить $z = 0.97$, а з умови (32**) резонансне налагодження умовно виділеної одномасової системи (маса $m_{eM} = m_1 + m_2$, що встановлена на віброізоляторах жорсткістю c_{i3}) дорівнює $z_{i3} = 7$. Отож, використовуючи (32), закладаємо такі власні частоти системи:

$$\Omega_{e1} = \frac{\Omega}{z_{i3}} = \frac{314}{7} = 44.86 \frac{\text{рад}}{\text{с}} \equiv 7.1 \text{ Гц}; \quad \Omega_{e2} = \frac{\Omega}{z} = \frac{314}{0.97} = 323.7 \frac{\text{рад}}{\text{с}} \equiv 51.5 \text{ Гц}.$$

Якщо підставити у залежності (34) та (35) параметри системи, значення жорсткостей двох пружних вузлів становитимуть:

$$c_{i3} = \frac{(m_1 + m_2)\Omega^2 \left[m_1(z^2 - z_{i3}^2) + \sqrt{m_1^2(z^2 - z_{i3}^2)^2 - 4m_1 m_2 z^2 z_{i3}^2} \right]}{z^2 \left[m_1(z^2 - z_{i3}^2) - 2z_{i3}^2 m_2 + \sqrt{m_1^2(z^2 - z_{i3}^2)^2 - 4m_1 m_2 z^2 z_{i3}^2} \right]} =$$

$$= \frac{(100 + 50) \cdot 314^2 \cdot [100 \cdot (0.97^2 - 7^2) + \sqrt{100^2 \cdot (0.97^2 - 7^2)^2 - 4 \cdot 100 \cdot 50 \cdot 0.97^2 \cdot 7^2}]}{0.97^2 \cdot [100 \cdot (0.97^2 - 7^2) - 2 \cdot 7^2 \cdot 50 + \sqrt{100^2 \cdot (0.97^2 - 7^2)^2 - 4 \cdot 100 \cdot 50 \cdot 0.97^2 \cdot 7^2}]}$$

$$= 3.048 \cdot 10^5 \text{ Н/м};$$

$$c_{12} = \frac{m_2 \Omega^2 \left[m_1 (z^2 + z_{i3}^2) + \sqrt{m_1^2 (z^2 - z_{i3}^2)^2 - 4 m_1 m_2 z^2 z_{i3}^2} \right]}{4 z^2 z_{i3}^2 (m_1 + m_2)} = \frac{50 \cdot 314^2}{4 \cdot 0.97^2 \cdot 7^2 (100 + 50)} \times$$

$$\times [100 \cdot (0.97^2 + 7^2) + \sqrt{100^2 \cdot (0.97^2 - 7^2)^2 - 4 \cdot 100 \cdot 50 \cdot 0.97^2 \cdot 7^2}] = 3.458 \cdot 10^6 \text{ Н/м}.$$

Значення параметрів c_{12} та c_{i3} можна встановити і за спрощеними виразами, що зустрічаються в літературі [1–5]. Використовуючи (40) та (37):

$$c_{i3} = (m_1 + m_2) \left(\frac{\Omega}{z_{i3}} \right)^2 = (100 + 50) \cdot \left(\frac{314}{7} \right)^2 = 3.018 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}};$$

$$c_{12} = \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) \left(\frac{\Omega}{z} \right)^2 = \left(\frac{100 \cdot 50}{100 + 50} \right) \cdot \left(\frac{314}{0.97} \right)^2 = 3.493 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Похибка розрахунку порівняно з попередніми даними не більша за 1%. Отож, вирази (40) та (37) можна обґрунтовано використовувати, якщо дотримуватись умови $c_{i3} \ll c_{12}$. Залежно від того, наскільки коливальна система просіла на віброізоляторах, можна встановити першу власну частоту коливань системи, а знаючи її, передбачити і величину просідання. Для нашого випадку

$$\delta_{cm} = g / \Omega_{e1}^2 = 9.81 / 44.86^2 = 0.0049 \text{ м} = 4.9 \text{ мм} \tag{43}$$

або ж

$$\delta_{cm} = (m_1 + m_2) g / c_{i3} = (100 + 50) \cdot 9.81 / (3.018 \cdot 10^5) = 0.0049 \text{ м} = 4.9 \text{ мм}.$$

Висновки. Вперше вдалось синтезувати аналітичні вирази для встановлення інерційно-жорсткісних параметрів, що дають змогу точніше проводити розрахунок двомасових резонансних коливальних систем. Встановлено, що за правильного вибору резонансних налагоджень у системі взаємовплив жорсткісних параметрів у системі незначний, а тому науково обґрунтовано можна використовувати класичні підходи. Встановлені аналітичні вирази можна широко застосовувати під час проектування вібраційного технологічного обладнання. Прозорість виведення та відносна простота запропонованих аналітичних виразів дозволяє їх широке використання на практиці.

1. Медвидь М. В. Автоматические ориентирующие загрузочные устройства и механизмы / М. В. Медвидь. – М.: Машигиз, 1963. – 299 с.
2. Бауман В. А. Вибрационные машины и процессы в строительстве: учеб. пособ. / В. А. Бауман, И. И. Быховский. – М.: Высшая школа, 1977. – 255 с.
3. Назаренко І. І. Вібраційні машини і процеси будівельної індустрії: навч. посіб. / І. І. Назаренко. – К.: КУНБА, 2007. – 230 с.
4. Гончаревич І. Ф. Электровибрационная транспортная техника / И. Ф. Гончаревич, Л. П. Стрельников. – М.: Гостехиздат, 1959. – 262 с.
5. Рабинович А. Н. Автоматические загрузочные устройства вибрационного типа / А. Н. Рабинович, В. А. Яхимович, Б. Ю. Боечко. – К.: Техника, 1965. – 380 с.

O. S. Lanets¹, V. M. Borovets¹, I. A. Derevenko²¹Department of Mechanical Engineering and Automation, Institute of Engineering Mechanics and Transport, Lviv Polytechnic National University.²Department of General Technical Disciplines and Occupational Safety, Faculty of Mechanization of Agriculture, Vinnytsia National Agrarian University**ADJUSTMENT OF ANALYTICAL EXAMPLES FOR INSTALLATION OF INERTIAL AND FASTEST PARAMETERS OF BILATERAL RESONANCE VIBRATING MACHINES**

Ó Lanets O. S., Borovets V. M., Derevenko I. A., 2018

Goal. It lies in the synthesis of inertia-rigid parameters of two-mass resonance vibration machines taking into account the interference of rigid parameters in the oscillatory system. **Topicality.** The need for these studies is due to the fact that the vibration machine interacts with the parameters of the oscillation system, the main of which are inertial, rigid and power. If they are correctly calculated and implemented in the design of a vibration machine, it will be robust. Failure to consider one type of parameters causes an error in the calculation. **Method.** The refinement of analytical expressions is carried out using the classical approaches for linear vibrational systems with harmonic perturbation. For this the physical model of the two-mass resonance oscillation system is considered and its mathematical model is developed as a system of linear differential equations. On the basis of this the solution is formed (the values of the amplitudes of oscillations). Unknown parameters remain rigid, provided that the inertia is constructed. Therefore, using the determinants of the matrix of coefficients for unknowns, the necessary mathematical operations are performed that satisfy the imposed conditions for the establishment of rigid parameters. **Results.** In the paper a series of analytical expressions are obtained that examine the mutual influence of rigid parameters in the system. A comparison of the obtained results according to the specified expressions with classical analytical expressions is made. It is established that the values according to the proposed expressions do not differ significantly from the classical approaches, and therefore, in the case of in-energy calculations, it is sufficient to use existing expressions. The proposed expressions are more precise and therefore recommended for scientific research. **Scientific novelty.** For the first time, we succeeded in synthesizing analytical expressions for the establishment of inertia-rigid parameters that allow more accurate calculation of two-mass resonance oscillation systems. It is established that for the correct choice of resonant alignments in the system, the mutual influence of rigid parameters in the system is not significant, and therefore it is scientifically grounded to use classical approaches. **Practical significance.** Established analytical expressions can be widely used in the design of vibration process equipment. The transparency of the output and the relative simplicity of the proposed analytical expressions allows for their widespread use in practice.

Key words: two-mass vibrational system, inertia-rigid parameters, vibration machine.

1. Medvid' M. V. (1963). *Avtomaticheskie orientiruyushchie zagruzochnye ustrojstva i mekhanizmy* [Automatic orientation loading devices and mechanisms]. Moscow: Mashgiz [in Russian].
2. Bauman V. A., & Byhovskij I. I. (1977). *Vibracionnye mashiny i processy v stroitel'stve* [Vibration machines and processes in construction]. Moscow: Vysshaya shkola [in Russian].
3. Nazarenko I. I. (2007). *Vibracijni mashini i procesi budivel'noi industrii* [Vibrating machines and processes of the construction industry]. Kyiv: KUNBA [in Ukrainian].
4. Goncharevich I. F., & Strel'nikov L. P. (1959). *Elektrovibracionnaya transportnaya tekhnika* [Electro-vibration transport technology]. Moscow: Gostekhzdat [in Russian].
5. Rabinovich A. N., Yahimovich V. A., & Boechko B. Yu. (1965). *Avtomaticheskie zagruzochnye ustrojstva vibracionnogo tipa* [Automatic loading devices of vibration type]. Kyiv: Tekhnika [in Ukrainian].