МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Вінницький національний аграрний університет

ВИЩА МАТЕМАТИКА
В ПРИКЛАДАХ ТА ЗАДАЧАХ

В.М. Дубчак, В.М. Пришляк, Л.І. Новицька

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Вінниця
2018

УДК 51 (072)
ББК 22.11Я73

Рекомендовано Вченою радою Вінницького національного аграрного університету Міністерства освіти і науки України як навчальний посібник для вищих навчальних закладів ІІІ-IV ступенів акредитації (протокол № 13 від 23 травня 2018 р.).

Дубчак В.М. Вища математика в прикладах та задачах. Навчальний посібник / В.М. Дубчак, В.М. Пришляк, Л.І. Новицька. – Вінниця: ВНАУ, 2018. – 254 с.

Рецензенти:

Коломієць А.М., кандидат фізико-математичних наук, професор, проректор з наукової роботи Вінницького державного педагогічного університету ім. Михайла Коцюбинського;

Хом'юк І.В., доктор педагогічних наук, професор кафедри вищої математики Вінницького національного технічного університету;

Веселовська Н.Р., доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри машин та обладнання сільськогосподарського виробництва Вінницького національного аграрного університету.

Посібник містить перелік типових стандартних практичних завдань з вищої математики, по кожному з яких пропонується 100 незалежних варіантів, з метою організації самостійної, домашньої, розрахунково-графічної роботи, контрольні питання, тести. Матеріали навчального посібника можуть бути використані для організації роботи студентів спеціальностей факультету механізації сільського господарства ВНАУ, які вивчають основи вищої математики.

Для студентів вищих навчальних закладів ІІІ-IV рівнів акредитації денної та заочної форм навчання галузей знань – 20 «Аграрні науки та продовольство», 13 «Механічна інженерія», 14 «Електрична інженерія», спеціальностей 208 «Агроінженерія», 133 «Галузеве машинобудування», 141 «Електроенергетика, електротехніка, електромеханіка».

ISBN 978-966-95981-2-7

ЗМІСТ

ВСТУП

У Законах України "Про освіту", "Про вищу освіту", Національній доктрині розвитку освіти України у XXI столітті зазначено необхідність підвищення професійного та загальнокультурного рівня випускників. Важливим і актуальним сьогодні є створення системи неперервного навчання й виховання для досягнення високих освітніх стандартів, формування інтелектуального потенціалу нації, забезпечення можливостей духовного збагачення особистості.

Вдосконалення навчального процесу, підвищення якості підготовки фахівців у нових умовах розвитку аграрних вищих навчальних закладів вимагають ґрунтовної математичної підготовки. Сучасного інженера неможливо уявити без оволодіння ним знаннями в галузі математичного моделювання виробничих процесів та інформаційних технологій, без уміння аналізувати явища, узагальнювати закономірності, обґрунтовувати власні міркування, приймати виважені рішення.

Особливе значення в підготовці фахівців має оволодіння математичними методами, вміння логічного мислення, оскільки інженерна діяльність в аграрному секторі пов'язана зі здатністю досягати кінцевого результату через вплив великої кількості випадкових і неконтрольованих факторів (погодних умов, шкідників, людського фактору та ін.). До того ж ці знання необхідні для вимірювання, вивчення, перетворення й прогнозування технологічних явищ в умовах ринкової економіки та нових умовах господарювання в галузях аграрного виробництва.

Навчальний посібник призначений для організації самостійної, домашньої, розрахунково-графічної роботи студентів усіх спеціальностей, в навчальній програмі яких присутні початкові класичні розділи вищої математики, такі як лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія, теорія неозначених границь, основи диференціального та інтегрального числення. В роботі наведено теоретичний матеріал, і по кожному з них пропонується 100 незалежних варіантів для організації самостійної роботи, видачі розрахункових завдань, тощо. В кінці роботи наведено перелік рекомендованої літератури для виконання даних завдань.

ЗАГАЛЬНИЙ ОПИС ТА ОРІЄНТОВНА СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Опис навчальної дисципліни

Галузь знань – 20 «Аграрні науки та продовольство»

Спеціальність – 208 «Агроінженерія»

Найменування показників	**Освітній рівень, галузь знань, спеціальність**	**Характеристика навчальної дисципліни**
Кількість кредитів – 3,5/4 Змістових модулів – 4 Загальна кількість годин – 105/120	Перший освітній рівень Галузь знань 20 «Аграрні науки та продовольство» Спеціальність 208 «Агроінженерія»	Денна форма навчання Нормативна Семестр – 1/2 -й Лекції : 30год. / 30год. Практичні заняття: 28 год./ 30 год. Самостійна робота: 47 год. / 60 год. Вид контролю: залік/іспит

Опис навчальної дисципліни

Галузь знань – 13 «Механічна інженерія»

Спеціальність – 133 «Галузеве машинобудування»

Найменування показників	Освітній рівень, галузь знань, спеціальність	Характеристика навчальної дисципліни
Кількість кредитів – 5/3,5 Змістових модулів – 4 Загальна кількість годин – 150/108	Перший освітній рівень Галузь знань 13 «Механічна інженерія» Спеціальність 133 «Галузеве машинобудування»	Денна форма навчання Нормативна Семестр - 1, 2,3-й Лекції – 30 год./ 30 год./16 год. Практичні заняття - 28 год./ 44 год./14 год. Самостійна робота - 20 год./ 30год./30 год. Вид контролю: залік, іспит

Опис навчальної дисципліни

Галузь знань – 14 «Електрична інженерія»,

Спеціальність – 141«Електроенергетика, електротехніка, електромеханіка»

Найменування показників	**Освітній рівень, галузь знань, спеціальність**	**Характеристика навчальної дисципліни**
Кількість кредитів – 8/ Змістових модулів – 4 Загальна кількість годин – 240/	Перший освітній рівень Галузь знань 14 «Електрична інженерія» Спеціальність 141 «Електро-енергетика, електротехніка, електромеханіка»	Денна форма навчання Нормативна Семестр - 1, 2, 3-й Лекції – 30 год./ 30 год./ 16 год. Практичні заняття - 14 год./ 42 год./ 14 год. Самостійна робота - 16 год./ 18 год./ 60 год. Вид контролю: залік, іспит

Орієнтовна структура навчальної дисципліни

Галузь знань – 20 «Аграрні науки та продовольство»,

Спеціальність – 208 «Агроінженерія»

Назви змістових модулів і тем	Всього годин	у тому числі		
		лекції	практика	с.р.
Змістовий модуль 1. Лінійна та векторна алгебра				
Матриці, визначники, їх властивості	13	4	3	6
Методи розв'язування алгебраїчних систем	14	4	4	6
Вектори, їх лінійна залежність. Система координат	13	4	3	6
Добутки векторів, їх обчислення та застосування	14	4	4	6
Змістовий модуль 2. Аналітична геометрія. Теорія границь				
Пряма на площині	12	3	3	6
Площина та пряма в просторі	13	4	4	5
Функції. Границі функцій, неозначеності, їх розкриття	12	3	3	6
Визначні границі. Еквівалентність нескінченно малих функцій	14	4	4	6
Всього годин	**105**	**30**	**28**	**47**

Змістовий модуль 3 Диференціальне числення, невизначений інтеграл				
Диференціальне числення	26	6	6	14
Невизначений інтеграл, методи інтегрування	30	8	8	14
Функції багатьох змінних, їх частинні похідні	8	2	2	4
Змістовий модуль 4. Визначений інтеграл, диференціальні рівняння				
Визначений інтеграл, його обчислення, властивості, застосування	26	6	6	14
Диференціальні рівняння (ДР) 1-го порядку, ДР 2-го порядку	30	8	8	14
Всього годин	**120**	**30**	**30**	**60**

Орієнтовна структура навчальної дисципліни

Галузь знань – 13 «Механічна інженерія»

Спеціальність – 133 «Галузеве машинобудування»

Назви змістових модулів і тем	Всього годин	у тому числі		
		лекції	практика	с.р.
Змістовий модуль 1. Лінійна та векторна алгебра. Аналітична геометрія				
Лінійна алгебра	17	7	6	4
Векторна алгебра	19	8	7	4
Аналітична геометрія	42	15	15	12
Змістовий модуль 2. Диференціальне та інтегральне числення				
Вступ до аналізу	18	4	8	6
Похідна та її застосування	30	8	12	10
Інтегральне числення	32	10	12	10
Диференціальні рівняння	30	8	12	10
Змістовий модуль 3. Ряди. Функції багатьох змінних				
Ряди	22	6	6	10
Функції багатьох змінних	18	4	4	10
Змістовий модуль 4. Елементи теорії ймовірностей. Елементи математичної статистики				
Випадкові події. Випадкові величини	15	3	2	10
Елементи мат. статистики	15	3	2	10
Усього годин	**258**	**76**	**86**	**96**

Орієнтовна структура навчальної дисципліни

Галузь знань 14 «Електрична інженерія»,

Спеціальність – 141«Електроенергетика, електротехніка, електромеханіка»

Назви змістових модулів і тем	Всього годин	у тому числі		
		лекції	практика	с.р.
Змістовий модуль 1. Лінійна та векторна алгебра. Аналітична геометрія				
Лінійна алгебра	13	6	3	4
Векторна алгебра	13	6	3	4
Аналітична геометрія	24	12	6	6
Змістовий модуль 2. Диференціальне та інтегральне числення				
Вступ до аналізу	10	6	2	2
Похідна та її застосування	34	12	14	8
Інтегральне числення	29	10	14	5
Диференціальні рівняння	27	8	14	5
Змістовий модуль 3. Ряди. Функції багатьох змінних				
Ряди	10	2	2	6
Функції багатьох змінних	12	4	2	6
Змістовий модуль 4. Елементи теорії ймовірностей. Елементи математичної статистики				
Випадкові події. Випадкові величини	21	2	3	16
Елементи мат. статистики	47	8	7	32
Усього годин	**240**	**76**	**70**	**94**

КОРОТКИЙ ТЕОРЕТИЧНИЙ КУРС

Розділ 1. Системи алгебраїчних рівнянь, методи їх розв'язування

1.1 Матриці. Дії над матрицями. Визначники

Матрицею розмірів $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел, яка містить m рядків та n стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

де a_{mn} – довільна компонента (елемент) матриці, m – номер її рядка, n – номер стовпця. Над матрицями виконують такі дії:

Множення матриці на число:

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Сума (різниця) двох матриць:

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Дана дія існує тільки для матриць однакової розмірності.

Добуток двох матриць:

$$C = AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix},$$

де $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}$.

Дана дія можлива тільки за умови, коли кількість рядків першої матриці відповідає кількості стовпців другої матриці.

Транспонування матриці

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Визначник матриці другого порядку – це число, яке обчислюється за правилом

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Визначник матриці третього порядку – це число, яке обчислюється за правилом (правило трикутників)

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Теорема про розклад визначника:

Якщо A – квадратна матриця, то її визначник дорівнює сумі попарних добутків елементів будь-якого стовпця (рядка) на їх відповідні алгебраїчні доповнення.

Теорема розкладання дає можливість обчислювати визначники квадратних матриць вищих порядків.

Матриця A^{-1} називається оберненою до невиродженої квадратної матриці A, якщо виконується співвідношення:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E .$$

Обернена матриця має вигляд

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де Δ – визначник матриці A, A_{ij} – алгебраїчні доповнення відповідних елементів даної матриці.

Приклад 1.1. Знайти значення виразу $Y = -3A + B^T$, де

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання.

$$Y = -3\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -15 & -24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 7 \\ -15 & -23 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.2. Знайти добуток двох матриць C та D,

де

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання.

$$C\cdot D=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ -1 & 4 & 2\\ 0 & 3 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -4 & 7\\ 1 & -2 & 0\\ -1 & 2 & -3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 3+0\cdot 1+(-3)\cdot(-1) & 1\cdot(-4)+0\cdot(-2)+(-3)\cdot 2 & 1\cdot 7+0\cdot 0+(-3)\cdot(-3)\\ (-1)\cdot 3+4\cdot 1+2\cdot(-1) & (-1)\cdot(-4)+4\cdot(-2)+2\cdot 2 & (-1)\cdot 7+4\cdot 0+2\cdot(-3)\\ 0\cdot 3+3\cdot 1+5\cdot(-1) & 0\cdot(-4)+3\cdot(-2)+5\cdot 2 & 0\cdot 7+3\cdot 0+5\cdot(-3)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}6 & -10 & 16\\ -1 & 0 & -13\\ -2 & 4 & -15\end{pmatrix}.$$

Приклад 1.3. Знайти $\det A$, $\det D$, де

$$A=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 5 & 8\end{vmatrix},\quad D=\begin{vmatrix}3 & -4 & 7\\ 1 & -2 & 0\\ -1 & 2 & -3\end{vmatrix}.$$

Розв’язання.

$$\det A=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 5 & 8\end{vmatrix}=24+5=29,$$

$$\det D=\begin{vmatrix}3 & -4 & 7\\ 1 & -2 & 0\\ -1 & 2 & -3\end{vmatrix}=3\cdot(-2)\cdot(-3)+1\cdot 2\cdot 7+(-4)\cdot(-1)\cdot 0-(-1)\cdot(-2)\cdot 7-$$

$$-3\cdot 0\cdot 2-1\cdot(-4)\cdot(-3)=18+14-14-12=6.$$

Приклад 1.4. Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}.$$

Розв’язання. Обчислимо

$$\det A=\begin{vmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 10 & -5 & 0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ 10 & -5\end{vmatrix}=15-10=5.$$

$\det A\neq 0$ – отже обернена матриця існує.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 4\end{vmatrix}=5,\ A_{12}=-\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=10,\ A_{13}=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & 4\end{vmatrix}=4,\ A_{22}=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 2 & 4\end{vmatrix}=12,\ A_{23}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}3 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-3,\ A_{33}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=1.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ 10 & 12 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5}\\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}.$$

Переконаємося, що знайдена матриця A^{-1} справді є оберненою до матриці A. Знайдемо добуток AA^{-1}

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5}\\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Задача 1.5. Галузь з трьох заводів виготовляє два види продукції. Матрицею *A* подано об'єми виготовленої продукції на кожному заводі за перший місяць, матрицею В – за другий місяць:

$$A=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\\4&5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&4\\0&2\\3&4\end{pmatrix}.$$

Знайти: а) об'єм продукції за два місяці; б) приріст об'ємів виробництва за другий місяць у порівнянні з першим за видами продукції і заводами; в) вартісне вираження виробленої продукції за два місяці (у доларах), якщо $\mu = 27$ – курс долара по відношенню до гривні.

Розв'язання. а) Об'єм продукції за два місяці визначається сумою матриць *A* та *B*.

$$C = A + B = \begin{pmatrix}2&3\\1&2\\4&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&4\\0&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&7\\1&4\\7&9\end{pmatrix}.$$

б) Приріст об'ємів виробництва за другий місяць у порівнянні з першим виражається різницею матриць

$$D = B - A = \begin{pmatrix}3&4\\0&2\\3&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&3\\1&2\\4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\\-1&-1\end{pmatrix}.$$

Додатні елементи показують, що на заводі об'єм продукції збільшився, від'ємні – зменшився, нульові – не змінився.

в) Для знаходження вартісного вираження виробленої продукції за два місяці потрібно знайти добуток $\mu \cdot C$.

1.2 Системи лінійних рівнянь та методи їх розв'язання

Система лінійних алгебраїчних рівнянь – це сукупність скінченної кількості лінійних рівнянь, розв'язком яких вважають точку, координати якої задовольняють будь-яке рівняння даної системи. Зокрема, систему трьох лінійних рівнянь з трьома змінними (невідомими) записують у вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \qquad (1.1)$$

де a_{ij} і b_i – задані коефіцієнти системи. Числа b_i називають також вільними членами системи.

У вищій математиці серед класичних методів розв'язування систем алгебраїчних рівнянь розглядають наступні методи: метод Крамера, матричний та Гауса.

1) **Метод Крамера.** Даний метод поміж інших вважається найбільш розповсюдженим і нескладним, оскільки потребує застосування техніки правильного обчислення визначників. Його недоліком є те, що для систем вищих порядків даний метод не є оптимальним, оскільки визначники вищих порядків потребують значних обчислень.

Формули Крамера для системи (1.1) мають вигляд:

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta},\ y=\frac{\Delta y}{\Delta},\ z=\frac{\Delta z}{\Delta},$$

де

$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$ – визначник системи (1.1),

$\Delta x=\begin{vmatrix} b_1a_{12}a_{13} \\ b_2a_{22}a_{23} \\ b_3a_{32}a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta y=\begin{vmatrix} a_{11}b_1a_{13} \\ a_{21}b_2a_{23} \\ a_{31}b_3a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta z=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}b_1 \\ a_{21}a_{22}b_2 \\ a_{31}a_{32}b_3 \end{vmatrix}$ – визначники, які дістають з визначника Δ заміною першого, другого та третього стовпців, відповідно, стовпцем вільних членів.

Приклад 1.6. Користуючись формулами Крамера, розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x-3y+z=1 \\ 3x+y-3z=-8 \\ 3x+2y+z=-1 \end{cases}.$$

Розв'язання. Обчислимо визначники системи

$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=41$, $\Delta x=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -8 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-41$,

$\Delta y=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -8 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$, $\Delta z=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=82$.

Тоді за формулами Крамера маємо

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{-41}{41}=-1,\quad y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{0}{41}=0,\quad z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{82}{41}=2.$$

Таким чином, $x=-1,\ \ y=0,\ \ z=2$ – розв'язок системи.

2) **Матричний метод** базується на обчисленні та використанні оберненої матриці до матриці системи A. Систему лінійних рівнянь можна записати у вигляді матричної рівності

$$A\cdot X=B,$$

де A – квадратна матриця $n-$го порядку, складена з коефіцієнтів при невідомих, X – матриця розмінності $(n\times 1)$, складена з невідомих; B матриця розмірності $(n\times 1)$, складена з вільних членів системи.

Розв'язок невиродженої системи лінійних алгебраїчних рівнянь, записаної у вигляді матричної рівності, знаходять за формулою:

$$X=A^{-1}\cdot B.$$

Приклад 1.7. Розв'язати систему рівнянь матричним методом

$$\begin{cases}3x_1-x_2=1\\-2x_1+x_2+x_3=-1\\2x_2-x_2+4x_3=-4\end{cases}.$$

Розв'язання. Запишемо систему в матричному вигляді $AX=B,$

де

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&0\\-2&1&1\\2&-1&4\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}.$$

Оскільки для матриці A їй обернену ми знайшли в прикладі (1.4), тому маємо

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{4}{5}&-\frac{1}{5}\\2&\frac{12}{5}&-\frac{3}{5}\\0&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\\2-\frac{12}{5}+\frac{12}{5}\\0-\frac{1}{5}-\frac{4}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1=1,\quad x_2=2,\quad x_3=-1$ – розв’язок системи.

Метод Гауса. Цей метод є ефективним при розв’язуванні систем вищих порядків. Суть методу полягає в тому, щоб застосуванням так званих елементарних перетворень над рядками розширеної матриці системи $\overline{A}=\overline{A|B}$ звести дану матрицю до трапецієвидного вигляду, коли всі числа, що розташовані нижче головної діагоналі – нулі. З третього рядка знаходиться невідома, потім з другого рядка при знайденій x_3 знаходиться невідома x_2, і, нарешті, при знайдених x_3 та x_2 знаходиться невідома x_1. Цим реалізується прямий хід методу Гауса. Зворотній хід даного методу полягає у тому, що продовжуючи застосування елементарних перетворень, розширена матриця зводиться до такого вигляду, в якому сама матриця A стане діагональною, тобто її ненульові компоненти мають бути розташовані тільки по головній діагоналі. Тоді кожна з шуканих невідомих знаходиться безпосередньо з відповідного рядка такої утвореної матриці.

До елементарних перетворень рядків розширеної матриці системи належать такі перетворення:

1. Перестановка місцями відповідних чисел двох довільних рядків.
2. Множення всіх чисел довільного рядка на відмінне від нуля число.
3. Додавання чи віднімання до чисел довільного рядка відповідних

чисел будь-якого іншого рядка, домножених на стале число.

Приклад 1.8. Розв'язати систему рівнянь методом Гауса

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_2 - x_2 + 4x_3 = -4 \end{cases}$$

Розв'язання. Реалізуємо прямий хід метода Гауса

$$\overline{A} = A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

З третього рядка останньої матриці маємо $x_3 = -1.$ З другого рядка $x_2 + 3x_3 = -1$, звідки $x_2 = 2.$ Нарешті, з першого рядка маємо: $x_1 + x_3 = 0,$ звідки $x_1 = 1.$ Реалізуємо зворотній хід методу Гауса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) = E|X,$$

тоді маємо шукані розв'язки $x_1 = 1,\ \ x_2 = 2,\ \ x_3 = -1.$

Задача 1.9. В таблиці наведені дані, що характеризують кількість деталей, необхідних для виготовлення деяких виробів.

Найменування деталей	Тип виробу		
	1	2	3
1. Колесо	5	2	8
2. Вісь	4	3	1
3. Корпус	1	2	1

Записати в матричній формі залежність між кількістю деталей та кількістю виробів.

Розв’язання. Загальна кількість деталей може бути записана у вигляді наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases} y_1 = 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 \\ y_2 = 4x_1 + 3x_2 + x_3 \\ y_3 = x_2 + 2x_2 + x_3 \end{cases},$$

де y_i – загальна кількість деталей, x_j – кількість виробів (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3).

У матричній формі ці рівняння можна записати так:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

або $y = A\,x$, де $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Задача 1.10. У схемі, зображеній на рисунку (1.1), джерела струму мають електрорушійні сили $\varepsilon_1 = 8B,\ \varepsilon_2 = 5B$ і внутрішні опори $r_1 = 1\ Ом,\ r_2 = 0{,}5\ Ом,$

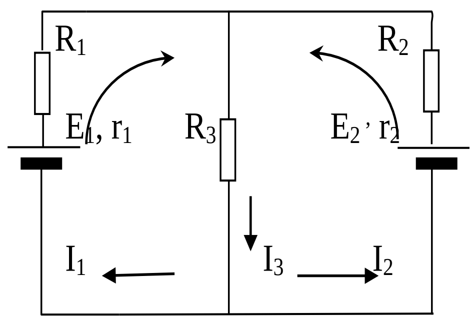


Рис. 1.1 Схема електричного кола

опори $R_1 = 3\ Ом, R_2 = 2\ Ом, R_3 = 4\ Ом.$ Визначити струми в усіх ділянках кола.

Розв'язання. До розгалуженого кола застосуємо правило Кіргофа. Напрями струмів $I_1,\ I_2,\ I_3$ вкажемо стрілками, як показано на рисунку. Оскільки в колі є тільки два вузли, то достатньо записати рівняння за першим правилом Кіргофа лише для одного з них, наприклад вузла *A*:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0.$$

Оберемо напрями обходу незалежних контурів $AB\varepsilon_1 A$ і $B\varepsilon_2 AB$ уздовж напрямів струмів I_1 і I_2. Для цих контурів складемо рівняння за другим правилом Кіргофа:

$$I_3R_3 + I_1(R_1 + r_1) = \varepsilon_1$$
$$I_3R_3 + I_2(R_2 + r_2) = \varepsilon_2.$$

Ці рівняння разом із попереднім рівнянням для струмів утворюють систему рівнянь. В одержані рівняння підставимо задані величини і запишемо їх у такому вигляді:

$$\begin{cases} 1I_1 + 1I_2 - 1I_3R_3 = 0 \\ 4I_1 + 0I_2 + 4I_3 = 8 \\ 0I_3 + 2{,}5I_2 + 4I_3 = 5 \end{cases}.$$

Розв'язавши цю систему за формулами Крамера, одержимо:

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-32}{-36} = 0{,}9\ A,\ I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-8}{-36} = 0{,}2\ A,\ I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-40}{-36} = 1{,}1\ A.$$

Розділ 2. Вектори, типи добутків векторів

До лінійних належать такі операції над векторами:

– множення вектора на скаляр $\alpha \in \boldsymbol{R}$. При цьому одержаний вектор $\alpha\vec{a}$ геометрично, залежно від величини і знаку α, розтягується, стискається, змінює напрям $(\alpha < 0)$;

– додавання векторів. Дія виконується за правилом паралелограма або трикутника.

Якщо вектор задано в координатній формі, то у разі множення його на скаляр, усі координати вектора необхідно помножити на цей скаляр, а в разі додавання – додати відповідні його координати.

Скалярний добуток векторів обчислюється за формулою

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi; \;\; \vec{a} \cdot \vec{b} = |a|\,\text{пр}_{\vec{a}}\;\vec{b} = |b|\,\text{пр}_{\vec{b}}\;\vec{a}\,;$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\,.$$

Кут φ між векторами

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_b^2 + b_y^2 + b_z^2}}\,,$$

умови паралельності та перпендикулярності двох заданих векторів, відповідно, будуть такими

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}\,, \qquad a_x b_x + a_y\, b_y + a_z b_z = 0\,.$$

Векторний добуток векторів обчислюється за формулою

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

При використанні векторного добутку векторів потрібно пам’ятати, що він некомутативний (множники не переставляються місцями!), а його модуль дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах – множниках даного добутку (рис. 2.1).

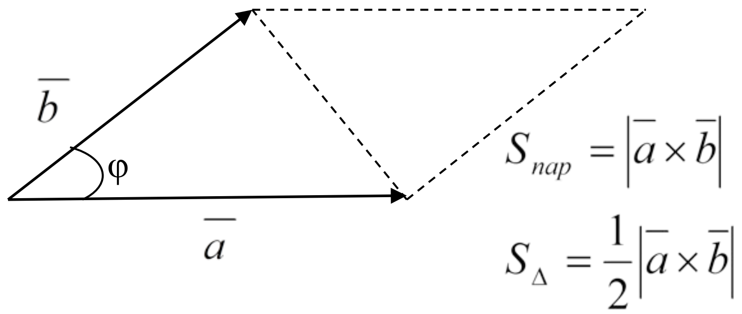


Рис. 2.1. Геометричний зміст векторного добутку

Мішаний добуток трьох векторів знаходиться за формулою

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Геометричний зміст мішаного добутку векторів полягає у тому, що його модуль дорівнює об’єму паралелепіпеда (рис.2.2) або об’єму піраміди (рис.2.3), побудованих на даних векторах.

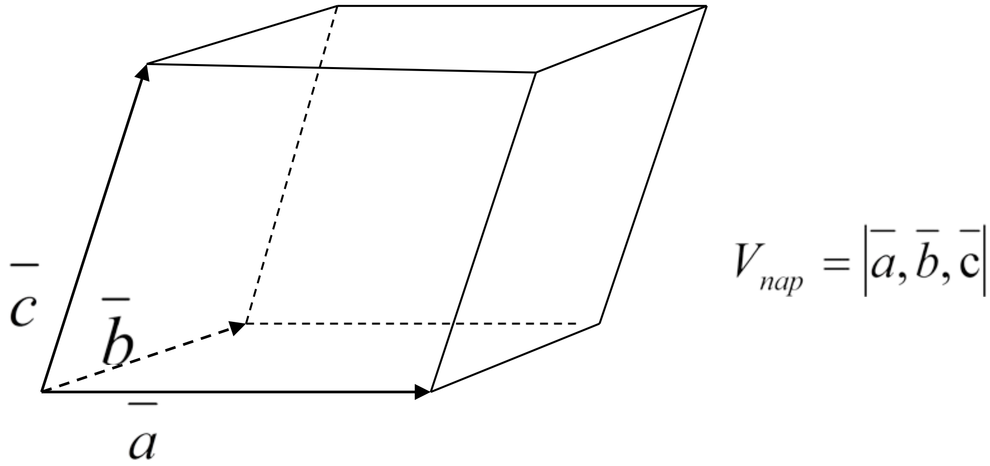
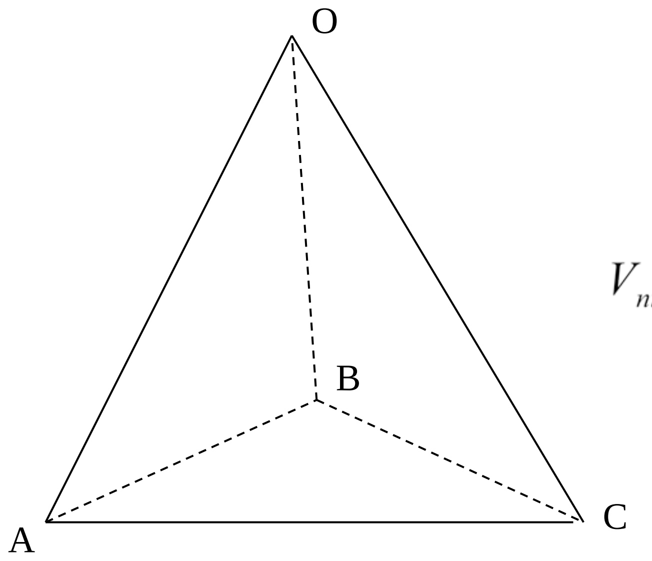


Рис. 2.2 Геометричний зміст мішаного добутку



$$V_{nip} = \frac{1}{6}\left|\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right|$$

Рис. 2.3 Геометричний зміст мішаного добутку

Мішаний добуток також використовують для перевірки компланарності (належності одній площині) трьох векторів.

Приклад 2.1. Обчислити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, якщо відомо, що $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$; $|\vec{q}| = 3$ i $\widehat{\vec{p},\vec{q}} = \frac{\pi}{4}$.

Розв’язання. З визначення операції додавання векторів відомо, що одна діагональ паралелограма $\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b} = 6\vec{p} - \vec{q}$, а друга $\vec{d}_2 = \vec{a} - \vec{b} = 4\vec{p} + 5\vec{q}$. Довжина довільного вектора визначається за формулою: $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a} \cdot \vec{a})}$. Тоді

$$\left|\vec{d}_1\right| = \sqrt{\left(6\vec{p} - \vec{q}\right)^2} = \sqrt{36\left(\vec{p}\right)^2 - 12\vec{p} \cdot \vec{q} + \vec{q}^{\,2}} = \sqrt{36\left(2\sqrt{2}\right)^2 - 12 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3\cos\frac{\pi}{4} + 9} = 15;$$

$$\left|\vec{d}_2\right| = \sqrt{\left(4\vec{p}+5\vec{q}\right)^2} = \sqrt{16\vec{p}^{\,2}+40\vec{p}\cdot\vec{q}+25\vec{q}^{\,2}} = \sqrt{16\cdot\left(2\sqrt{2}\right)^2+40\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\cos\frac{\pi}{4}+25\cdot 9}$$

$$= \sqrt{593}.$$

Приклад 2.2. Дано три послідовні вершини паралелограма: $A(-3;\,-2;\,0)$, $B(3;\,-3;\,1)$, $C(5;\,0;\,2)$. Знайти четверту вершину D і кут між його діагоналями.

Розв'язання. Нехай шукана вершина D має координати $(x;\,y;\,z)$, (рис 2.4.). З умови колінеарності векторів $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{BC}$ маємо: $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+2}{3}=z$, або $x=2z-3;\ y=3z-2$.

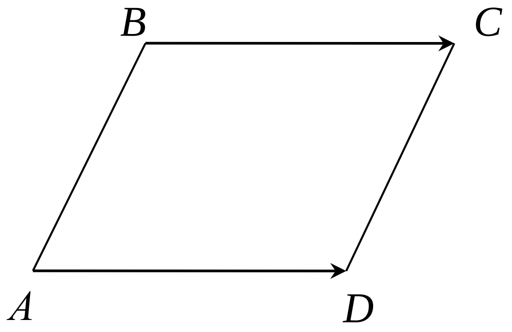


Рис. 2.4 Паралелограм

Згідно з властивостями паралелограма

$$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| \text{ або}$$

$$\sqrt{4z^2+9z^2+z^2} = \sqrt{14} \Rightarrow z=1;\ \ x=-1;\ \ y=1;\ \ D(-1;1,1).$$

Діагоналі паралелограма дорівнюють відповідно сумі і різниці векторів сторін $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=(8;\,2;\,2)$; $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=(-4;\,4;\,0)$. Кут між діагоналями знайдемо за формулою

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{BD}\right|} = \frac{-32+8}{\sqrt{72}\cdot\sqrt{32}} = -\frac{1}{2};$$

отже, $\varphi = 120^\circ$.

Приклад 2.3. Знайти площу паралелограма, діагоналями якого є вектори $2\vec{m}-\vec{n}$ і $4\vec{m}-5\vec{n}$, де $\vec{m}$ і $\vec{n}$ – одиничні вектори, і кут між ними дорівнює 45°.

Розв’язання. Позначимо через $\vec{a}$ і $\vec{b}$ сторони паралелограма, тоді $\vec{a}+\vec{b}=2\vec{m}-\vec{n},$ $\vec{a}-\vec{b}=4\vec{m}-5\vec{n}$, звідки $\vec{a}=3\vec{m}-3\vec{n};$ $\vec{b}=-\vec{m}+2\vec{n}$. Площу паралелограма знайдемо як модуль векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}.$

Отже,

$$S=\left|\left(3\vec{m}-3\vec{n}\right)\times\left(-\vec{m}+2\vec{n}\right)\right|=3\left|m\times n\right|=3\sin 45^{\circ}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Приклад 2.4. Знайти площу і висоту *BD* трикутника, вершинами якого є точки $A(1;-2;8);$ $B(0;0;4);$ $C(6;2;0)$.

Розв’язання. Знайдемо вектори $\overrightarrow{AB}=(-1;2;-4)$ і $\overrightarrow{AC}=(5;4;-8)$. Модуль векторного добутку буде дорівнювати подвійній площі трикутника, побудованого на цих векторах:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 2 & -4\\ 5 & 4 & -8\end{vmatrix}=-28\vec{j}-14\vec{k};$$

звідки $S=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=7\sqrt{5}$.

Висота трикутника за відомої довжини основи буде

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{105};\quad h=\frac{2s}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{2}{3}\sqrt{21}.$$

Приклад 2.5. Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, побудований на векторах $\overrightarrow{AB}(4,3,0)$, $\overrightarrow{AD}(2,1,2)$ $і$ $\overrightarrow{AA_1}(-3,-2,5)$. Знайти: а) об'єм паралелепіпеда; б) площі граней ABCD і ADD_1A_1; в) довжину висоти, проведеної із вершини A_1 на грань ABCD; г) косинус кута φ, між ребром AB і діагоналлю B_1D; д) косинус кута φ_2 між гранями ABCD і $ADD_1A_{1)}$ (рис.2.5).

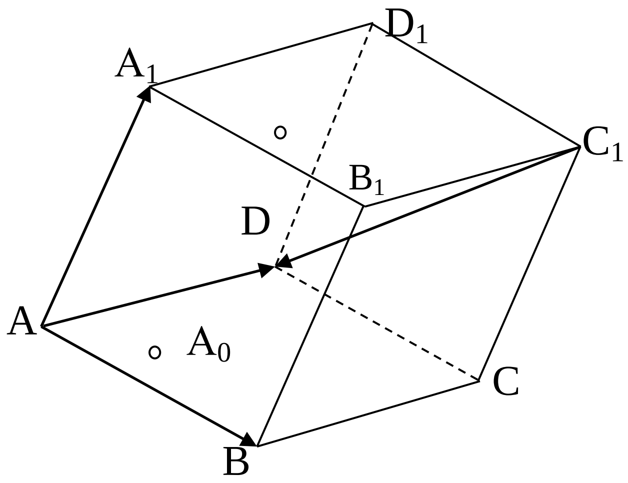


Рис. 2.5. Паралелепіпед

Розв’язання. а) $V=\left|\left[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AD}\right]\overrightarrow{AA_1}\right|$. Знайдемо $\left[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AD}\right]\overrightarrow{AA_1}$.

Використаємо формулу мішаного добутку

$$\left[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AD}\right]\overrightarrow{AA_1}=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}=-44,\quad V=44 \text{ куб. од.}$$

б) Для знаходження площі грані ABCD використаємо формулу $S_{ABCD}=\left|\left[\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\right]\right|$.

$$\left[\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AD}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}=6\vec{i}-8\vec{j}-2\vec{k}\quad \left|\left[\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AD}\right]\right|=\sqrt{36+64+4}=\sqrt{104}=2\sqrt{26}$$

Отже, $S_{ABCD}=2\sqrt{26}$ кв. одиниць.

Аналогічно знаходимо площу грані ADD_1A_1: $S_{ADD_1A_1}=\left|\left[\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}\right]\right|$

$$\left[\overrightarrow{AD}\,\overrightarrow{AA_1}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & 2\\ -3 & -2 & 5\end{vmatrix}=9\vec{i}-16\vec{j}-\vec{k},$$

$$\left|\left[\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}\right]\right|=\sqrt{81+256+1}=\sqrt{338}=13\sqrt{2},\quad S_{ADD_1A_1}=13\sqrt{2}\text{ кв. од.}$$

в) Для знаходження довжини висоти, проведеної з вершини A_1 на грань $ABCD$, скористаємось формулою для знаходження об'єму паралелепіпеда $V=h\cdot S_{ABCD}$.

Звідси $h=\dfrac{V}{S_{ABCD}}=\dfrac{44}{2\sqrt{26}}=\dfrac{22\sqrt{26}}{26}=\dfrac{11\sqrt{26}}{13}$.

Отже, $h=\dfrac{11\sqrt{26}}{13}$ лін. од.

г) Для знаходження $\cos\varphi_1$, скористаємось формулою $\cos\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$;

$\cos\varphi_1=\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B_1D}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{B_1D}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{B_1D}\right|}$. Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{B_1D}$:

$$\overrightarrow{B_1D}=\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD},\quad \overrightarrow{B_1D}(1,0,-3).$$

За формулою скалярного добутку отримаємо: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B_1D}=4\cdot1+3\cdot0+0\cdot(-3)=4$,

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{16+9+0}=5,\quad \left|\overrightarrow{B_1D}\right|=\sqrt{1+0+9}=\sqrt{10},\quad \cos\varphi_1=\frac{4}{5\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{10}}{25}.$$

д) Для знаходження косинуса кута між гранями *ABCD* і ADD_1A_1 скористаємось тим, що кут між двома площинами дорівнює куту між перпендикулярами до цих площин. Позначимо вектор, перпендикулярний до грані ADD_1A_1 через $\vec{n}_2$, а до грані *ABCD* через $\vec{n}_1$, тоді $\cos\varphi_2 = \dfrac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$. В ролі $\vec{n}_1$ можна взяти векторний добуток

векторів $\overrightarrow{AB}$ *і* $\overrightarrow{AD}$, тобто $\vec{n}_1(6,-8,-2)$, а в ролі $\vec{n}_2$ – векторний добуток векторів $\overrightarrow{AD}$ *і* $\overrightarrow{AA_1}$, тобто $\overrightarrow{n_2}(9;-16;-1)$.

Тоді, $\cos\varphi_2 = \dfrac{6\cdot 9+(-8)\cdot(-16)+(-2)\cdot(-1)}{2\sqrt{26}\cdot 13\sqrt{2}} = \dfrac{46\sqrt{13}}{169}$.

Задача 2.6. Сила $\vec{F} = \{2;-4;5\}$ прикладена до точки $O\,(0;2;1)$. Визначити момент цієї сили відносно точки $A(-1;2;3)$.

Розв'язання. Момент сили $\vec{F}$ відносно точки A є вектор $\vec{M} = \overrightarrow{OA}\times\vec{F}$. Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{OA}$ та шуканого вектора $\vec{M}$: $\overrightarrow{OA} = \{-1;0;2\}$,

$$\vec{M} = \overrightarrow{OA}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + 9\vec{j} + 4\vec{k},$$

тобто $\vec{M} = \{8;9;4\}$.

Розділ 3. Пряма на площині

Пряма лінія на площині – це множина точок $M(x;y)$, координати яких задовольняють рівняння $Ax + By + C = 0,$ де $A,\ B,\ C$ – задані коефіцієнти прямої, при цьому $A^2 + B^2 > 0$.

Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0;y_0)$ і має нормальний вектор $\vec{N}=(A;B)$ буде наступним

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \qquad (3.1)$$

Рівняння прямої, що проходить через дві різні точки $M_1(x_1;y_1)$і $M_2(x_2;y_2)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (3.2)$$

Рівняння прямої, що проходить через дану точку $M_0(x_0;y_0)$ у заданому напрямку (рівняння з кутовим коефіцієнтом нахилу)

$$y-y_0=k(x-x_0), \qquad (3.3)$$

де $k=tg\alpha$ – кутовий коефіцієнт прямої, α – кут між прямою і додатнім напрямом осі OX.

Якщо прямі l_1 і l_2 задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y=k_1x+b_1$ і $y=k_2x+b_2$, то кут φ між ними обчислюється за формулою

$$tg\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|.$$

Умова паралельності прямих l_1 і l_2

$$k_1=k_2,$$

а умова їх перпендикулярності

$$k_1=-\frac{1}{k_2}.$$

Якщо прямі l_1 і l_2 задані загальними рівняннями $A_1x+B_1y+C_1=0$ і

$A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то величина кута φ між ними обчислюється за формулою

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^{\ 2} + B_1^{\ 2}} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Умова паралельності прямих

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2},$$

Умова перпендикулярності прямих

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Відстань d від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ обчислюється за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Приклад 3.1. Дано трикутник з вершинами $A(1; -2)$, $B(5; 4)$, $C(-2;\ 0)$. Скласти рівняння медіани CM, висоти BN та бісектриси AP.

Розв’язання. Якщо $M(x_1; y_1)$ – середина сторони AB, то $x_1 = \frac{1+5}{2} = 3$, $y_1 = \frac{-2+4}{2} = 1$, звідси $M(3;\ 1)$. Рівняння медіани CM, знайдемо як рівняння прямої, що проходить через дві точки $C(-2;\ 0)$, $M(3; 1)$.

За формулою (3.2) маємо

$$\frac{x+2}{3+2} = \frac{y-0}{1-0} \quad \Rightarrow \quad x - 5y + 2 = 0.$$

Оскільки висота BN проходить через точку B і має вектор нормалі

$\overrightarrow{AC}(-2-1;0+2)=(-3;2),$ то за формулою (3.1) дістанемо рівняння прямої *BN*

$$-3(x-5)+2(y-4)-7=0 \quad \Rightarrow \quad 3x-2y-7=0.$$

Для визначення рівняння прямої *AP* скористаємося властивістю бісектриси

$$\frac{BP}{PC}=\frac{AB}{AC}.$$

Маємо

$$AB=\sqrt{(5-1)^2+(4+2)^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}, AC=\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{13},$$ тому

$$\frac{BP}{PC}=\frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{13}}=2.$$

Оскільки точка $P(x;y)$ ділить відрізок BC у відношенні $\lambda=2,$ то за формулами

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, y=\frac{y_1+\lambda x_2}{1+\lambda},$$

дістанемо

$x=\dfrac{5+2(-2)}{1+2}=\dfrac{1}{3}, y=\dfrac{4+2+0}{1+2}=\dfrac{4}{3}$ і тоді координати точки $P\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{4}{3}\right).$

Отже, рівняння бісектриси *AP*, знайдемо як рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(1;-2)$ і $P\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{4}{3}\right)$ (формула 3.2). Маємо

$$\frac{x-1}{\frac{1}{3}-1}=\frac{y+2}{\frac{4}{3}+2} \text{ або } \frac{10}{3}(x-1)=-\frac{2}{3}(y+2) \text{ або } 5x+y-3=0.$$

Задача 3.2. Знайти найменшу відстань від озера, берегова лінія якого описується функцією $y=x^2-4x+6$, до шосе, яке визначається прямою $x+y-2=0.$

Розв'язання. На кривій знаходимо $y = x^2 - 4x + 6$ точки, в яких дотичні пралельні заданій прямій $x + y - 2 = 0.$ Визначаємо відстань від цих точок до прямої, після чого вибираємо з них найменшу. Оскільки дана пряма має кутовий коефіцієнт $k = -1,$ то паралельні їй дотичні мають той самий кутовий коефіцієнт $y' = 2x - 4 = -1,$ звідки маємо $x = 3/2,\quad y(3/2) = 9/4.$ Тобто маємо точку $B(3/2;9/4),$ тому за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

відстань дорівнює $d = \dfrac{7}{4\sqrt{2}}\cdot$ А це і буде шукана відстань від озера до шосе.

Розділ 4. Пряма та площина у просторі

Рівняння вигляду $Ax + By + Cz + D = 0$ відображає площину. Коефіцієнти *A*, *B*, *C* при змінних $x,\quad y,\quad z$ є координатами вектора, перпендикулярного даній площині.

Кут між двома площинами $Ax + By + Cz + D = 0$ і $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ визначається за формулою

$$\cos\varphi = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}.$$

Умова паралельності двох площин

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1},$$

Умова перпендикулярності двох площин

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0 .$$

Відстань від точки $A(x_0, y_0, z_0)$ до площини, заданої загальним рівнянням, знаходять за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} .$$

Пряма у просторі може бути визначена як перетин двох площин

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0; \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \end{cases}$$

або канонічним рівнянням

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} ,$$

де $\vec{S} = (m, n, p)$ – напрямний вектор прямої, $M(x_0, y_0, z_0)$ – точка, що лежить на прямій.

Пряму в просторі можемо задати також параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = x_0 + mt; \\ y = y_0 + nt; \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$$

де t – довільний параметр.

Рівняння прямої в просторі, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} .$$

Площина і пряма у просторі, що задана канонічно, можуть перетинатися під деяким кутом $\alpha,$ який визначається за формулою

$$\sin\alpha = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

У разі виконання умови $Am + Bn + Cp = 0$ пряма і площина паралельні, а якщо $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$ – перпендикулярні. Умовою того, що пряма належить площині, є виконання співвідношень

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \\ Am + Bn + Cp = 0 \end{cases}.$$

Приклад 4.1. Скласти рівняння площини, що проходить через вісь OZ і утворює з площиною $2x + y - \sqrt{5}z = 0$ кут 60°, знайти відстань від шуканої площини до точки $A(1;\,3;\,5)$.

Розв’язання. Рівняння шуканої площини можна записати у вигляді $Ax + By = 0$, тому що вона проходить через вісь OZ. Використаємо другу умову задачі

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{2A + B}{\sqrt{A^2 + B^2}\cdot\sqrt{10}},$$

з якої одержимо рівняння $3\frac{A^2}{B^2} + 8\frac{A}{B} - 3 = 0;$ $\frac{A}{B} = -3$ або $\frac{A}{B} = \frac{1}{3}$.

Остаточно маємо, що умовам задачі задовольняють дві площини $3x - y = 0$ і $x + 3y = 0$. Точка A належить першій площині, тому що $d_1 = 0$, а відстань її до другої площини $d_2 = \frac{|1+9|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$.

Приклад 4.2. Знайти напрямний вектор прямої $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y=0 \end{cases}$; кути, які утворює пряма з осями системи координат.

Розв'язання. Вектори $\vec{N}_1(1;1;-1)$ і $\vec{N}_2(1;-1;0)$ перпендикулярні до відповідних площин, що задають рівняння прямої, тому напрямний вектор прямої $\vec{S}$ розташований перпендикулярно до кожного з векторів $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$. Згідно з означенням векторного добутку векторів

$$\vec{S}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}.$$

Отже, $\vec{S}=(-1;-1;-2)$.

Кути з відповідними координатними осями знайдемо за формулами

$$\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{6}};\ \cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{6}};\ \cos\gamma=-\frac{2}{\sqrt{6}}.$$

Приклад 4.3. Показати, що дві прямі

$$\begin{cases} x-z+2=0 \\ y-2z-1=0 \end{cases} \text{ і } \frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-2}{1}$$

перетинаються, записати рівняння площини, в якій вони розташовані.

Розв'язання. Дві прямі лежатимуть в одній площині, коли їх напрямні вектори $\vec{S}_1$ і $\vec{S}_2$ та вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ будуть компланарними. Точка $M_1(-2;1;0)$ належить першій прямій, а $M_2(2;4;2)$ – другій.

Вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (4;\ 3;\ 2)$. Напрямний вектор $\vec{S}_1 = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$

$= \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k};\ \ \vec{S}_2 = (3;1;1)$.

Мішаний добуток трійки вказаних векторів буде наступним

$$\left(\vec{S}_1 \times \vec{S}_2\right) \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, прямі лежать в одній площині. Для запису рівняння цієї площини знайдемо вектор $\vec{N} = \vec{S}_1 \times \vec{S}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$.

Точка $M_1(-2;1;0)$ належить цій площині. Отже, маємо

$$x + 2 + 2(y-1) - 5z = 0$$

або остаточно рівняння площини має вигляд $x + 2y - 5z = 0.$

Розділ 5. Границі функцій, розкриття неозначених границь

Практичне обчислення границь функцій базується на наступних теоремах та формулах:

Нехай $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = A,\ \ \lim\limits_{x\to a}\beta(x) = B.$ Тоді:

1. $\lim\limits_{x\to a} C = C,\ C - const$;   2. $\lim\limits_{x\to a}(\alpha(x) \pm \beta(x)) = A \pm B$;

3. $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)\beta(x) = A \cdot B$;   4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \dfrac{A}{B}$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ – перша визначна границя

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$, $\lim\limits_{x\to\mathbf{0}}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ – друга визначна границя

У найпростіших випадках знаходження границі функції зводиться до підстановки у функцію граничного значення аргументу. Але досить часто така підстановка приводить до невизначеностей виду: $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$; $\infty-\infty$; $0\cdot\infty$; 1^{∞}. Операцію знаходження границі у цих випадках називають розкриттям невизначеності. Розглянемо деякі окремі випадки.

1. Невизначеність виду $\dfrac{\infty}{\infty}$ задана відношенням двох многочленів.

Приклад 5.1. Знайти: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+2x-3}{5x^4+x^2+10x+4}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\dfrac{\infty}{\infty}$. Щоб розкрити невизначеність виду $\dfrac{\infty}{\infty}$, задану відношенням двох многочленів, потрібно поділити чисельник і знаменник дробу на найвищий степінь x, тобто на x^4

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x-3}{5x^4+x^2+10x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+2/x^3-3/x^4}{5+1/x^2+10/x^3+4/x^4}=\frac{1}{5}.$$

2. Невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$ задана відношенням двох многочленів.

Приклад 5.2. Знайти: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+3x-4}$.

Розв’язання.

Оскільки $\lim\limits_{x\to 1}(x^3+2x^2-x-2)=0;\ \lim\limits_{x\to 1}(x^2+3x-4)=0,$ то маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Щоб розкрити невизначеність виду $\frac{0}{0}$ потрібно розкласти чисельник і знаменник дробу на множники:

$x^3+2x^2-x-2=(x^2+3x+2)(x-1);\ x^2+3x-4=(x+4)(x-1)$.

Маємо

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+3x-4}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+3x+2)(x-1)}{(x+4)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x+2}{x+4}=\frac{6}{5}.$$

3. Невизначеність виду $\frac{0}{0}$ задана ірраціональними виразами.

Приклад 5.3. Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$.

Розв’язання. Маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Щоб розкрити невизначеність виду $\frac{0}{0}$ потрібно позбутися від ірраціональності, в даному прикладі в чисельнику. Для цього домножимо чисельник і знаменник дробу на спряжений вираз:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}=\frac{2}{3}.$$

4) Невизначеність виду $\infty-\infty$ задана ірраціональними виразами.

Приклад 5.4. Знайти: $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)$.

Розв’язання. Маємо невизначеність виду $\infty-\infty$, яку розкриємо, домноживши чисельник і знаменник дробу на спряжений вираз:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4x}-x)(\sqrt{x^2+4x}+x)}{\sqrt{x^2+4x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+4/x}+1}=2.$$

5. Невизначеність виду $\frac{0}{0}$ задана виразами, що містять тригонометричні функції, часто розкриваються за допомогою першої визначної границі.

Приклад 5.5. Знайти $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$.

Розв’язання. Маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$ яку розкриємо за допомогою першої визначеної границі:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\lim_{\mathbf{x}\to0}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}=\lim_{x\to0}\frac{5x}{3x}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{5}{3}.$$

6. Невизначеність виду 1^{∞} розкривають за допомогою другої визначної границі.

Приклад 5.6. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x+3}\right)^{1-5x}$.

Розв’язання. Маємо невизначеність виду 1^{∞}, яку розкриємо за допомогою другої визначної границі:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x+3}\right)^{1-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x}{2x+3}-1\right)^{1-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-2x-3}{2x+3}\right)^{1-5x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{2x+3}\right)^{1-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-3}{2x+3}\right)^{\frac{2x+3}{-3}}\right)^{\frac{-3(1-5x)}{2x+3}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-3(1-5x)}{2x+3}}=\sqrt{e^{15}}.$$

Приклад 5.7. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$.

Розв'язання. Розкриємо невизначеність 1^∞ за допомогою другої визначної границі

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}=\lim_{x\to 0}(1+(\cos x-1))^{\frac{(\cos x-1)}{(\cos x-1)x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\cos x-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\frac{-x^2}{2}}{x^2}}=e^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Функція $\alpha(x)$ є нескінченно малою функцією при $x\to a$ $(x\to\infty)$, якщо $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ $(\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0)$. Нехай $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ – нескінченно малі функції при $x\to a$, тоді якщо $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=1,$ то $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ є еквівалентними нескінченно малими $(\alpha_1(x)\sim\alpha_2(x))$.

Таблиця еквівалентних нескінченно малих функцій

$\sin x\sim x,\ x\to 0;$	$e^x-1\sim x,\ x\to 0;$
$tgx\sim x,\ x\to 0;$	$\log_a(1+x)\sim x\log_a e,\ a\to 0;$
$\arcsin x\sim x,\ x\to 0;$	$a^x-1\sim x\ln a,\ x\to 0;$
$arctgx\sim x,\ x\to 0;$	$\lg(1+x)\sim x\lg e,\ x\to 0;$
$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},\ x\to 0;$	$(1+x)^k-1\sim kx,\ x\to 0,\ k>0.$

Використовуючи таблицю еквівалентних нескінченно малих функцій, зручно обчислювати границі функцій.

Приклад 5.8. Знайти а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{tg 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\frac{arctg(x-1)}{x^2-4x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{3^{6x}-1}{\arcsin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 5x-\cos 3x}{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 7x}{\ln(1+2x)}$.

Розв’язання. а) Оскільки $\sin 2x \sim 2x$, $tg 4x \sim 4x$, при $x\to0$, то дістанемо

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{tg 4x}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{4x}=\frac{1}{2}.$$

б) Оскільки $arctg(x-1)\sim x-1$ при $x\to1$, то

$$\lim_{x\to1}\frac{arctg(x-1)}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{2}.$$

в) Оскільки $3^{6x}-1\sim 6x\ln 3$, $\arcsin 3x\sim 3x$ при $x\to0$, то

$$\lim_{x\to0}\frac{3^{6x}-1}{\arcsin 3x}=\lim_{x\to0}\frac{6x\ln 3}{3x}=2\ln 3.$$

г) Оскільки $\cos 5x-\cos 3x=-2\sin 4x\sin x$, $\sin 4x\sim 4x$,

$\sin x\sim x$ при $x\to0$, то дістанемо

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos 5x-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin 4x\sin x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-8x\cdot x}{x^2}=-8.$$

д) Оскільки $\sin 7x\sim 7x$, $\ln(1+2x)\sim 2x$ при $x\to0$, то

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 7x}{\ln(1+2x)}=\lim_{x\to0}\frac{7x}{2x}=\frac{7}{2}.$$

Розділ 6. Похідні функцій, їх обчислення

Наведемо основні правила, що найчастіше використовуються обчислюючи похідні. Нехай C – стала величина, а $u(x)$ і $v(x)$ – функції, які мають похідні в точці x. Тоді:

1. $C' = 0$;
2. $(Cf(x))' = C(f(x))'$;
3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
4. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$;
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$;
6. $\left(f(u(x))\right)' = f'(u) \cdot u'(x)$,

де $\left(f(u(x))\right)$ – складена функція від x.

Таблиця похідних

1. $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$;
2. $x' = 1$;
3. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$;
4. $\left(e^x\right)' = e^x$;
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
7. $(\cos x)' = -\sin x$;
8. $(\sin x)' = \cos x$;
9. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
10. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;

12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

13. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

14. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Приклад 6.1. Знайти похідні функції а) $y = 4x^3 - 2x + 6$;

б) $y = 5\sqrt[4]{x^5} + \dfrac{1}{\sqrt{2x}} - \dfrac{3}{x^4}$; в) $y = (\sin x - 1)\cdot\left(x^2 - 5\right)$; г) $y = \dfrac{x^7}{\cos x}$.

Розв’язання.

а) Скориставшись правилами диференціювання 1, 2, 3 і табличною формулою 1, будемо мати

$$y' = \left(4x^3 - 2x + 6\right)' = \left(4x^3\right)' - (2x)' + 6' =$$
$$= 4\left(x^3\right)' - 2(x)' + 0 = 4\cdot 3x^2 - 2 = 12x^2 - 2.$$

б) Обчислюючи похідну, доцільно всі корені записати у вигляді степеневої функції $y = 5x^{5/4} + (2x)^{-1/2} - 3x^{-4}$. Тоді

$$y' = \left(5x^{5/4}\right)' + \left((2x)^{-1/2}\right)' - \left(3x^{-4}\right)' =$$

$$= 5\cdot\frac{5}{4}\cdot x^{5/4-1} + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^{-1/2-1} - 3\cdot(-4)\cdot x^{-4-1} =$$

$$= \frac{25}{4}x^{1/4} - x^{-3/2} + 12x^{-5}.$$

в) Скористаємось формулою похідної добутку $(u\cdot v)' = u'v + uv'$

$$y' = (\sin x - 1)'\cdot\left(x^2 - 5\right) + (\sin x - 1)\cdot\left(x^2 - 5\right) =$$
$$= \cos x\cdot\left(x^2 - 5\right) + 2x(\sin x - 1).$$

г) Для знаходження похідної даної функції скористаємось правилом диференціювання частки $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Маємо $y' = \left(\frac{x^7}{\cos x}\right)' = \frac{(x^7)'\cos x - x^7(\cos x)'}{(\cos x)^2} =$

$$= \frac{7x^6\cos x + x^7\sin x}{(\cos x)^2}.$$

Приклад 6.2. Знайти похідну функцій: а) $y = \sin(4x+5)$; б) $y = \sin^2 x$; в) $y = \arccos\sqrt{x}$.

Розв’язання.

а) Дана функція є складеною, а саме, $y = \sin(u)$, де $u = 4x+5$; $y'_u = \cos u$, $u'_x = 4$. Використовуючи правило 6 маємо: $y'_x = \cos u \cdot 4 = 4\cos(4x+5)$.

б) Ця функція є також складеною. Останньою дією є піднесення до квадрату. Отже $y = u^2$, де $u = \sin x$. Тоді $y'_x = 2u \cdot u' = 2\sin x(\sin x)' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$.

в) $y' = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

Щоб продиференціювати неявно задану функцію $F(x, y) = 0$, потрібно взяти похідну по x від обох частин рівності, вважаючи y функцією від x, і одержане рівняння розв’язати відносно y'. Похідна неявної функції виражається через незалежну змінну x і саму функцію y.

Приклад 6.3. Знайти похідну $y'(x)$ функцій заданих неявно:

а) $x^3 + e^y - x^3 \ln y = 6$; б) $x^2 \cos y + y^2 \sin x + 3x - 2y + 2 = 0$.

Розв'язання.

а) Продиференціюємо почленно задане рівняння, пам'ятаючи, що y є функцією змінної x.

$$3x^2 + e^y \cdot y' - 3x^2 \ln y - x^3 \frac{1}{y} \cdot y' = 0$$

Виразимо з цього рівняння y'.

$$e^y \cdot y' - x^3 \frac{1}{y} \cdot y' = 3x^2 \ln y - 3x^2$$

$$\left(e^y - x^3 \frac{1}{y}\right) \cdot y' = 3x^2 (\ln y - 1)$$

$$y' = \frac{3x^2 y(\ln y - 1)}{\left(ye^y - x^3\right)}.$$

б) Диференціюємо задане рівняння по змінній x, вважаючи $y = y(x)$

$$2x\cos y - x^2 \sin y \cdot y' + 2y \cdot y' \sin x + y^2 \cos x + 3 - 2y' = 0\,.$$

Виразимо з цього рівняння y'.

$$\left(2y\sin x - x^2 \sin y - 2\right) \cdot y' = -2x\cos y - y^2 \cos x - 3$$

$$y' = \frac{-2x\cos y - y^2 \cos x - 3}{2y\sin x - x^2 \sin y - 2}.$$

Якщо функція y від x задана параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t_0 \le t \le T,$$

то похідна $\dfrac{dy}{dx}$ визначається теж параметричними рівняннями, а саме $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} \\ x = x(t) \end{cases}$ за умови, що $y'(t)$, $x'(t)$ існують і $x'(t) \ne 0$.

Приклад 6.4. Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ функції, заданої параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = 3(t - \cos t) \\ y = 3(1 - \sin t) \end{cases}.$$

Розв’язання.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3(1 - \sin t)'}{3(t - \cos t)'} = \frac{-\cos t}{(1 + \sin t)}.$$

Логарифмічною похідною функції $y = y(x)$ називають похідну від логарифма цієї функції, тобто $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$. Застосування попереднього логарифмування іноді спрощує обчислення, оскільки $y' = y(\ln y)'$.

Приклад 6.5. Знайти похідну функції $y = \sqrt[3]{\frac{x^2(x+1)}{x-3}}$.

Розв’язання.

Логарифмуючи задану рівність, дістанемо

$$\ln y = \frac{1}{3}\left(2\ln x + \ln(x+1) - \ln(x-3)\right).$$

Користуючись логарифмічною похідною, маємо:

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-3}\right) = \frac{2}{3}\frac{x^2 - 4x - 3}{x(x+1)(x-3)}.$$

Звідки $y' = y(\ln y)' = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{x^2(x+1)}{x-3}}\frac{x^2 - 4x - 3}{x(x+1)(x-3)} = \frac{2}{3}\frac{x^2 - 4x - 3}{\sqrt[3]{x(x+1)^2(x-3)^4}}$.

Зауважимо, що похідна від функції $f(x)$ називається похідною першого порядку. Похідна від першої похідної функції $f'(x)$

називається похідною другого порядку і позначається $f''(x)$ і т.д.

Приклад 6.6. Знайти похідну другого порядку функції $f(x)=\sin 3x$.

Розв'язання. Знаходимо першу похідну

$$f'(x)=(\sin 3x)'=3\cos 3x.$$

Від цієї функції ще раз візьмемо похідну

$$f''(x)=(3\cos 3x)'=-9\sin 3x$$

Задача 6.7. Радіус основи бункера з картоплею конічної форми дорівнює 5 м. Як зміниться вага картоплі в бункері, якщо його висота збільшиться на 1,5 м? (1 м^3 картоплі важить приблизно 4 ц).

Розв'язання. Позначимо висоту бункера через x, радіус основи через r, тоді об'єм бункера конічної форми має вигляд: $V=V(x)=\frac{1}{3}\pi r^2 x.$ За умовою задачі $r=5$ м, отже, $V(x)=\frac{25}{3}\pi x$. Вага картоплі пропорційна об'єму, тобто $P=4V$ або $P(x)=\frac{100}{3}\pi x$.

Знайдемо ΔP.

$\Delta P\approx dP=P'(x)dx=\frac{100}{3}\pi dx$, $dx\approx\Delta x=1{,}5$ – за умовою задачі, тому

$$\Delta P=1{,}5\cdot\frac{100}{3}\pi\approx 157 \text{ ц.}$$

Отже, вага картоплі зросте на 157 ц, коли висота бункера збільшиться на 1,5 м.

Задача 6.8. Потрібно вирити силосну яму об'ємом 32 м^3 з квадратним дном таких розмірів, щоб на облицювання її дна і стін пішла найменша кількість матеріалу. Які повинні бути розміри ями?

Розв'язання. Визначимо суттєві фактори, що впливають на розв’язування задачі. Суттєвими факторами є розміри ями. Оговорено, що дно ями – квадрат, об’єм ями 32 м^3. Припускаємо, що форма ями – прямий паралелепіпед. Суттєвою є також вимога, щоб на облицювання дна і стін пішла найменша кількість матеріалу. Ця вимога означає, що сумарна площа бокової поверхні та основи повинна бути найменшою.

Сформулюємо тепер математичну задачу: визначити розміри паралелепіпеда, щоб сумарна площа бокової поверхні та нижньої грані була найменшою.

Нехай x м – довжина сторони квадратного дна ями, тоді висоту ями H знайдемо із співвідношення $32 = x^2 H$, тобто $H = \frac{32}{x^2}$. Складемо сумарну функцію площі поверхні дна та стін силосної ями:

$$S(x) = x^2 + 4xH \text{ або } S(x) = x^2 + \frac{128}{x},\ x \neq 0.$$

Змінна x може набувати лише додатні значення, тому будемо шукати найменше значення $S(x)$ на додатній півосі. Знайдемо похідну функції $S(x)$. Дістанемо $S' = 2x - \frac{128}{x^2}$. Для находження критичних точок розв’яжемо рівняння $S' = 0$, тобто рівняння $2x - \frac{128}{x^2} = 0$. Звідки $2x^3 - 128 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 64$. Рівняння має один дійсний корінь $x = 4$, тоді $H = 2$.

Визначимо знак похідної поблизу точки $x = 4$. Маємо

$$S'(3) = 6 - 14{,}22 \approx -8{,}22 < 0,\ S'(5) = 10 - 5{,}12 = 4{,}88 > 0.$$

В точці $x = 4$ функція $S(x)$ має мінімум, він же і є найменшим значенням функції $S(4) = 16 + 32 = 48$. Ми не перевіряємо виконання достатніх умов екстремуму, оскільки за змістом задачі функція має один мінімум.

Отже, щоб на облицювання дна і стін силосної ями пішла найменша кількість матеріалу, її розміри мають бути $4:4:2$.

Задача 6.9. При якому відношенні глибини до ширини, канал прямокутного перерізу має гідравлічно найвигідніший профіль?

Розв'язання. Нехай x – ширина каналу, G – його переріз. Тоді глибина каналу дорівнює $\frac{G}{x}$, а його змочений периметр $P(x) = x + \frac{2G}{x}$. Потрібно знайти найменше значення функції $P(x)$ на $(0;\ \infty)$. Знайдемо похідну функції, маємо: $P'(x) = 1 - \frac{2G}{x^2}$. Так як $P'(\sqrt{2G}) = 0$ і $P'(x) < 0$ при $0 < x < \sqrt{2G}$; $P'(x) > 0$ при $x > \sqrt{2G}$, то функція $P(x)$ досягає найменшого значення в точці $x = \sqrt{2G}$. Отже, ширина каналу дорівнює $\sqrt{2G}$, глибина – $\frac{G}{\sqrt{2G}} = \sqrt{\frac{G}{2}}$, а шукане відношення дорівнює $\frac{1}{2}$.

Задача 6.10. Експериментально встановлено, що витрата бензину в літрах автомобілем залежить від швидкості його руху і визначається формулою $f(v) = 3 \cdot 10^{-3} v^2 - 3 \cdot 10^{-1} v + 18$, де v – швидкість автомобіля, км/год; $f(v)$ – витрата бензину на 100 км шляху, л. Визначити як змінюється швидкість згорання бензину від швидкості автомобіля 40 км/год і знайти найбільш економічну швидкість автомобіля.

Розв'язання. Швидкість згорання палива знайдемо як похідну функції $f(v) = 3 \cdot 10^{-3} v^2 - 3 \cdot 10^{-1} v + 18$.

Маємо $f'(v) = -0,3 + 0,006v$; $f'(v) = 0 \Rightarrow -0,3 + 0,006v = 0$ $\Rightarrow v = 50$.

При $v < 50$ $f'(v) < 0,$ а при $v > 50$ $f'(v) > 0.$

Таким чином, зміна швидкості по-різному впливає на витрату бензину. Якщо рух автомобіля прискорюється при малих швидкостях, що не перевищують 50 км/год, витрата бензину зменшується, а при великих – збільшується. Очевидно, для кожного автомобіля існує така швидкість, при якій витрата бензину постійна. Цю швидкість називають критичною. Для визначення критичної швидкості прирівнюють до 0 похідну $f'(v)$. Отже, найбільш економічно вигідна швидкість 50 км/год.

Розділ 7. Дослідження функцій методами диференціального числення та побудова їх графіків

Актуальним та перспективним є використання апарату диференціального числення при дослідженні різноманітних функцій з кінцевою метою побудови їх графіків. Ця схема досліджень базується на послідовному використанні наступних кроків алгоритму:

1) знайти область визначення функції, тобто вказати такі значення аргументу досліджуваної функції, при яких існують значення функції (точки кривої графіка).

2) Знайти точки перетину графіка функції з координатними осями. Такі точки графіка дозволяють правильно орієнтуватись на кінцевому етапі досліджень, зокрема, при побудові графіка кривої.

3) Дослідити функцію на парність та непарність, періодичність. Даний пункт досліджень може бути використаний також при побудові графіка: для парної функції (умова парності $f(-x)=f(x)$) її графік симетричний відносно осі *OY*, для непарної (умова непарності $f(-x)=-f(x)$) – графік симетричний відносно початку координат. Властивість періодичності, яка характерна лише для тригонометричних функцій, також може бути використана аналогічно: при наявності періоду функція досліджується тільки на періоді (умова періодичності функції з періодом $T>0$: $f(x+T)=f(x)$).

4) Знайти точки розриву функції. Дані точки використовують при побудові вертикальних асимптот графіка функції.

5) Знайти інтервали монотонності, точки екстремуму та значення функції в цих точках. Даний пункт досліджень є найважливішим при побудові графіка функції, він базується на обчисленні та застосуванні результатів першої похідної функції.

Необхідна умова екстремуму: $f'(x)=0$.

Достатня умова екстремуму: якщо при переході через підозрілу на екстремум точку перша похідна змінює свій знак з плюса на мінус, то це точка максимуму, якщо – з мінуса на плюс, то це точка мінімуму.

Необхідна та достатня умова зростання функції на деякому інтервалі *(a; b)* – додатній знак першої похідної, умова спадання – від’ємний знак першої похідної.

6) Знайти інтервали опуклості, вгнутості, точки перегину. Даний пункт уточнює поведінку графіка функції. Він базується на обчисленні та застосуванні результатів другої похідної досліджуваної функції.

Необхідна умова екстремуму: $f''(x)=0$.

Достатня умова перегину: якщо при переході через підозрілу на перегин точку друга похідна функції змінює свій знак, то це є точка перегину.

Необхідна та достатня умова опуклості функції на деякому інтервалі *(a; b)* – від'ємний знак другої похідної, а для вгнутості – додатній знак другої похідної.

7) Знайти асимптоти кривої. Даний пункт є важливим при побудові графіка функції. Розрізняють три види асимптот: вертикальні, похилі (права та ліва), горизонтальні. Рівняння вертикальної асимптоти: $x = C, \quad C - const.$

Рівняння похилої асимптоти

$$y = kx + b,$$

де $$\left.\begin{aligned} k &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \\ b &= \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)\end{aligned}\right\}.$$

Якщо в рівнянні похилої асимптоти *k=0,* то відповідна похила асимптота стане горизонтальною.

8) Використовуючи результати дослідження, побудувати графік функції.

Приклад 7.1. Дослідити і побудувати графік функції $y=\frac{(x+1)^2}{x-2}$.

Розв’язання. Область визначення функції: $(-\infty;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$. Знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат: якщо $x=0$, то $y=-\frac{1}{2}$; якщо $y=0$, то $x=-1$, тобто маємо точки перетину: $\left(0;\ -\frac{1}{2}\right)$, $(-1;\ 0)$.

Оскільки $f(-x)=\frac{(-x+1)^2}{-x-2}=-\frac{(x-1)^2}{x+2}\neq -f(x)$, $f(-x)=\frac{(-x+1)^2}{-x-2}\neq f(x)$, то функція не буде парною або непарною. Очевидно, функція не періодична.

Задана функція має розрив в точці $x=2$, так як $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}\frac{(x+1)^2}{x-2}=\pm\infty$.

Знаходимо інтервали монотонності, точки екстремуму. Перша похідна функції $y'=\frac{2(x+1)(x-2)-(x+1)^2}{(x-2)^2}=\frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}$.

дорівнює нулю при $x=-1$, $x=5$ і не існує в точці $x=2$, але остання не входить в область визначення функції. Критичні точки $x=-1$, $x=5$ і точка $x=2$ ділять область визначення функції на такі інтервали: $(-\infty;\ -1)$, $(-1;\ 2)$, $(2;\ 5)$, $(5;\ +\infty)$. Маємо:

якщо $x\in(-\infty;\ -1)$, то $y'>0$ – функція зростає; якщо $x\in(-1;\ 2)$, то $y'<0$ – функція спадає якщо $x\in(2;\ 5)$, то $y'<0$ – функція спадає; якщо $x\in(5;\ +\infty)$, то $y'>0$ – функція зростає.

При $x=-1$ функція має максимум: $y(-1)=0$. При $x=5$ функція має мінімум: $y(5)=12$.

Знаходимо інтервали опуклості, вгнутості, точки перегину.

Друга похідна функції $y'' = \left(\dfrac{x^2 - 4x - 5}{(x-2)^2} \right)' =$

$$= \frac{(2x-4)(x-2)^2 - (x^2 - 4x - 5)2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{18}{(x-2)^3}.$$

Похідна $y'' \neq 0$ і не існує при $x = 2$. Точка $x = 2$ ділить область визначення функції на два інтервали: $(-\infty;\ 2)$ та $(2;\ +\infty)$. Маємо: якщо $x \in (-\infty;\ 2)$, то $y'' < 0$ – крива опукла; якщо $x \in (2;\ +\infty)$ то $y'' > 0$ – крива вгнута. Точок перегину немає.

Знаходимо асимптоти графіка функції. Оскільки $x = 2$ точка розриву функції, то пряма $x = 2$ – вертикальна асимптота кривої.

Перевіримо, чи має ця функція похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+1)^2}{x(x-2)} = 1,\quad b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x+1)^2}{x-2} - x \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x+1}{x-2} = 4.$$

Отже, $y = x + 4$ – похила асимптота.

Враховуючи проведене дослідження, будуємо графік (рис. 7.1).

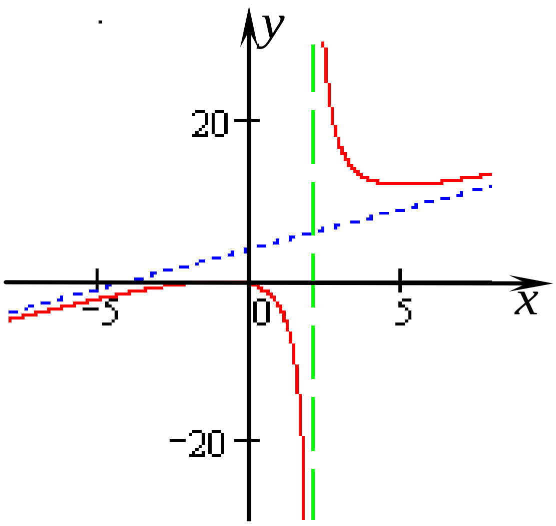


Рис. 7.1 Графік досліджуваної функції

Розділ 8. Невизначений інтеграл, методи інтегрування функцій

В диференціальному численні за даною функцією $F(x)$ знаходять її похідну $f(x)=F'(x)$. На практиці часто доводиться розв'язувати обернену задачу: необхідно відновити функцію $F(x)$, знаючи її похідну $f(x)$. Функцію $F(x)$ у цьому випадку називають первісною для $f(x)$.

Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$, якщо похідна функції $F(x)$ дорівнює $f(x)$, тобто

$$F'(x)=f(x).$$

Приклад 8.1. Нехай маємо функцію $f(x)=3x^2$. Функція $F(x)=x^3$ є первісною для $f(x)$, так як $\left(x^3\right)'=3x^2$. Але функція $F(x)=x^3+2$ також є первісною функції $f(x)$, оскільки $\left(x^3+2\right)'=3x^2$, і взагалі – будь-яка функція $F(x)=x^3+C$, де C – довільна стала, є первісною для $f(x)$. Таким чином, дана функція має множину первісних, причому будь-які дві з них відрізняються одна від одної на сталу величину.

Множина первісних функції $f(x)$ називається невизначеним (неозначеним) інтегралом від функції $f(x)$ і позначається символом $\int f(x)dx$. Таким чином, маємо:

$$\int f(x)dx=F(x)+C, \qquad (8.1)$$

де $F(x)$ – будь-яка первісна; C – стала інтегрування; X– незалежна змінна інтегрування; $f(x)$ – підінтегральна функція; $f(x)dx$ – підінтегральний вираз.

Процес знаходження невизначеного інтеграла називається інтегруванням функції.

Властивості невизначеного інтеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x);$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$
3. $\int dF(x) = F(x) + C;$
4. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx;$
5. $\int [f(x) \pm \varphi(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx;$
6. $\int f(kx+l)dx = \frac{1}{k}F(kx+l) + C.$

Таблиця невизначених інтегралів

1. $\int dx = x + C;$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1,$ де $C - const;$
4. $\int e^x dx = e^x + C;$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1;$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C;$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C = -arcctgx + C;$

11. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + C;$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C;$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C;$

14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C;$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C;$

16. $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C;$

17. $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C.$

Приклад 8.2. Обчислити інтеграли: а) $\int \frac{3x - 7x\sqrt[3]{x}}{x^2} dx;$ б) $\int \sin 7xdx;$ в) $\int \frac{dx}{4x^2+9}.$

Розв'язання.

а) $\int \frac{3x - 7x\sqrt[3]{x}}{x^2} dx = 3\int \frac{dx}{x} - 7\int x^{\frac{4}{3}-2} dx = 3\ln|x| - 7\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = 3\ln|x| - 21\sqrt[3]{x} + C$;

б) $\int \sin 7xdx = \int \sin 7x \frac{d(7x)}{7} = \frac{1}{7}\int \sin 7xd(7x) = -\frac{1}{7}\cos 7x + C$;

в) $\int \frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3} arctg \frac{2x}{3}\right) + C = \frac{1}{6} arctg \frac{2x}{3} + C$.

I. Заміна змінної у невизначеному інтегралі

Якщо обчислюється інтеграл $\int f(u(x))\psi(x)dx$, при цьому $\psi(x)dx = du(x)$, то зручно ввести нову змінну $t = u(x)$, тоді $dt = du(x) = \psi(x)dx$.

З новою змінною t інтеграл набуде вигляду $\int F(t)dt = F(t) + C = F(u(x)) + C$.

Приклад 8.3. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{3-4x}}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{3-4x}} = \begin{pmatrix} t = 3-4x \\ dt = -4dx \\ dx = -\frac{dt}{4} \end{pmatrix} = \int \frac{-\frac{dt}{4}}{\sqrt[4]{t}} = -\frac{1}{4}\int t^{-\frac{1}{4}}dt = -\frac{1}{4}\frac{t^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + C = -\frac{1}{3}(3-4x)^{\frac{3}{4}} + C .$$

II. Метод інтегрування частинами

Основна формула даного методу $\int UdV = UV - \int VdU$, $U = U(x)$, $V = V(x)$. Цей метод використовується, якщо під знаком інтеграла є добуток степеневої функції на тригонометричну чи показникові; присутня під інтегралом логарифмічна чи будь-яка обернена тригонометрична функція; під знаком інтегралу присутній добуток показникової функції на тригонометричну. Також цей метод доцільний в деяких інших випадках. За функцію $U(x)$ позначають степеневу функцію (за диференціювання показник x знижується), логарифмічну чи обернену тригонометричну (оскільки для цих функцій відносно легко знаходяться похідні). У ряді випадків даний метод застосовують послідовно декілька разів.

Приклад 8.4. Обчислити інтеграл $\int(3x-4)\cos 2xdx$.

Розв’язання.

$$\int(3x-4)\cos 2xdx = \begin{pmatrix} U = 3x-4 \\ dV = \cos 2xdx \\ dU = 3dx \\ V = \int \cos 2xdx = \frac{1}{2}\sin 2x \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(3x-4)\sin 2x - \frac{3}{2}\int \sin 2xdx =$$

$$= \frac{1}{2}(3x-4)\sin 2x + + \frac{3}{4}\cos 2x + C.$$

Приклад 8.5. Обчислити інтеграл $J = \int\sqrt{x^2+A}dx.$

Розв’язання.

$$J = \int\sqrt{x^2+A}dx = \begin{pmatrix} U = \sqrt{x^2+A} \\ dV = dx \\ dU = \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+A}} \\ V = x \end{pmatrix} = x\sqrt{x^2+A} - \int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+A}}dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+A} - \int\frac{x^2+A-A}{\sqrt{x^2+A}}dx + + A\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = x\sqrt{x^2+A} - J + A\ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right| = J.$$

$$= x\sqrt{x^2+A} - \int\frac{x^2+A-A}{\sqrt{x^2+A}}dx + + A\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = x\sqrt{x^2+A} - J + A\ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right| = J.$$

Звідки $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+A} + \frac{A}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right| + C$.

Аналогічно $\int\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$.

Приклад 8.6. Обчислити інтеграл $\int\sqrt{1-3x-x^2}dx.$

Розв’язання.

$$\int\sqrt{1-3x-x^2}\,dx=\int\sqrt{1-\left(\frac{9}{4}+3x+x^2\right)+\frac{9}{4}}dx=\int\sqrt{\frac{13}{4}-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2}dx=$$

$$\frac{\left(x+\frac{3}{2}\right)}{2}\sqrt{1-3x-x^2}+\frac{13}{8}\arcsin\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{13}}{2}}+C=\frac{\left(x+\frac{3}{2}\right)}{2}\sqrt{1-3x-x^2}$$

$$+\frac{13}{8}\arcsin\frac{2x+3}{\sqrt{13}}+C \; .$$

III. Інтегрування дробово-раціональних функцій вигляду

$$\int\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx,$$

де $P_m(x)$, $Q_n(x)$ – многочлени відповідно зі степенем m і n змінної x. Нагадаємо, що степінь многочлена встановлюється найбільшим показником x. Якщо $m<n$, то дріб правильний, а якщо $m\geq n$, то дріб під інтегралом неправильний і його необхідно шляхом ділення чисельника на знаменник звести до суми двох доданків: многочлена та правильного раціонального дробу.

Знаменник правильного раціонального дробу $Q_n(x)$ розкладають на лінійні множники типу $(x-\alpha)^k$ (де k – кратність множника $(x-\alpha)$) або на квадратні тричлени типу (x^2+px+q) з від’ємним дискримінантом, тобто $D=p^2-49<0.$ За виглядом знаменника правильний раціональний дріб подають у вигляді суми найпростіших дробів, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, тобто

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{P_m(x)}{(x-\alpha)^k \cdots (x^2+px+q)\cdots} = \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \cdots +$$

$$+ \frac{Bx+C}{x^2+px+q} + \cdots + \cdots,$$

де $A_1, A_2, ..., A_k, B, C, ...$ – невизначені коефіцієнти.

Для знаходження невизначених коефіцієнтів $A_1, ..., A_k, B, C, .$ необхідно скласти і розв’язати алгебраїчну систему, яка утворюється шляхом прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях x на основі рівності чисельників початкового та кінцевого дробів. Отримані простіші доданки інтегруються за допомогою попередніх методів інтегрування.

Приклад 8.7. Обчислити інтеграл $\int \frac{x^4}{x^3+8}dx$.

Розв’язання.

Нехай $\int \frac{x^4}{x^3+8}dx = J$. Оскільки $m=4$, $n=3$ – дріб під інтегралом неправильний, то

$$\frac{x^4}{x^3+8} = \frac{x(x^3+8-8)}{x^3+8} = x - \frac{8x}{x^3+8},$$

тоді

$$J = \int\left(x - \frac{8x}{x^3+8}\right)dx = \frac{x^2}{2} - 8\int\frac{xdx}{x^3+8} = \frac{x^2}{2} - 8J_1.$$

Для обчислення J_1 розкладемо дріб $\dfrac{x}{x^3+8}$ у вигляді суми простіших дробів

$$\frac{x}{x^3+8}=\frac{x}{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+4}=\frac{A\left(x^2-2x+4\right)+(Bx+C)(x+2)}{x^3+8},$$

звідки $Ax^2-2Ax+4A+Bx^2+2Bx+Cx+2C=x$.

$$x^0: 4A+2C=0$$

$$x^1: -2A+2B+C=1 \Rightarrow \begin{cases} 4A+2C=0 \\ -2A+2B+C=1 \\ A+B=0 \end{cases} \begin{cases} C=-2A \\ -2A-2A-2A=1 \\ B=-A \end{cases} \quad A=-\frac{1}{6}, B=\frac{1}{6}, C=\frac{1}{3}.$$

$$x^2: A+B=0$$

Отже,

$$J_1=\int\left(\frac{-\frac{1}{6}}{x+2}+\frac{\frac{1}{6}x+\frac{2}{6}}{x^2-2x+4}\right)dx=-\frac{1}{6}\ln|x+2|+\frac{1}{6}\int\frac{x+2}{x^2-2x+4}dx=-\frac{1}{6}\ln|x+2|+\frac{1}{6}J_2.$$

Знайдемо первісну інтеграла $J_2=\displaystyle\int\frac{x+2}{x^2-2x+4}dx$:

$$d\left(x^2-2x+4\right)=(2x-2)dx,$$

тоді

$$J_2=\frac{1}{2}\int\frac{2x+4}{x^2-2x+4}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-2+6}{x^2-2x+4}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-2}{x^2-2x+4}dx+3\int\frac{dx}{x^2-2x+1+3}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+4\right|+3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{x-1}{\sqrt{3}}.$$

Первісна J_1 може бути записана

$$J_1=-\frac{1}{6}\ln|x+2|+\frac{1}{12}\ln\left|x^2-2x+4\right|+\frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\,\frac{x-1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-2x+4}}{x+2}\right|+\frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\,\frac{x-1}{\sqrt{3}}.$$

Остаточна відповідь

$$J=\int\frac{x^4dx}{x^3+8}=\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-2x+4}}{x+2}\right|+\frac{4}{\sqrt{3}}arctg\frac{x-1}{\sqrt{3}}=C.$$

IV. Інтегрування ірраціональних функцій

В інтегралах вигляду $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},...,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx$ доцільно скористатись підстановкою виду $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, де k – спільний знаменник дробів $\frac{m}{n},...,\frac{r}{s}$.

V. Інтегрування тригонометричних функцій

1. В інтегралах вигляду $\int R(\sin x,\cos x)dx$

а) якщо $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, тоді використовується підстановка $t=\cos x$;

б) якщо $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, тоді $t=\sin x$;

в) якщо $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, тоді $t=tg\ x$ або $t=ctg\ x$;

г) якщо R – довільна функція, тоді застосовують універсальну тригонометричну підстановку $t=tg\,\frac{x}{2}$, звідки

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

2. В інтегралах вигляду $\int\sin^m x\cos^n xdx$:

а) якщо показники парні, тобто $m = 2p,\ \ n = 2q,\ \ p > 0,\ q > 0$, то

$$\sin^m x = \left(\sin^2 x\right)^p = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^p, \cos^n x = \left(\cos^2 x\right)^q = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^q$$

б) якщо один з показників непарний, наприклад, $m = 2p+1$, то

$$\sin^m xdx = \sin^{2p} x\sin xdx = -(1-\cos^2 x)^p d\cos x,$$

тобто використовуємо заміну $t = \cos x$, що значно спрощує підінтегральний вираз.

в) перетворення добутку тригонометричних функцій в суму з використанням тригонометричних співвідношень:

$$\cos mx\cos nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m+n)x + \cos(m=n)x\right);$$

$$\sin mx\cos nx = \frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x + \sin(m=n)x\right);$$

$$\sin mx\sin nx = \frac{1}{2}\left(-\cos(m+n)x + \cos(m=n)x\right).$$

Приклад 8.8. Обчислити інтеграл $\int \frac{\sin 2xdx}{3+4\cos^2 x}$.

Розв’язання.

$\int \frac{\sin 2xdx}{3+4\cos^2 x} = \int \frac{2\sin x\cos xdx}{3+4\cos^2 x} = J$; функція під інтегралом непарна по $\sin x$, використовуємо підстановку $t = \cos x$, маємо

$$J = -\int \frac{2tdt}{3+4t^2} = \begin{pmatrix} Z = 3+4t^2 \\ dt = 8tdt \\ 2tdt = \dfrac{dZ}{4} \end{pmatrix} = -\int \frac{dZ}{4Z} = -\frac{1}{4}\ln\left|3+4t^2\right| = -\frac{1}{4}\ln\left|3+4\cos^2 x\right| + C.$$

Приклад 8.9. Застосовуючи універсальну тригонометричну підстановку, обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{\sin x - \cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t}} = \int \frac{2dt}{t^2 + 2t - 1} = \int \frac{2dt}{(t+1)^2 - (\sqrt{2})^2} = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{tg\,\frac{x}{2} + 1 - \sqrt{2}}{tg\,\frac{x}{2} + 1 + \sqrt{2}} \right| + C.$$

Приклад 8.10. Обчислити інтеграл $\int \sin^4 2x dx$.

Розв'язання.

$$\int \sin^4 2x dx = \int \left(\frac{1-\cos 4x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int \left(1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x\right) dx =$$

$$\frac{1}{4} \int \left(1 - 2\cos 4x + \frac{1+\cos 8x}{2} \right) dx = \frac{1}{4} \int \left(\frac{3}{2} - 2\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 8x \right) dx =$$

$$\frac{1}{4} \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{1}{16}\sin 8x \right) + C.$$

Розділ 9. Визначений інтеграл, формула Ньютона-Лейбніца

Нехай $y = f(x)$ — деяка функція, що задана на проміжку $[a;\, b]$. Розіб'ємо $[a;b]$ на n частин точками x_i, так що $a = x_0 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$ Обчислимо $f(\xi_i)$, де $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$, $i = \left(\overline{1, n}\right)$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Складемо інтегральну суму

$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$. Позначимо $\lambda = \max \Delta x_i$. Якщо існує скінченна границя інтегральних сум S_n при $\lambda \to 0$ і не залежить ні від способу розбиття $[a; b]$ на частини Δx_i, ні від вибору точок ξ_i, то ця границя називається визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ і позначається:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

Якщо для функції $f(x)$ існує первісна $F(x)$, то справедлива формула Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Заміна змінної у визначеному інтегралі виконується так

$$\int_a^b f(\varphi(x))\psi(x)dx = \begin{pmatrix} t = U(x) \\ dt = d\varphi(x) = \psi(x)dx \\ x = a \Rightarrow t_a = \varphi(a) \\ x = b \Rightarrow t_b = \varphi(b) \end{pmatrix} = \int_{t_a}^{t_b} f(t)dt = F(t)\Big|_{t_a}^{t_b} = F(t_b) - F(t_a).$$

Формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі матиме вигляд:

$$\int_a^b UdV = UV\Big|_a^b - \int_a^b VdU.$$

Приклад 9.1. Обчислити інтеграл $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$.

Розв’язання.

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \left(\begin{array}{l} t=\ln x \\ dt=\dfrac{dx}{x} \\ x=1 \Rightarrow t=0 \\ x=\sqrt{e} \Rightarrow t=\dfrac{1}{2} \end{array}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}.$$

Приклад 9.2. Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$.

Розв’язання.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx = \left(\begin{array}{l} U=\arcsin x \\ dV=dx \\ dU=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ V=x \end{array}\right) = x\arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$\left(\begin{array}{l} 1-x^2=t \\ -2xdx=dt \\ -xdx=\dfrac{dt}{2} \\ x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=\dfrac{1}{2} \Rightarrow t=\dfrac{3}{4} \end{array}\right) = \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_1^{\frac{3}{4}} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_1^{\frac{3}{4}} = \frac{\pi}{12} + \sqrt{\frac{3}{4}} - 1.$$

Задача 9.3. Знайти площу перерізу каналу параболічного профілю.

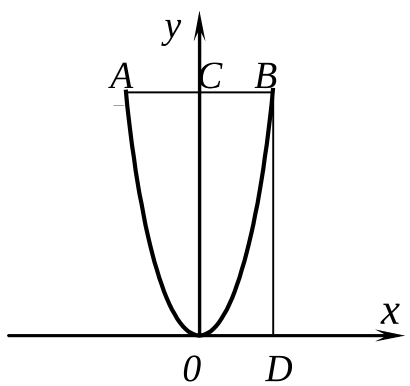


Рис. 9.1

Розв’язання. Площа перерізу каналу – площа поперечного перерізу фігури, яка знизу обмежена параболою, а зверху – горизонтальною прямою (за умовою задачі). Припустимо, що найбільша глибина каналу h, а ширина (по верху води) b; парабола описується кривою $y = px^2$, вершина якої розташована в точці $O(0; 0)$, а пряма має вигляд $y = h$. Скористаємось геометричним змістом визначеного інтеграла. У даному випадку доцільно зробити рисунок, з якого легко можна визначити межі інтегрування та підінтегральну функцію (рис. 9.1). Позначимо через A та B – точки перетину параболи та прямої $y = h$. Нехай $AB = b$, $OC = h$, тоді маємо $h = p\frac{b^2}{4}$. Звідси знаходимо, що $p = \frac{4h}{b^2}$. В силу симетрії фігури шукану площу знайдемо як подвійну різницю площ прямокутника *CBDO* та криволінійної трапеції *DBO:*

$$S = 2\left(h\frac{b}{2} - \int_0^{b/2} \frac{4h}{b^2}x^2 dx\right) = \frac{2}{3}bh.$$

Задача 9.4. Сільськогосподарське підприємство повинно обрати одну з двох можливих стратегій розвитку:

1) вкласти 100 тис. грн. у нову технологічну лінію і одержувати 30 тис. грн. прибутку кожного року впродовж 10 років;

2) закупити на 150 тис. грн. нову техніку, що дозволить одержати 50 тис. грн. прибутку щорічно впродовж 7 років. Яку стратегію треба обрати підприємству, якщо номінальна облікова щорічна ставка 10 %?

Розв’язання. Якщо $f(t)$ є прибуток за час t і $r = \frac{R}{100}$ є номінальна облікова щорічна ставка, то дійсне значення загального прибутку за час між $t = 0$ та $t = T$ дорівнює

$$\int_0^T f(t)e^{-rt}dt .$$

При $R = 10$ маємо $r = 0{,}1$. Тому для першої стратегії дійсне значення прибутку за 10 років буде:

$$P_1 = \int_0^{10} 30e^{-0,1t}dt - 100 = -300e^{-0,1t}\Big|_0^{10} - 100 = -300e^{-1} + 300 - 100 = 88{,}8 \text{ (тис.грн.)};$$

$$P_2 = \int_0^{7} 50e^{-0,1t}dt - 150 = -500e^{-0,1t}\Big|_0^{7} - 150 = -500e^{-0.7} + 500 - 150 = 200 \text{ (тис.грн.)}.$$

Отже, друга стратегія краще першої і тому її доцільно обрати для подальшого розвитку сільськогосподарського підприємства.

Задача 9.5. На складі запас деякого товару нараховує 100 одиниць, а товар, що поступає щоденно, наближено виражається функцією $y = 22 - 0{,}5x + 0{,}06x^2$, де x – кількість днів. Визначити кількість товару через 40 днів.

Розв'язання. Позначимо кількість товару через W. Тоді через 40 днів кількість товару буде

$$W = 100 + \int_0^{40}\left(22 - 0{,}5x + 0{,}06x^2\right)dx .$$

Обчислимо цей інтеграл

$$W = 100 + \int_0^{40}\left(22 - 0{,}5x + 0{,}06x^2\right)dx = \ldots$$

$$\ldots = 100\left(22x - 0{,}5\frac{x^2}{2} + 0{,}06\frac{x^2}{3}\right)\Big|_0^{40} = 1870 \text{ (шт.)}.$$

Задача 9.6. Потреба електроенергії для підприємства наближено виражається функцією $y = 300 - 7{,}7x + 0{,}6x^2$, де x – кількість годин на добу. Обчислити вартість електроенергії, яку використовує підприємство протягом доби, якщо вартість 1 кВт/год дорівнює 0,9 грн.

Розв’язання. Витрати електроенергії підприємством протягом доби становлять:

$$W = \int_0^{24} y dx = \int_0^{24} (300 - 7{,}7x + 0{,}6x^2) dx = (300x + 7{,}7\frac{x^2}{2} + \ldots$$

$$\ldots + 0{,}6\frac{x^3}{3})\Big|_0^{24} = 7747{,}2 \text{ (кВт/год).}$$

Вартість електроенергії буде $7747{,}2 \cdot 0{,}9 = 6972{,}48$ (грн.).

ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ’ЯЗУВАННЯ

Завдання 1. Обчислення, властивості визначників

Обчислити $\det A,\ \det B, \det AB, \det BA.$

Довести, що $\det AB = \det BA = \det A \cdot \det B.$ Обчислити $\det A,\ \det B$: за теоремою про розклад за довільним рядком (стовпцем); шляхом занулення елементів довільного рядка (стовпця).

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix};$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},\qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix};$

3. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 3 & 5 & 1\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -7 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$;

4. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & 5 & 1\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$;

5. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 3 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$;

6. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 3\\ 1 & -2 & -1\\ 3 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & -4 & -1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$;

7. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & -1\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$;

8. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & -1\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 5 & 0 & 2\end{pmatrix}$;

9. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 4 & -2 & -1\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$;

10. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$;

11. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 1 & -4 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix};$

12. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 2 & 6\end{pmatrix};$

13. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 2 & -4\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -4 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix};$

14. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & -2 & -1\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 6\\ 1 & -2 & -1\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix};$

15. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & -4 & -3\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & -2 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix};$

16. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & -4 & -5\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 1\\ 4 & -2 & -1\\ 1 & 0 & 7\end{pmatrix};$

17. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 1 & -4\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -3 & -1\\ 1 & 6 & 2\end{pmatrix};$

18. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 3\\ 1 & -3 & -1\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix};$

19. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -5 & -1\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix};$

20. $A=\begin{pmatrix}3 & 3 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 1\\ 1 & -5 & -1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$;

21. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & -8 & -1\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 6 & 2\end{pmatrix}$;

22. $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -5 & -1\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$;

23. $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 6 & 1\\ 1 & -5 & -1\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$;

24. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 1 & -2 & -1\\ 4 & 5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 1\\ 6 & -5 & -1\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$;

25. $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & -3\\ 1 & -2 & -1\\ 0 & 6 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 8 & 1\\ 6 & -5 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$;

26. $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & -3\\ 3 & -2 & -1\\ 4 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 0 & -5 & -1\\ 1 & 6 & 3\end{pmatrix}$;

27. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 1\\ 0 & -2 & -1\\ 1 & 3 & 3\end{pmatrix}$;

28. $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & -1\\ 1 & -2 & -1\\ 0 & 6 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 8 & 8\\ 6 & -5 & -1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$;

29. $A=\begin{pmatrix}1 & 6 & -3\\ 3 & -2 & -1\\ 4 & 3 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 1\\ 0 & -5 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$;

30. $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & -2\\ 3 & -6 & -1\\ 4 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 1\\ 2 & -6 & -1\\ 1 & 6 & 3\end{pmatrix}$;

31. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & 4 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 5 & 4\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 3 & 3\end{pmatrix}$;

32. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -3\\ 3 & 0 & -2\\ 4 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 4\\ 1 & -6 & -1\\ 1 & 7 & 2\end{pmatrix}$;

33. $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & -2\\ 3 & 5 & 6\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 1 & -7 & -1\\ 1 & 0 & 6\end{pmatrix}$;

34. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & 7 & 5\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$;

35. $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & -2\\ 3 & 5 & 1\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -8 & -1\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$;

36. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ 1 & -7 & -1\\ 3 & 6 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 8 & 1\\ 1 & -4 & -1\\ 0 & 7 & 3\end{pmatrix}$;

37. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 8 & -1\\ 4 & 7 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 8 & 3\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$;

38. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & -6 & -1\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 5 & 4 & 7\end{pmatrix}$;

39. $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 2\\ 4 & -6 & -1\\ 2 & 8 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 4\\ 4 & -2 & -1\\ 1 & 0 & 9\end{pmatrix}$;

40. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 8\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & 7 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 3 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 9 & 4 & 0\end{pmatrix}$;

41. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -8\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & 7 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 6 & 1\\ 1 & -4 & -1\\ 1 & 9 & 2\end{pmatrix}$;

42. $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & -7 & -1\\ 2 & 3 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 9 & 4 & 6\end{pmatrix}$;

43. $A=\begin{pmatrix}7 & 3 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 9 & 2 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -6 & 1\\ 1 & -7 & -1\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}$;

44. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & -8 & -1\\ 1 & 9 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 6\\ 1 & -2 & -1\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$;

45. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & -4 & -3\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & -5 & -1\\ 1 & 9 & 2\end{pmatrix}$;

46. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & -9 & -5\\ 2 & 7 & 4\end{pmatrix}$, $\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 4 & -2 & -1\\ 1 & 8 & 5\end{pmatrix}$;

47. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 8 & -2 & -1\\ 1 & 1 & -4\end{pmatrix}$, $\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -9 & -1\\ 1 & 6 & 2\end{pmatrix}$;

48. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 8 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & -3 & -1\\ 1 & 6 & 4\end{pmatrix}$;

49. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & -5 & -1\\ 1 & 8 & 4\end{pmatrix}$, $\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -7 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$;

50. $A=\begin{pmatrix}3 & 3 & 2\\ 1 & -7 & -1\\ 2 & 6 & 1\end{pmatrix}$, $\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -7 & -1\\ 1 & 9 & 3\end{pmatrix}$;

51. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & -8 & -1\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $\qquad B=\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 6 & 2\end{pmatrix}$;

52. $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 0 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -6 & -1\\ 1 & 9 & 4\end{pmatrix}$;

53. $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 2\\ 1 & -8 & -1\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 6 & 1\\ 1 & -5 & -1\\ 1 & -8 & -4\end{pmatrix}$;

54. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 1 & -2 & -1\\ 4 & 5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 1\\ 6 & -5 & -1\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$;

55. $A=\begin{pmatrix}4 & 5 & -3\\ 1 & -2 & -1\\ 9 & 6 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 8 & 1\\ 6 & -5 & -1\\ 1 & 7 & 9\end{pmatrix}$;

56. $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & -3\\ 3 & -2 & -1\\ 4 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 0 & -5 & -1\\ 1 & 6 & 3\end{pmatrix}$;

57. $A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & 1 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 1\\ 0 & -2 & -1\\ 1 & 9 & 0\end{pmatrix}$;

58. $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & -1\\ 4 & -2 & -1\\ 0 & 6 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 9\\ 6 & -5 & -1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$;

59. $A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 1 & -9 & -1\\ 2 & 1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 1\\ 0 & -4 & -1\\ 1 & 7 & 0\end{pmatrix}$;

60. $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & -3\\ 3 & -6 & -1\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 1\\ 2 & -3 & -1\\ 1 & 8 & 3\end{pmatrix}$;

61. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & -7 & -1\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -9 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$;

62. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & -8 & -1\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 6 & 1\\ 1 & -4 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$;

63. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & -7 & -1\\ 2 & 5 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 0 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 5 & 6\end{pmatrix}$;

64. $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 9 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 1\\ 1 & -4 & -1\\ 1 & 9 & 2\end{pmatrix}$;

65. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & -2 & -1\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 6\\ 1 & -2 & -1\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$;

66. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & -4 & -3\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & -2 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$;

67. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & -4 & -5\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 1\\ 4 & -2 & -1\\ 1 & 0 & 7\end{pmatrix}$;

68. $A=\begin{pmatrix}1 & 9 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 8 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 1\\ 1 & -3 & -1\\ 1 & 5 & 2\end{pmatrix}$;

69. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & 7 & -1\\ 2 & 8 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 3\\ 1 & -5 & -1\\ 1 & 9 & 2\end{pmatrix}$;

70. $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 1\\ 1 & -5 & -1\\ 1 & 9 & 4\end{pmatrix}$;

71. $A=\begin{pmatrix}3 & 3 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 8 & 1\\ 1 & -5 & -1\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$;

72. $A=\begin{pmatrix}8 & 3 & 2\\ 1 & -4 & -3\\ 6 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 9 & 1\\ 4 & -5 & -1\\ 1 & 7 & 2\end{pmatrix}$;

73. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & -9 & -5\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}9 & 4 & 3\\ 4 & -2 & -1\\ 1 & 8 & 5\end{pmatrix}$;

74. $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 2\\ 9 & -2 & -1\\ 1 & 1 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & -7 & -1\\ 1 & 6 & 2\end{pmatrix}$;

75. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 6 & 7 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & -5 & -1\\ 1 & 9 & 4\end{pmatrix}$;

76. $A=\begin{pmatrix}6 & 3 & 2\\ 1 & -5 & -1\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -9 & -1\\ 1 & 5 & 2\end{pmatrix}$;

77. $A=\begin{pmatrix}3 & 3 & 2\\ 1 & -9 & -1\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 1\\ 1 & -7 & -1\\ 0 & 9 & 3\end{pmatrix}$;

78. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 6\\ 1 & -5 & -1\\ 7 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 9 & 3\end{pmatrix}$;

79. $A=\begin{pmatrix}2 & 8 & 2\\ 1 & -5 & -1\\ 0 & 9 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 3\\ 1 & -6 & -1\\ 1 & 7 & 4\end{pmatrix}$;

80. $A=\begin{pmatrix}1 & 7 & 2\\ 4 & -8 & -1\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 6 & 1\\ 1 & -9 & -1\\ 1 & -7 & -4\end{pmatrix}$;

81. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 6 & -2 & -1\\ 4 & 5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 5\\ 6 & -9 & -1\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$;

82. $A=\begin{pmatrix}4 & 6 & -3\\ 1 & -2 & -1\\ 9 & 6 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 8 & 1\\ 6 & -4 & -1\\ 1 & 5 & 9\end{pmatrix}$;

83. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & -8 & -1\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 6 & 2\end{pmatrix}$;

84. $A=\begin{pmatrix}2 & 9 & 7\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4 & -6\\ 1 & -5 & -1\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$;

85. $A=\begin{pmatrix}4 & 5 & 2\\ 3 & -2 & -1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\ 1 & -5 & -1\\ 1 & 7 & 3\end{pmatrix}$;

86. $A=\begin{pmatrix}1 & 9 & -3\\ 6 & -2 & -1\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 6 & -5 & -1\\ 1 & 7 & 3\end{pmatrix}$;

87. $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 7\\ 1 & -2 & -1\\ 6 & 7 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}9 & 4 & 1\\ 6 & -7 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$;

88. $A=\begin{pmatrix}1 & 8 & -3\\ 3 & -6 & -1\\ 4 & 3 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 1\\ 0 & -5 & -1\\ 1 & 9 & 3\end{pmatrix}$;

89. $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 2\\ 0 & -2 & -1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 0 & -2 & -1\\ 1 & 9 & 3\end{pmatrix}$;

90. $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & -1\\ 4 & -2 & -1\\ 8 & 6 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 9 & 8\\ 6 & -5 & -1\\ 1 & 7 & 3\end{pmatrix}$;

91. $A=\begin{pmatrix}1 & 7 & -3\\ 3 & -2 & -1\\ 4 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 9 & 1\\ 0 & -5 & -1\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$;

92. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 3 & -6 & -1\\ 4 & 5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 9\\ 2 & -6 & -1\\ 1 & 8 & 3\end{pmatrix}$;

93. $A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & 7 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 5 & 4\\ 0 & -2 & -1\\ 9 & 3 & 3\end{pmatrix}$;

94. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -9\\ 3 & 0 & -2\\ 4 & 8 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 7 & 8\\ 1 & -6 & -1\\ 1 & 7 & 2\end{pmatrix}$;

95. $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 3 & 7 & 6 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -7 & -1 \\ 1 & 9 & 6 \end{pmatrix}$;

96. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 8 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 1 & -9 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

97. $A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 1 & -8 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

98. $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & -9 & -1 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$;

99. $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 6 & -2 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & -8 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$;

100. $A=\begin{pmatrix} 9 & 6 & 7 \\ 1 & -2 & -1 \\ 8 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 6 & -9 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Завдання 2. Теорія лінійних алгебраїчних рівнянь

Дано систему лінійних рівнянь $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$.

Розв'язати задану систему трьома способами:

1) методом Гауса;

2) методом Крамера;

3) матричним методом.

1. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20; \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9; \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4; \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8; \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4; \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2; \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5; \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -9. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31; \\ 4x_1 + 11x_3 = -43; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31; \\ 45x_1 + x_2 + 2x_3 = 20; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1; \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -2; \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 10; \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = -12. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 13; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -15. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 13; \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -10; \\ x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -4; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -1; \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -7. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -7; \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4; \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 11. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -4; \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 22; \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5; \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2; \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8; \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1; \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8; \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0; \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 21; \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -16; \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 41. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 4; \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 2; \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -3; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -4; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4; \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1; \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2; \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20; \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 8; \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 11; \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$

31. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

32. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20; \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$

33. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9; \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4; \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$

34. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

35. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

36. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8; \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4; \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

37. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2; \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

38. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5; \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -9. \end{cases}$

39. $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31; \\ 4x_1 + 11x_3 = -43; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20. \end{cases}$

40. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31; \\ 45x_1 + x_2 + 2x_3 = 20; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

41. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1; \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$

42. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -2; \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 10; \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = -12. \end{cases}$

43. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 13; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -15. \end{cases}$

44. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 13; \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -10; \\ x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$

45. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -4; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -1; \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -7. \end{cases}$

46. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -7; \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4; \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 11. \end{cases}$

47. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -4; \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 22; \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

48. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5; \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

49. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2; \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

50. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8; \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1; \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

51. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8; \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0; \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

52. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

53. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 21; \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -16; \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 41. \end{cases}$

54. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 4; \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 2; \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

55. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -3; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

56. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -4; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

57. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4; \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1; \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$

58. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2; \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases}$

59. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20; \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$

60. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 8; \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 11; \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$

61. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

62. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20; \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$

63. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9; \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4; \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$

64. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

65. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

66. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8; \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4; \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

67. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2; \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

68. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5; \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -9. \end{cases}$

69. $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31; \\ 4x_1 + 11x_3 = -43; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20. \end{cases}$

70. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31; \\ 45x_1 + x_2 + 2x_3 = 20; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

71. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1; \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$

72. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -2; \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 10; \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = -12. \end{cases}$

73. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 13; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -15. \end{cases}$

74. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 13; \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -10; \\ x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$

75. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -4; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -1; \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -7. \end{cases}$

76. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -7; \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4; \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 11. \end{cases}$

77. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -4; \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 22; \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

78. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5; \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

79. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2; \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

80. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8; \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1; \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

81. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8; \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0; \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

82. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

83. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 21; \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -16; \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 41. \end{cases}$

84. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 4; \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 2; \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

85. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -3; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

86. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -4; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

87. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4; \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1; \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$

88. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2; \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases}$

89. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20; \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$

90. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 8; \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 11; \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$

91. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

92. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20; \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$

93. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9; \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4; \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$

94. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

95. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

96. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8; \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4; \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

97. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2; \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

98. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5; \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -9. \end{cases}$

99. $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31; \\ 4x_1 + 11x_3 = -43; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20. \end{cases}$

100. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31; \\ 45x_1 + x_2 + 2x_3 = 20; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

Завдання 3. Поняття базису простору

Перевірити чи вектори $\overline{a}, \overline{в}, \overline{c}$ утворюють базис в просторі, якщо «так», то розкласти вектор $\overline{d}$ у цьому базисі.

1. $\overline{a} = \{3,-2,1\}$,	$\overline{в} = \{2,-1,3\}$,	$\overline{c} = \{-1,3,4\}$,	$\overline{d} = \{5,6,7\}$;
2. $\overline{a} = \{1,-1,2\}$,	$\overline{в} = \{2,1,-1\}$,	$\overline{c} = \{3,0.-1\}$,	$\overline{d} = \{3,7,10\}$;
3. $\overline{a} = \{2,4,-1\}$,	$\overline{в} = \{-1,2,2\}$,	$\overline{c} = \{2,3,0\}$,	$\overline{d} = \{5,7,-3\}$;
4. $\overline{a} = \{-2,3,1\}$,	$\overline{в} = \{3,2,-4\}$,	$\overline{c} = \{-1,2,0\}$,	$\overline{d} = \{6,3,-1\}$;
5. $\overline{a} = \{2,4,-3\}$,	$\overline{в} = \{-3,1,-2\}$,	$\overline{c} = \{1,5,0\}$,	$\overline{d} = \{7,4,5\}$;
6. $\overline{a} = \{2,-1.-3\}$,	$\overline{в} = \{-1,3,1\}$,	$\overline{c} = \{3,-2,4\}$,	$\overline{d} = \{4,6,8\}$;
7. $\overline{a} = \{-1,3,-2\}$,	$\overline{в} = \{4,-1,3\}$,	$\overline{c} = \{2,2,-5\}$,	$\overline{d} = \{6,7,1\}$;
8. $\overline{a} = \{1,-5,3\}$,	$\overline{в} = \{-2,-1,5\}$,	$\overline{c} = \{3,2,-1\}$,	$\overline{d} = \{7,8,11\}$;

9. $\overline{a}=\{-3,1,-1\}$,	$\overline{в}=\{1,2,1\}$,	$\overline{c}=\{-3,-2,5\}$,	$\overline{d}=\{8,11,13\}$;
10. $\overline{a}=\{1,4,-3\}$,	$\overline{в}=\{-2,-3,1\}$,	$\overline{c}=\{3,1,-2\}$,	$\overline{d}=\{9,11,7\}$;
11. $\overline{a}=\{-2,1,-4\}$,	$\overline{в}=\{1,2,1\}$,	$\overline{c}=\{4,2,7\}$,	$\overline{d}=\{8,11,-7\}$;
12. $\overline{a}=\{-3,-1,2\}$,	$\overline{в}=\{2,3,-1\}$,	$\overline{c}=\{-4,2,5\}$,	$\overline{d}=\{-7,8,4\}$;
13. $\overline{a}=\{1,2,-3\}$,	$\overline{в}=\{3,-1,1\}$,	$\overline{c}=\{5,3,-4\}$,	$\overline{d}=\{-3,-2,8\}$;
14. $\overline{a}=\{2,-1,3\}$,	$\overline{в}=\{3,2,-4\}$,	$\overline{c}=\{-4,1,-5\}$,	$\overline{d}=\{-2,-7,5\}$;
15. $\overline{a}=\{2,-1,-5\}$,	$\overline{в}=\{3,2,1\}$,	$\overline{c}=\{-4,5,-3\}$,	$\overline{d}=\{4,-7,-9\}$;
16. $\overline{a}=\{3,-2,1\}$,	$\overline{в}=\{-2,3,-2\}$,	$\overline{c}=\{4,-1,5\}$,	$\overline{d}=\{5,-2,-7\}$;
17. $\overline{a}=\{3,2,-1\}$,	$\overline{в}=\{-1,-3,2\}$,	$\overline{c}=\{5,2,-4\}$,	$\overline{d}=\{-5,1,0\}$;
18. $\overline{a}=\{2,1,-4\}$,	$\overline{в}=\{-3,2,-1\}$,	$\overline{c}=\{5,3,2\}$,	$\overline{d}=\{-6,3,0\}$;
19. $\overline{a}=\{2,1,-1\}$,	$\overline{в}=\{-3,3,2\}$,	$\overline{c}=\{1,-2,4\}$,	$\overline{d}=\{6,7,-11\}$;
20. $\overline{a}=\{3,-1,1\}$,	$\overline{в}=\{-1,2,-1\}$,	$\overline{c}=\{2,1,-4\}$,	$\overline{d}=\{-3,2,0\}$;
21. $\overline{a}=\{2,-3,4\}$,	$\overline{в}=\{3,1,-2\}$,	$\overline{c}=\{4,5,1\}$,	$\overline{d}=\{-1,5,6\}$;
22. $\overline{a}=\{3,-1,1\}$,	$\overline{в}=\{-1,2,-1\}$,	$\overline{c}=\{2,1,-4\}$,	$\overline{d}=\{-3,2,0\}$;
23. $\overline{a}=\{2,-3,1\}$,	$\overline{в}=\{-1,2,3\}$,	$\overline{c}=\{3,3,-2\}$,	$\overline{d}=\{-2,5,4\}$;

24.	$\bar{a}=\{-3,2,-7\}$,	$\bar{в}=\{4,2,-3\}$,	$\bar{c}=\{-3,8,-2\}$,	$\bar{d}=\{-2,8,9\}$;
25.	$\bar{a}=\{3,2,-1\}$,	$\bar{в}=\{1,3,1\}$,	$\bar{c}=\{2,-1,4\}$,	$\bar{d}=\{-1,0,7\}$;
26.	$\bar{a}=\{4,-1,2\}$,	$\bar{в}=\{2,2,-1\}$,	$\bar{c}=\{3.-1,4\}$,	$\bar{d}=\{5,7,13\}$;
27.	$\bar{a}=\{4,1,0\}$,	$\bar{в}=\{3,1,-5\}$,	$\bar{c}=\{7,2,1\}$,	$\bar{d}=\{8,3,1\}$;
28.	$\bar{a}=\{0,4,5\}$,	$\bar{в}=\{3,1,7\}$,	$\bar{c}=\{1,7,2\}$,	$\bar{d}=\{3,3,4\}$;
29.	$\bar{a}=\{1,-1,7\}$,	$\bar{в}=\{2,4,0\}$,	$\bar{c}=\{3,3,4\}$,	$\bar{d}=\{4,-1,1\}$;
30.	$\bar{a}=\{2,4,4\}$,	$\bar{в}=\{-1,-1,0\}$,	$\bar{c}=\{1,3,5\}$,	$\bar{d}=\{-1,0,-1\}$;
31.	$\bar{a}=\{3,-1,2\}$,	$\bar{в}=\{-1,0,5\}$,	$\bar{c}=\{2,-1,3\}$,	$\bar{d}=\{2,1,2\}$;
32.	$\bar{a}=\{-1,-1,3\}$,	$\bar{в}=\{4,-2,1\}$,	$\bar{c}=\{3,-3,1\}$,	$\bar{d}=\{0,1,0\}$;
33.	$\bar{a}=\{-2,1,4\}$,	$\bar{в}=\{3,-1,2\}$,	$\bar{c}=\{1,-2,1\}$,	$\bar{d}=\{5,3,0\}$;
34.	$\bar{a}=\{4,1,3\}$,	$\bar{в}=\{1,3,-1\}$,	$\bar{c}=\{3,-2,1\}$,	$\bar{d}=\{-2,0,1\}$;
35.	$\bar{a}=\{5,-5,1\}$,	$\bar{в}=\{4,1,-1\}$,	$\bar{c}=\{1,-6,3\}$,	$\bar{d}=\{3,0,-1\}$;
36.	$\bar{a}=\{0,5,3\}$,	$\bar{в}=\{2,1,-1\}$,	$\bar{c}=\{2,6,2\}$,	$\bar{d}=\{0,2,-2\}$;
37.	$\bar{a}=\{2,5,1\}$,	$\bar{в}=\{1,-3,4\}$,	$\bar{c}=\{1,2,5\}$,	$\bar{d}=\{-2,0,0\}$;
38.	$\bar{a}=\{1,4,-1\}$,	$\bar{в}=\{2,4,1\}$,	$\bar{c}=\{3,8,1\}$,	$\bar{d}=\{5,0,1\}$;
39.	$\bar{a}=\{5,7,1\}$,	$\bar{в}=\{3,-1,2\}$,	$\bar{c}=\{2,8,5\}$,	$\bar{d}=\{1,1,-1\}$;

40.	$\overline{a}=\{-2,1,4\}$,	$\overline{в}=\{3,1,2\}$,	$\overline{c}=\{1,2,1\}$,	$\overline{d}=\{3,-3,4\}$;
41.	$\overline{a}=\{4,-1,0\}$,	$\overline{в}=\{3,1,2\}$,	$\overline{c}=\{1,-2,4\}$,	$\overline{d}=\{5,7,-2\}$;
42.	$\overline{a}=\{1,0,-1\}$,	$\overline{в}=\{4,1,3\}$,	$\overline{c}=\{5,1,1\}$,	$\overline{d}=\{0,7,7\}$;
43.	$\overline{a}=\{1,3,-1\}$,	$\overline{в}=\{2,0,4\}$,	$\overline{c}=\{3,3,-5\}$,	$\overline{d}=\{-3,5,-3\}$;
44.	$\overline{a}=\{5,5,1\}$,	$\overline{в}=\{-3,1,4\}$,	$\overline{c}=\{2,6,1\}$,	$\overline{d}=\{0,0,-5\}$;
45.	$\overline{a}=\{-1,1,4\}$,	$\overline{в}=\{5,1,7\}$,	$\overline{c}=\{4,2,2\}$,	$\overline{d}=\{3,-1,0\}$;
46.	$\overline{a}=\{3,-1,1\}$,	$\overline{в}=\{0,4,2\}$,	$\overline{c}=\{3,3,8\}$,	$\overline{d}=\{4,0,-4\}$;
47.	$\overline{a}=\{-2,-2,5\}$,	$\overline{в}=\{4,1,0\}$,	$\overline{c}=\{2,-1,7\}$,	$\overline{d}=\{-1,0,0\}$;
48.	$\overline{a}=\{3,2,-2\}$,	$\overline{в}=\{2,5,1\}$,	$\overline{c}=\{1,-3,4\}$,	$\overline{d}=\{-2,-1,2\}$;
49.	$\overline{a}=\{5,1,-1\}$,	$\overline{в}=\{0,3,1\}$,	$\overline{c}=\{5,4,7\}$,	$\overline{d}=\{-5,1,3\}$;
50.	$\overline{a}=\{1,4,7\}$,	$\overline{в}=\{-8,1,2\}$,	$\overline{c}=\{7,5,1\}$,	$\overline{d}=\{2,-2,4\}$;
51.	$\overline{a}=\{-3,-3,2\}$,	$\overline{в}=\{1,4,-1\}$,	$\overline{c}=\{1,4,-1\}$,	$\overline{d}=\{1,1,-1\}$;
52.	$\overline{a}=\{3,4,4\}$,	$\overline{в}=\{-1,-1,2\}$,	$\overline{c}=\{2,3,3\}$,	$\overline{d}=\{0,4,-1\}$;
53.	$\overline{a}=\{4,-7,1\}$,	$\overline{в}=\{5,2,1\}$,	$\overline{c}=\{9,-5,3\}$,	$\overline{d}=\{4,-1,-1\}$;
54.	$\overline{a}=\{3,-1,2\}$,	$\overline{в}=\{4,-4,-1\}$,	$\overline{c}=\{1,-3,4\}$,	$\overline{d}=\{5,0,7\}$;
55.	$\overline{a}=\{-1,3,5\}$,	$\overline{в}=\{1,0,4\}$,	$\overline{c}=\{-2,3,5\}$,	$\overline{d}=\{-2,0,3\}$;

56. $\bar{a}=\{0,3,1\}$,	$\bar{в}=\{4,1,5\}$,	$\bar{c}=\{4,4,7\}$,	$\bar{d}=\{6,0,-3\}$;
57. $\bar{a}=\{0,-1,1\}$,	$\bar{в}=\{4,4,3\}$,	$\bar{c}=\{4,3,1\}$,	$\bar{d}=\{3,-3,0\}$;
58. $\bar{a}=\{2,-2,5\}$,	$\bar{в}=\{-1,1,-1\}$,	$\bar{c}=\{1,-1,0\}$,	$\bar{d}=\{8,7,-5\}$;
59. $\bar{a}=\{-1,-3,2\}$,	$\bar{в}=\{4,-1,-1\}$,	$\bar{c}=\{3,-4,4\}$,	$\bar{d}=\{2,3,-3\}$;
60. $\bar{a}=\{-1,-3,2\}$,	$\bar{в}=\{4,2,-4\}$,	$\bar{c}=\{5,5,1\}$,	$\bar{d}=\{0,6,-6\}$;
61. $\bar{a}=\{1,4,3\}$,	$\bar{в}=\{2,-3,1\}$,	$\bar{c}=\{3,2,1\}$,	$\bar{d}=\{4,4,-5\}$;
62. $\bar{a}=\{2,-1,1\}$,	$\bar{в}=\{-2,4,3\}$,	$\bar{c}=\{4,2,1\}$,	$\bar{d}=\{3,-4,-4\}$;
63. $\bar{a}=\{2,1,4\}$,	$\bar{в}=\{3,2,1\}$,	$\bar{c}=\{-1,4,5\}$,	$\bar{d}=\{-1,-1,4\}$;
64. $\bar{a}=\{1,3,4\}$,	$\bar{в}=\{4,2,-2\}$,	$\bar{c}=\{5,1,3\}$,	$\bar{d}=\{3,-8,-4\}$;
65. $\bar{a}=\{-2,4,4\}$,	$\bar{в}=\{-3,2,4\}$,	$\bar{c}=\{-4,4,-6\}$,	$\bar{d}=\{0,2,0\}$;
66. $\bar{a}=\{4,4,3\}$,	$\bar{в}=\{2,1,-3\}$,	$\bar{c}=\{6,5,1\}$,	$\bar{d}=\{3,-5,-5\}$;
67. $\bar{a}=\{2,-5,3\}$,	$\bar{в}=\{1,4,2\}$,	$\bar{c}=\{-3,1,1\}$,	$\bar{d}=\{-1,-1,4\}$;
68. $\bar{a}=\{2,4,-4\}$,	$\bar{в}=\{1,2,3\}$,	$\bar{c}=\{3,-2,1\}$,	$\bar{d}=\{0,3,1\}$;
69. $\bar{a}=\{1,3,-3\}$,	$\bar{в}=\{2,4,-2\}$,	$\bar{c}=\{3,1,5\}$,	$\bar{d}=\{4,0,-1\}$;
70. $\bar{a}=\{2,2,4\}$,	$\bar{в}=\{-1,3,1\}$,	$\bar{c}=\{3,2,4\}$,	$\bar{d}=\{-2,2,9\}$;
71. $\bar{a}=\{3,4,2\}$,	$\bar{в}=\{2,-4,-3\}$,	$\bar{c}=\{1,5,1\}$,	$\bar{d}=\{3,0,6\}$;

72. $\overline{a}=\{5,8,-1\}$,	$\overline{в}=\{2,-3,2\}$,	$\overline{c}=\{1,2,3\}$,	$\overline{d}=\{5,0,0\}$;
73. $\overline{a}=\{3,1,1\}$,	$\overline{в}=\{1,-4,-2\}$,	$\overline{c}=\{-3,5,6\}$,	$\overline{d}=\{1,3,-6\}$;
74. $\overline{a}=\{2,-1,5\}$,	$\overline{в}=\{5,2,13\}$,	$\overline{c}=\{3,-1,5\}$,	$\overline{d}=\{3,-4,-4\}$;
75. $\overline{a}=\{1,1,-1\}$,	$\overline{в}=\{4,-3,1\}$,	$\overline{c}=\{2,1,-1\}$,	$\overline{d}=\{0,0,-5\}$;
76. $\overline{a}=\{7,-5,0\}$,	$\overline{в}=\{4,11,2\}$,	$\overline{c}=\{2,3,4\}$,	$\overline{d}=\{0,0,3\}$;
77. $\overline{a}=\{1,2,1\}$,	$\overline{в}=\{3,-5,3\}$,	$\overline{c}=\{2,7,-1\}$,	$\overline{d}=\{2,-1,1\}$;
78. $\overline{a}=\{1,1,-1\}$,	$\overline{в}=\{8,3,-6\}$,	$\overline{c}=\{-4,-1,3\}$,	$\overline{d}=\{-1,3,-8\}$;
79. $\overline{a}=\{4,3,2\}$,	$\overline{в}=\{2,5,-3\}$,	$\overline{c}=\{3,6,-2\}$,	$\overline{d}=\{3,-1,-1\}$;
80. $\overline{a}=\{1,-2,3\}$,	$\overline{в}=\{2,3,-4\}$,	$\overline{c}=\{3,-2,-5\}$,	$\overline{d}=\{3,1,-5\}$;
81. $\overline{a}=\{1,7,1\}$,	$\overline{в}=\{4,4,-1\}$,	$\overline{c}=\{5,11,6\}$,	$\overline{d}=\{-2,-1,-3\}$;
82. $\overline{a}=\{5,1,0\}$,	$\overline{в}=\{4,-7,1\}$,	$\overline{c}=\{1,6,5\}$,	$\overline{d}=\{4,1,2\}$;
83. $\overline{a}=\{2,1,3\}$,	$\overline{в}=\{3,-5,3\}$,	$\overline{c}=\{2,7,-1\}$,	$\overline{d}=\{1,-2,-5\}$;
84. $\overline{a}=\{1,1,-1\}$,	$\overline{в}=\{8,3,-6\}$,	$\overline{c}=\{-4,1,3\}$,	$\overline{d}=\{4,2-4\}$;
85. $\overline{a}=\{4,3,2\}$,	$\overline{в}=\{2,5,-3\}$,	$\overline{c}=\{5,6,-2\}$,	$\overline{d}=\{1,7,1\}$;
86. $\overline{a}=\{1,-2,3\}$,	$\overline{в}=\{2,3,-4\}$,	$\overline{c}=\{3,-2,5\}$,	$\overline{d}=\{5,1,-3\}$;
87. $\overline{a}=\{1,7,1\}$,	$\overline{в}=\{4,4,-1\}$,	$\overline{c}=\{5,11,6\}$,	$\overline{d}=\{1,1,-5\}$;

88. $\bar{a}=\{5,1,0\}$,	$\bar{в}=\{4,-7,1\}$,	$\bar{c}=\{1,6,5\}$,	$\bar{d}=\{3,1,3\}$;
89. $\bar{a}=\{2,1,3\}$,	$\bar{в}=\{4,1,-3\}$,	$\bar{c}=\{6,2,4\}$,	$\bar{d}=\{4,2,1\}$;
90. $\bar{a}=\{4,1,3\}$,	$\bar{в}=\{1,2,-1\}$,	$\bar{c}=\{3,-1,4\}$,	$\bar{d}=\{5,3,1\}$;
91. $\bar{a}=\{2,-1,1\}$,	$\bar{в}=\{4,3,-1\}$,	$\bar{c}=\{5,2,0\}$,	$\bar{d}=\{2,1,4\}$;
92. $\bar{a}=\{-1,-1,2\}$,	$\bar{в}=\{0,4,7\}$,	$\bar{c}=\{5,3,9\}$,	$\bar{d}=\{4,1,2\}$;
93. $\bar{a}=\{2,-1,1\}$,	$\bar{в}=\{3,2,-1\}$,	$\bar{c}=\{5,1,3\}$,	$\bar{d}=\{3,1,-3\}$;
94. $\bar{a}=\{1,-3,-3\}$,	$\bar{в}=\{2,1,4\}$,	$\bar{c}=\{3,-2,1\}$,	$\bar{d}=\{-1,4,2\}$;
95. $\bar{a}=\{1,1,4\}$,	$\bar{в}=\{3,1,2\}$,	$\bar{c}=\{4,2,1\}$,	$\bar{d}=\{2,5,5\}$;
96. $\bar{a}=\{3,3,2\}$,	$\bar{в}=\{1,-1,4\}$,	$\bar{c}=\{4,2,3\}$,	$\bar{d}=\{4,1,4\}$;
97. $\bar{a}=\{1,3,2\}$,	$\bar{в}=\{-1,-1,4\}$,	$\bar{c}=\{2,4,1\}$,	$\bar{d}=\{3,-1,2\}$;
98. $\bar{a}=\{2,3,2\}$,	$\bar{в}=\{1,1,-1\}$,	$\bar{c}=\{3,4,1\}$,	$\bar{d}=\{7,0,1\}$;
99. $\bar{a}=\{3,3,2\}$,	$\bar{в}=\{1,-2,3\}$,	$\bar{c}=\{1,1,5\}$,	$\bar{d}=\{2,1,2\}$;
100. $\bar{a}=\{2,1,3\}$,	$\bar{в}=\{-1,4,1\}$,	$\bar{c}=\{1,5,3\}$,	$\bar{d}=\{3,3,-1\}$;

Завдання 4. Застосування типів добутку векторів

За даними $\overline{a}$, $\overline{в}$, $|\overline{m}|$, $|\overline{n}|$, $(\overline{m},\wedge\overline{n})$ знайти $пр_{\overline{в}}\overline{a}$, $|\overline{a}\times\overline{в}|$, $|\overline{a}|$

1. $\overline{a}=\overline{m}+2\overline{n}$, $(\overline{m},\wedge\overline{n})=\frac{\pi}{3}$;	$\overline{в}=\overline{m}-\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert=2$,	$\lvert\overline{n}\rvert=3$,
2. $\overline{a}=2\overline{m}-\overline{n}$,	$\overline{в}=\overline{m}+\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert=\lvert\overline{n}\rvert=2$,	$(\overline{m},\wedge\overline{n})=-\frac{\pi}{3}$;
3. $\overline{a}=-\overline{m}+\overline{n}$, $(\overline{m},\wedge\overline{n})=-\frac{\pi}{6}$;	$\overline{в}=\overline{m}-\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert=2$,	$\lvert\overline{n}\rvert=3$,
4. $\overline{a}=-2\overline{m}+\overline{n}$, $(\overline{m},\wedge\overline{n})=-\frac{\pi}{6}$;	$\overline{в}=\overline{m}+2\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert=1$,	$\lvert\overline{n}\rvert=3$,
5. $\overline{a}=4\overline{m}+\overline{n}$, $(\overline{m}\wedge\overline{n})=\frac{\pi}{3}$;	$\overline{в}=-\overline{m}+2\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert=2$,	$\lvert\overline{n}\rvert=2$,
6. $\overline{a}=3\overline{m}+\overline{n}$, $(\overline{m},\wedge\overline{n})=-\frac{\pi}{3}$;	$\overline{в}=\overline{m}+\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert=1$,	$\lvert\overline{n}\rvert=1$,
7. $\overline{a}=3\overline{m}+2\overline{n}$, $(\overline{m},\wedge\overline{n})=\frac{\pi}{3}$;	$\overline{в}=\overline{m}-\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert=2$,	$\lvert\overline{n}\rvert=1$,
8. $\overline{a}=3\overline{m}-2\overline{n}$, $(\overline{m},\wedge\overline{n})=-\frac{\pi}{6}$;	$\overline{в}=\overline{m}-\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert=2$,	$\lvert\overline{n}\rvert=1$,

9. $\overline{a} = 2\overline{m} + 3\overline{n},$ $\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right) = -\dfrac{\pi}{6};$	$\overline{в} = \overline{m} + \overline{n},$	$\left\lvert\overline{m}\right\rvert = 2,$	$\left\lvert\overline{n}\right\rvert = 1,$
10. $\overline{a} = 2\overline{m} - 3\overline{n},$ $\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right) = \dfrac{\pi}{6};$	$\overline{в} = \overline{m} - 2\overline{n},$	$\left\lvert\overline{m}\right\rvert = 2,$	$\left\lvert\overline{n}\right\rvert = 1,$
11. $\overline{a} = 2\overline{m} + 4\overline{n},$ $\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right) = \dfrac{\pi}{3};$	$\overline{в} = \overline{m} - 3\overline{n},$	$\left\lvert\overline{m}\right\rvert = 1,$	$\left\lvert\overline{n}\right\rvert = 1,$
12. $\overline{a} = -2\overline{m} + \overline{n},$ $\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right) = -\dfrac{\pi}{3};$	$\overline{в} = 3\overline{m} - \overline{n},$	$\left\lvert\overline{m}\right\rvert = 2,$	$\left\lvert\overline{n}\right\rvert = 1,$
13. $\overline{a} = 3\overline{m} + 2\overline{n},$ $\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right) = \dfrac{\pi}{6};$	$\overline{в} = 2\overline{m} - \overline{n},$	$\left\lvert\overline{m}\right\rvert = 1,$	$\left\lvert\overline{n}\right\rvert = 2,$
14. $\overline{a} = -4\overline{m} + \overline{n},$ $\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$	$\overline{в} = 3\overline{m} + \overline{n},$	$\left\lvert\overline{m}\right\rvert = 2,$	$\left\lvert\overline{n}\right\rvert = 4,$
15. $\overline{a} = -5\overline{m} + \overline{n},$ $\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right) = \dfrac{\pi}{4};$	$\overline{в} = 2\overline{m} + \overline{n},$	$\left\lvert\overline{m}\right\rvert = 2,$	$\left\lvert\overline{n}\right\rvert = 2,$
16. $\overline{a} = \overline{m} + 5\overline{n},$ $\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right) = -\dfrac{\pi}{4};$	$\overline{в} = \overline{m} + 2\overline{n},$	$\left\lvert\overline{m}\right\rvert = 1,$	$\left\lvert\overline{n}\right\rvert = 1,$
17. $\overline{a} = -\overline{m} + 3\overline{n},$ $\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right) = \dfrac{\pi}{4};$	$\overline{в} = 5\overline{m} + 2\overline{n},$	$\left\lvert\overline{m}\right\rvert = 2,$	$\left\lvert\overline{n}\right\rvert = 1,$

18. $\overline{a} = 2\overline{m} + 5\overline{n},$ $\quad \overline{\text{в}} = -\overline{m} + 3\overline{n},$ $\quad |\overline{m}| = 2,$ $\quad |\overline{n}| = 2,$

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \dfrac{\pi}{4};$

---

19. $\overline{a} = -2\overline{m} + 5\overline{n},$ $\quad \overline{\text{в}} = \overline{m} - 3\overline{n},$ $\quad |\overline{m}| = 1,$ $\quad |\overline{n}| = 1,$

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \dfrac{\pi}{4};$

---

20. $\overline{a} = -\overline{m} + 3\overline{n},$ $\quad \overline{\text{в}} = 2\overline{m} - \overline{n},$ $\quad |\overline{m}| = 2,$ $\quad |\overline{n}| = 2,$

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \dfrac{\pi}{3};$

---

21. $\overline{a} = \overline{m} - 3\overline{n},$ $\quad \overline{\text{в}} = 2\overline{m} + \overline{n},$ $\quad |\overline{m}| = 2,$ $\quad |\overline{n}| = 3,$

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = -\dfrac{\pi}{3};$

---

22. $\overline{a} = 2\overline{m} + \overline{n},$ $\quad \overline{\text{в}} = -\overline{m} - 3\overline{n},$ $\quad |\overline{m}| = 1,$ $\quad |\overline{n}| = 2,$

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \dfrac{\pi}{4};$

---

23. $\overline{a} = -2\overline{m} + \overline{n},$ $\quad \overline{\text{в}} = 3\overline{m} + 3\overline{n},$ $\quad |\overline{m}| = 2,$ $\quad |\overline{n}| = 1,$

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = -\dfrac{\pi}{4};$

---

24. $\overline{a} = \overline{m} + 3\overline{n},$ $\quad \overline{\text{в}} = -2\overline{m} + \overline{n},$ $\quad |\overline{m}| = 2,$ $\quad |\overline{n}| = 3,$

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \dfrac{\pi}{3};$

---

25. $\overline{a} = -\overline{m} + \overline{n},$ $\quad \overline{\text{в}} = 2\overline{m} + 5\overline{n},$ $\quad |\overline{m}| = 1,$ $\quad |\overline{n}| = 3,$

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = -\dfrac{\pi}{3};$

---

26. $\overline{a} = 3\overline{m} + 3\overline{n},$ $\quad \overline{\text{в}} = \overline{m} - 2\overline{n},$ $\quad |\overline{m}| = 2,$ $\quad |\overline{n}| = 1,$

$\left(\overline{m}, \wedge n\right) = \dfrac{\pi}{3};$

27. $\overline{a}=4\overline{m}-\overline{n},$ $(\overline{m},\wedge\overline{n})=-\dfrac{\pi}{3};$	$\overline{в}=\overline{m}+3\overline{n},$	$\lvert\overline{m}\rvert=2,$	$\lvert\overline{n}\rvert=2,$
28. $\overline{a}=2\overline{m}-3\overline{n},$ $(\overline{m},\wedge\overline{n})=\dfrac{\pi}{6};$	$\overline{в}=5\overline{m}+\overline{n},$	$\lvert\overline{m}\rvert=2,$	$\lvert\overline{n}\rvert=3,$
29. $\overline{a}=-2\overline{m}+7\overline{n},$ $(\overline{m},\wedge\overline{n})=-\dfrac{\pi}{6};$	$\overline{в}=\overline{m}-3\overline{n},$	$\lvert\overline{m}\rvert=1,$	$\lvert\overline{n}\rvert=1,$
30. $\overline{a}=4\overline{m}-5\overline{n},$ $(\overline{m},\wedge\overline{n})=\dfrac{\pi}{3};$	$\overline{в}=\overline{m}+3\overline{n},$	$\lvert\overline{m}\rvert=1,$	$\lvert\overline{n}\rvert=1,$
31. $\overline{a}=5\overline{m}-4\overline{n},$ $(\overline{m},\wedge\overline{n})=\dfrac{\pi}{4};$	$\overline{в}=\overline{m}-2\overline{n},$	$\lvert\overline{m}\rvert=3,$	$\lvert\overline{n}\rvert=4,$
32. $\overline{a}=3\overline{m}+5\overline{n},$ $(\overline{m},\wedge\overline{n})=-\dfrac{\pi}{4};$	$\overline{в}=\overline{m}-4\overline{n},$	$\lvert\overline{m}\rvert=2,$	$\lvert\overline{n}\rvert=1,$
33. $\overline{a}=2\overline{m}+6\overline{n},$ $(\overline{m},\wedge\overline{n})=-\dfrac{\pi}{3};$	$\overline{в}=2\overline{m}-\overline{n},$	$\lvert\overline{m}\rvert=3,$	$\lvert\overline{n}\rvert=1,$
34. $\overline{a}=2\overline{m}-6\overline{n},$ $(\overline{m},\wedge\overline{n})=\dfrac{\pi}{6};$	$\overline{в}=3\overline{m}+\overline{n},$	$\lvert\overline{m}\rvert=1,$	$\lvert\overline{n}\rvert=2,$
35. $\overline{a}=3\overline{m}+7\overline{n},$ $(\overline{m},\wedge\overline{n})=-\dfrac{\pi}{6};$	$\overline{в}=\overline{m}-4\overline{n},$	$\lvert\overline{m}\rvert=1,$	$\lvert\overline{n}\rvert=1,$

36. $\overline{a} = -2\overline{m} - 9\overline{n}$,	$\overline{в} = 3\overline{m} - \overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert = 2$,	$\lvert\overline{n}\rvert = 1$,
$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$;			
37. $\overline{a} = 3\overline{m} + 8\overline{n}$,	$\overline{в} = \overline{m} + 5\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert = 1$,	$\lvert\overline{n}\rvert = 2$,
$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \dfrac{\pi}{3}$;			
38. $\overline{a} = -4\overline{m} + 5\overline{n}$,	$\overline{в} = 3\overline{m} - 4\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert = 3$,	$\lvert\overline{n}\rvert = 1$,
$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \dfrac{\pi}{4}$;			
39. $\overline{a} = -5\overline{m} - \overline{n}$,	$\overline{в} = \overline{m} - 4\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert = 1$,	$\lvert\overline{n}\rvert = 3$,
$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$;			
40. $\overline{a} = -\overline{m} + 7\overline{n}$,	$\overline{в} = 5\overline{m} + 3\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert = 2$,	$\lvert\overline{n}\rvert = 4$,
$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \dfrac{\pi}{6}$;			
41. $\overline{a} = 2\overline{m} + 8\overline{n}$,	$\overline{в} = -3\overline{m} - 2\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert = 4$,	$\lvert\overline{n}\rvert = 4$,
$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$;			
42. $\overline{a} = -2\overline{m} + 8\overline{n}$,	$\overline{в} = 5\overline{m} - 4\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert = 4$,	$\lvert\overline{n}\rvert = 1$,
$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \dfrac{\pi}{3}$;			
43. $\overline{a} = 5\overline{m} + 6\overline{n}$,	$\overline{в} = 3\overline{m} + 7\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert = 1$,	$\lvert\overline{n}\rvert = 1$,
$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$;			
44. $\overline{a} = \overline{m} - 5\overline{n}$,	$\overline{в} = 3\overline{m} + \overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert = 3$,	$\lvert\overline{n}\rvert = 1$,
$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \dfrac{\pi}{3}$;			

45. $\bar{a} = 2\bar{m} - 3\bar{n}$, $\quad \bar{в} = 5\bar{m} + \bar{n}$, $\quad |\bar{m}| = 2$, $\quad |\bar{n}| = 1$,
$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\dfrac{\pi}{3}$;

46. $\bar{a} = 6\bar{m} - \bar{n}$, $\quad \bar{в} = \bar{m} - 3\bar{n}$, $\quad |\bar{m}| = 1$, $\quad |\bar{n}| = 4$,
$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \dfrac{\pi}{4}$;

47. $\bar{a} = 6\bar{m} - 3\bar{n}$, $\quad \bar{в} = \bar{m} - 3\bar{n}$, $\quad |\bar{m}| = 2$, $\quad |\bar{n}| = 1$,
$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \dfrac{\pi}{4}$;

48. $\bar{a} = -6\bar{m} - 3\bar{n}$, $\quad \bar{в} = 2\bar{m} + 3\bar{n}$, $\quad |\bar{m}| = 1$, $\quad |\bar{n}| = 2$,
$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \dfrac{\pi}{6}$;

49. $\bar{a} = 6\bar{m} - 4\bar{n}$, $\quad \bar{в} = \bar{m} - 2\bar{n}$, $\quad |\bar{m}| = 3$, $\quad |\bar{n}| = 4$,
$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\dfrac{\pi}{6}$;

50. $\bar{a} = -6\bar{m} - 5\bar{n}$, $\quad \bar{в} = -\bar{m} - 2\bar{n}$, $\quad |\bar{m}| = 1$, $\quad |\bar{n}| = 2$,
$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \dfrac{\pi}{4}$;

51. $\bar{a} = 6\bar{m} + 3\bar{n}$, $\quad \bar{в} = -2\bar{m} + \bar{n}$, $\quad |\bar{m}| = 2$, $\quad |\bar{n}| = 2$,
$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\dfrac{\pi}{4}$;

52. $\bar{a} = -6\bar{m} + 4\bar{n}$, $\quad \bar{в} = -3\bar{m} - \bar{n}$, $\quad |\bar{m}| = 3$, $\quad |\bar{n}| = 1$,
$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \dfrac{\pi}{3}$;

53. $\bar{a} = 6\bar{m} + 5\bar{n}$, $\quad \bar{в} = 3\bar{m} + \bar{n}$, $\quad |\bar{m}| = 4$, $\quad |\bar{n}| = 2$,
$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\dfrac{\pi}{3}$;

54. $\overline{a} = 3\overline{m} - 6\overline{n}$, $(\overline{m},\wedge\overline{n}) = \frac{\pi}{6}$	$\overline{в} = 3\overline{m} - \overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert = 5$,	$\lvert\overline{n}\rvert = 1$,
55. $\overline{a} = 4\overline{m} - 6\overline{n}$, $(\overline{m},\wedge\overline{n}) = -\frac{\pi}{6}$;	$\overline{в} = \overline{m} - 4\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert = 1$,	$\lvert\overline{n}\rvert = 3$,
56. $\overline{a} = 4\overline{m} + 6\overline{n}$, $(\overline{m},\wedge\overline{n}) = \frac{\pi}{3}$;	$\overline{в} = 5\overline{m} + 3\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert = 2$,	$\lvert\overline{n}\rvert = 4$,
57. $\overline{a} = 3\overline{m} + 6\overline{n}$, $(\overline{m},\wedge\overline{n}) = -\frac{\pi}{3}$;	$\overline{в} = -\overline{m} - 5\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert = 3$,	$\lvert\overline{n}\rvert = 1$,
58. $\overline{a} = 5\overline{m} - 6\overline{n}$, $(\overline{m},\wedge\overline{n}) = \frac{\pi}{6}$;	$\overline{в} = -5\overline{m} - 3\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert = 4$,	$\lvert\overline{n}\rvert = 1$,
59. $\overline{a} = 5\overline{m} + 6\overline{n}$, $(\overline{m},\wedge\overline{n}) = -\frac{\pi}{6}$;	$\overline{в} = -5\overline{m} + 3\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert = 1$,	$\lvert\overline{n}\rvert = 5$,
60. $\overline{a} = -7\overline{m} + \overline{n}$, $(\overline{m},\wedge\overline{n}) = \frac{\pi}{4}$;	$\overline{в} = 4\overline{m} + \overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert = 2$,	$\lvert\overline{n}\rvert = 3$,
61. $\overline{a} = 7\overline{m} + 2\overline{n}$, $(\overline{m},\wedge\overline{n}) = -\frac{\pi}{4}$;	$\overline{в} = -4\overline{m} - \overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert = 3$,	$\lvert\overline{n}\rvert = 1$,
62. $\overline{a} = -5\overline{m} - 7\overline{n}$, $(\overline{m},\wedge\overline{n}) = \frac{\pi}{3}$;	$\overline{в} = -4\overline{m} + \overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert = 1$,	$\lvert\overline{n}\rvert = 3$,
63. $\overline{a} = 5\overline{m} + 7\overline{n}$,	$\overline{в} = -8\overline{m} - \overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert = 2$,	$\lvert\overline{n}\rvert = 1$,

$(\overline{m}, \wedge \overline{n}) = -\dfrac{\pi}{3}$

---

64. $\overline{a} = 7\overline{m} - \overline{n}$, $\overline{в} = 8\overline{m} + \overline{n}$, $|\overline{m}| = 3$, $|\overline{n}| = 2$,
$(\overline{m}, \wedge \overline{n}) = \dfrac{\pi}{6}$;

---

65. $\overline{a} = -7\overline{m} + 3\overline{n}$, $\overline{в} = 4\overline{m} - 3\overline{n}$, $|\overline{m}| = 4$, $|\overline{n}| = 1$,
$(\overline{m}, \wedge \overline{n}) = -\dfrac{\pi}{6}$;

---

66. $\overline{a} = -4\overline{m} + 7\overline{n}$, $\overline{в} = -4\overline{m} - 3\overline{n}$, $|\overline{m}| = 1$, $|\overline{n}| = 3$,
$(\overline{m}, \wedge \overline{n}) = \dfrac{\pi}{4}$;

---

67. $\overline{a} = 4\overline{m} - 7\overline{n}$, $\overline{в} = \overline{m} + 8\overline{n}$, $|\overline{m}| = 2$, $|\overline{n}| = 1$,
$(\overline{m}, \wedge \overline{n}) = -\dfrac{\pi}{4}$;

---

68. $\overline{a} = -7\overline{m} - 2\overline{n}$, $\overline{в} = \overline{m} - 8\overline{n}$, $|\overline{m}| = 3$, $|\overline{n}| = 1$,
$(\overline{m}, \wedge \overline{n}) = \dfrac{\pi}{6}$;

---

69. $\overline{a} = \overline{m} - 3\overline{n}$, $\overline{в} = 3\overline{m} + 6\overline{n}$, $|\overline{m}| = 1$, $|\overline{n}| = 2$,
$(\overline{m}, \wedge \overline{n}) = \dfrac{\pi}{4}$;

---

70. $\overline{a} = -\overline{m} + 3\overline{n}$, $\overline{в} = -3\overline{m} - 6\overline{n}$, $|\overline{m}| = 2$, $|\overline{n}| = 3$,
$(\overline{m}, \wedge \overline{n}) = -\dfrac{\pi}{4}$;

---

71. $\overline{a} = -\overline{m} - 3\overline{n}$, $\overline{в} = 3\overline{m} - 6\overline{n}$, $|\overline{m}| = 3$, $|\overline{n}| = 1$,
$(\overline{m}, \wedge \overline{n}) = \dfrac{\pi}{6}$;

---

72. $\overline{a} = 2\overline{m} - 4\overline{n}$, $\overline{в} = 6\overline{m} - 3\overline{n}$, $|\overline{m}| = 1$, $|\overline{n}| = 2$,

$\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right)=-\dfrac{\pi}{6};$

---

73. $\overline{a}=-2\overline{m}-4\overline{n},\quad \overline{в}=6\overline{m}+3\overline{n},\quad |\overline{m}|=2,\quad |\overline{n}|=2,$

$\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right)=\dfrac{\pi}{3};$

---

74. $\overline{a}=-2\overline{m}-4\overline{n},\quad \overline{в}=5\overline{m}+\overline{n},\quad |\overline{m}|=3,\quad |\overline{n}|=1,$

$\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right)=-\dfrac{\pi}{3};$

---

75. $\overline{a}=\overline{m}+3\overline{n},\quad \overline{в}=-6\overline{m}-3\overline{n},\quad |\overline{m}|=1,\quad |\overline{n}|=3,$

$\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right)=\dfrac{\pi}{4};$

---

76. $\overline{a}=2\overline{m}+4\overline{n},\quad \overline{в}=5\overline{m}-\overline{n},\quad |\overline{m}|=1,\quad |\overline{n}|=1,$

$\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right)=-\dfrac{\pi}{4};$

---

77. $\overline{a}=3\overline{m}-2\overline{n},\quad \overline{в}=-5\overline{m}+\overline{n},\quad |\overline{m}|=2,\quad |\overline{n}|=3,$

$\left(\overline{m},\wedge n\right)=\dfrac{\pi}{6};$

---

78. $\overline{a}=-3\overline{m}+2\overline{n},\quad \overline{в}=7\overline{m}+\overline{n},\quad |\overline{m}|=3,\quad |\overline{n}|=2,$

$\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right)=-\dfrac{\pi}{6};$

---

79. $\overline{a}=-3\overline{m}-2\overline{n},\quad \overline{в}=-7\overline{m}+\overline{n},\quad |\overline{m}|=1,\quad |\overline{n}|=4,$

$\left(\overline{m},\wedge n\right)=\dfrac{\pi}{3};$

---

80. $\overline{a}=3\overline{m}+2\overline{n},\quad \overline{в}=-7\overline{m}-\overline{n},\quad |\overline{m}|=2,\quad |\overline{n}|=1,$

$\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right)=-\dfrac{\pi}{3};$

---

81. $\overline{a}=\overline{m}-5\overline{n},\quad \overline{в}=\overline{m}+7\overline{n},\quad |\overline{m}|=3,\quad |\overline{n}|=2,$

$\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right)=\frac{\pi}{6};$

82. $\overline{a}=\overline{m}+5\overline{n},$ $\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right)=-\frac{\pi}{6};$	$\overline{в}=-\overline{m}-7\overline{n},$	$\lvert\overline{m}\rvert=2,$	$\lvert\overline{n}\rvert=3,$
83. $\overline{a}=-\overline{m}-5\overline{n},$ $\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right)=-\frac{\pi}{3};$	$\overline{в}=\overline{m}+7\overline{n},$	$\lvert\overline{m}\rvert=3,$	$\lvert\overline{n}\rvert=1,$
84. $\overline{a}=-\overline{m}+5\overline{n},$ $\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right)=-\frac{\pi}{4};$	$\overline{в}=3\overline{m}+7\overline{n},$	$\lvert\overline{m}\rvert=1,$	$\lvert\overline{n}\rvert=1,$
85. $\overline{a}=5\overline{m}-\overline{n},$ $\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right)=\frac{\pi}{6};$	$\overline{в}=7\overline{m}-3\overline{n},$	$\lvert\overline{m}\rvert=1,$	$\lvert\overline{n}\rvert=2,$
86. $\overline{a}=-5\overline{m}-2\overline{n},$ $\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right)=-\frac{\pi}{6};$	$\overline{в}=4\overline{m}-2\overline{n},$	$\lvert\overline{m}\rvert=4,$	$\lvert\overline{n}\rvert=1,$
87. $\overline{a}=5\overline{m}+2\overline{n},$ $\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right)=\frac{\pi}{3};$	$\overline{в}=-4\overline{m}+2n,$	$\lvert\overline{m}\rvert=2,$	$\lvert\overline{n}\rvert=2,$
88. $\overline{a}=-5\overline{m}+2\overline{n},$ $\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right)=-\frac{\pi}{3};$	$\overline{в}=-4\overline{m}-\overline{n},$	$\lvert\overline{m}\rvert=3,$	$\lvert\overline{n}\rvert=1,$
89. $\overline{a}=5\overline{m}+3\overline{n},$ $\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right)=\frac{\pi}{6};$	$\overline{в}=6\overline{m}-4\overline{n},$	$\lvert\overline{m}\rvert=1,$	$\lvert\overline{n}\rvert=2,$
90. $\overline{a}=5\overline{m}-3\overline{n},$	$\overline{в}=-6\overline{m}-4\overline{n},$	$\lvert\overline{m}\rvert=2,$	$\lvert\overline{n}\rvert=2,$

$\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right)=-\dfrac{\pi}{6}$;

---

91. $\overline{a}=-5\overline{m}-3\overline{n}$, $\overline{в}=-6\overline{m}+4\overline{n}$, $\left|\overline{m}\right|=3$, $\left|\overline{n}\right|=1$,
$\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right)=\dfrac{\pi}{4}$;

---

92. $\overline{a}=-5\overline{m}+3\overline{n}$, $\overline{в}=4\overline{m}-6\overline{n}$, $\left|\overline{m}\right|=1$, $\left|\overline{n}\right|=2$,
$\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right)=-\dfrac{\pi}{4}$;

---

93. $\overline{a}=5\overline{m}+3\overline{n}$, $\overline{в}=-4\overline{m}-6\overline{n}$, $\left|\overline{m}\right|=2$, $\left|\overline{n}\right|=3$,
$\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right)=\dfrac{\pi}{3}$;

---

94. $\overline{a}=\overline{m}+\overline{n}$, $\overline{в}=5\overline{m}+7\overline{n}$, $\left|\overline{m}\right|=2$, $\left|\overline{n}\right|=1$,
$\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right)=\dfrac{\pi}{3}$;

---

95. $\overline{a}=3\overline{m}+\overline{n}$, $\overline{в}=5\overline{m}-7\overline{n}$, $\left|\overline{m}\right|=1$, $\left|\overline{n}\right|=2$,
$\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right)=-\dfrac{\pi}{3}$;

---

96. $\overline{a}=-\overline{m}-\overline{n}$, $\overline{в}=-7\overline{m}-5\overline{n}$, $\left|\overline{m}\right|=1$, $\left|\overline{n}\right|=2$,
$\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right)=\dfrac{\pi}{4}$;

---

97. $\overline{a}=-\overline{m}+\overline{n}$, $\overline{в}=-7\overline{m}+5\overline{n}$, $\left|\overline{m}\right|=2$, $\left|\overline{n}\right|=1$,
$\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right)=-\dfrac{\pi}{4}$;

---

98. $\overline{a}=3\overline{m}-2\overline{n}$, $\overline{в}=7\overline{m}+5\overline{n}$, $\left|\overline{m}\right|=1$, $\left|\overline{n}\right|=3$,
$\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right)=\dfrac{\pi}{6}$;

---

99. $\overline{a}=-3\overline{m}+2\overline{n}$, $\overline{в}=6\overline{m}-4\overline{n}$, $\left|\overline{m}\right|=1$, $\left|\overline{n}\right|=1$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = -\dfrac{\pi}{6};$

100. $\overline{a} = -3\overline{m} - 2\overline{n},$ $\overline{в} = -6\overline{m} + 4\overline{n},$ $\left|\overline{m}\right| = 2,$ $\left|\overline{n}\right| = 1,$ $\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \dfrac{\pi}{4}.$

Завдання 5. Обчислення об'ємів, площ, знаходження кутів застосуванням добутків векторів

Дано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$. Знайти: 1) довжину ребра A_1A_2; 2) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4; 3) кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$; 4) площу грані $A_1A_2A_3$; 5) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$; 6) рівняння прямої A_1A_2; 7) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 8) рівняння прямої, яка опущена з вершини A_4 перпендикулярно до грані $A_1A_2A_3$.

1. A_1(4; 2; 5)	A_2(0; 7; 2)	A_3(0; 2; 7)	A_4(1; 5; 0).
2. A_1(4; 4; 10)	A_2(4; 10; 2)	A_3(2; 8; 4)	A_4(9; 6; 4).
3. A_1(4; 6; 5)	A_2(6; 9; 4)	A_3(2; 10; 10)	A_4(7; 5; 9).
4. A_1(3; 5; 4)	A_2(8; 7; 4)	A_3(5; 10; 4)	A_4(4; 7; 8).
5. A_1(10; 6; 6)	A_2(-2; 8; 2)	A_3(6; 8; 9)	A_4(7; 10; 3).
6. A_1(1; 84 2)	A_2(5; 2; 6)	A_3(5; 7; 4)	A_4(4; 10; 9).
7. A_1(6; 6; 5)	A_2(4; 9; 5)	A_3(4; 6; 11)	A_4(6; 9; 3).
8. A_1(7; 2; 2)	A_2(5; 7; 7).	A_3(5; 3; 1)	A_4(2; 3; 7).

9. $A_1(8; 6; 4)$	$A_2(10; 5; 5)$	$A_3(5; 6; 8)$	$A_4(8; 10; 7)$.
10. $A_1(7; 7; 3)$	$A_2(6; 5; 8)$	$A_3(3; 5; 8)$	$A_4(8; 4; 1)$.
11. $A_1(3; 1; 4)$	$A_2(-1; 6; 1)$	$A_3(-1; 1; 6)$	$A_4(0; 4; -1)$.
12. $A_1(3; 3; 9)$	$A_2(6; 9; 1)$	$A_3(1; 7; 3)$	$A_4(8; 5; 8)$.
13. $A_1(3; 5; 4)$	$A_2(5; 8; 3)$	$A_3(1; 9; 9)$	$A_4(6; 4; 8)$.
14. $A_1(2; 4; 3)$	$A_2(7; 6; 3)$	$A_3(4; 9; 3)$	$A_4(3; 6; 7)$.
15. $A_1(9; 5; 5)$	$A_2(-3; 7; 1)$	$A_3(5; 7; 8)$	$A_4(6; 9; 2)$.
16. $A_1(0; 7; 1)$	$A_2(4; 1; 5)$	$A_3(4; 6; 3)$	$A_4(3; 9; 8)$.
17. $A_1(5; 5; 4)$	$A_2(3; 8; 4)$	$A_3(3; 5; 10)$	$A_4(5; 8; 2)$.
18. $A_1(6; 1; 1)$	$A_2(4; 6; 6)$	$A_3(4; 5; 7)$	$A_4(7; 9; 6)$.
19. $A_1(3; 8; 1)$	$A_2(5; 3; 9)$	$A_3(1; 3; 5)$	$A_4(4; 3; 1)$.
20. $A_1(6; 6; 2)$	$A_2(5; 4; 7)$	$A_3(2; 4; 7)$	$A_4(7; 3; 0)$.
21. $A_1(1; 2; 7)$	$A_2(4; 2; 10)$	$A_3(2; 3; 5)$	$A_4(5; 3; 7)$.
22. $A_1(4; 2; 10)$	$A_2(1; 2; 7)$	$A_3(5; 3; 7)$	$A_4(2; 3; 5)$.
23. $A_1(2; 3; 5)$	$A_2(5; 3; 7)$	$A_3(1; 2; 7)$	$A_4(4; 2; 10)$.
24. $A_1(5; 3; 7)$	$A_2(2; 3; 5)$	$A_3(4; 2; 10)$	$A_4(1; 2; 7)$.
25. $A_1(1; 2; 5)$	$A_2(4; 0; 6)$	$A_3(2; 6; 5)$	$A_4(6; 4; 8)$.
26. $A_1(4; 3; 5)$	$A_2(1; 9; 7)$	$A_3(0; 2; 0)$	$A_4(5; 3; 10)$.
27. $A_1(2; 1; 6)$	$A_2(1; 4; 9)$	$A_3(2; 5; 8)$	$A_4(5; 4; 2)$.
28. $A_1(2; 1; 7)$	$A_2(3; 3; 6)$	$A_3(2; 3; 9)$	$A_4(1; 2; 5)$.
29. $A_1(2; -1; 7)$	$A_2(6; 3; 1)$	$A_3(3; 2; 8)$	$A_4(2; -3; 7)$.

30.	$A_1(4; 7; 8)$	$A_2(-1; 13; 0)$	$A_3(2; 4; 9)$	$A_4(1; 8; 9)$.
31.	$A_1(7; 7; 3)$	$A_2(6; 5; 8)$	$A_3(3; 5; 8)$	$A_4(8; 4; 1)$.
32.	$A_1(3; 1; 4)$	$A_2(-1; 6; 1)$	$A_3(-1; 1; 6)$	$A_4(0; 4; -1)$.
33.	$A_1(3; 3; 9)$	$A_2(6; 9; 1)$	$A_3(1; 7; 3)$	$A_4(8; 5; 8)$.
34.	$A_1(3; 5; 4)$	$A_2(5; 8; 3)$	$A_3(1; 9; 9)$	$A_4(6; 4; 8)$.
35.	$A_1(2; 4; 3)$	$A_2(7; 6; 3)$	$A_3(4; 9; 3)$	$A_4(3; 6; 7)$.
36.	$A_1(9; 5; 5)$	$A_2(-3; 7; 1)$	$A_3(5; 7; 8)$	$A_4(6; 9; 2)$.
37.	$A_1(0; 7; 1)$	$A_2(4; 1; 5)$	$A_3(4; 6; 3)$	$A_4(3; 9; 8)$.
38.	$A_1(5; 5; 4)$	$A_2(3; 8; 4)$	$A_3(3; 5; 10)$	$A_4(5; 8; 2)$.
39.	$A_1(6; 1; 1)$	$A_2(4; 6; 6)$	$A_3(4; 5; 7)$	$A_4(7; 9; 6)$.
40.	$A_1(3; 8; 1)$	$A_2(5; 3; 9)$	$A_3(1; 3; 5)$	$A_4(4; 3; 1)$.
41.	$A_1(6; 6; 2)$	$A_2(5; 4; 7)$	$A_3(2; 4; 7)$	$A_4(7; 3; 0)$.
42.	$A_1(4; 2; 5)$	$A_2(0; 7; 2)$	$A_3(0; 2; 7)$	$A_4(1; 5; 0)$.
43.	$A_1(4; 4; 10)$	$A_2(4; 10; 2)$	$A_3(2; 8; 4)$	$A_4(9; 6; 4)$.
44.	$A_1(4; 6; 5)$	$A_2(6; 9; 4)$	$A_3(2; 10; 10)$	$A_4(7; 5; 9)$.
45.	$A_1(3; 5; 4)$	$A_2(8; 7; 4)$	$A_3(5; 10; 4)$	$A_4(4; 7; 8)$.
46.	$A_1(10; 6; 6)$	$A_2(-2; 8; 2)$	$A_3(6; 8; 9)$	$A_4(7; 10; 3)$.
47.	$A_1(1; 84\ 2)$	$A_2(5; 2; 6)$	$A_3(5; 7; 4)$	$A_4(4; 10; 9)$.
48.	$A_1(6; 6; 5)$	$A_2(4; 9; 5)$	$A_3(4; 6; 11)$	$A_4(6; 9; 3)$.
49.	$A_1(7; 2; 2)$	$A_2(5; 7; 7)$	$A_3(5; 3; 1)$	$A_4(2; 3; 7)$.
50.	$A_1(8; 6; 4)$	$A_2(10; 5; 5)$	$A_3(5; 6; 8)$	$A_4(8; 10; 7)$.

51. $A_1(7; 7; 3)$	$A_2(6; 5; 8)$	$A_3(3; 5; 8)$	$A_4(8; 4; 1)$.
52. $A_1(6; 6; 2)$	$A_2(5; 4; 7)$	$A_3(2; 4; 7)$	$A_4(7; 3; 0)$.
53. $A_1(1; 2; 7)$	$A_2(4; 2; 10)$	$A_3(2; 3; 5)$	$A_4(5; 3; 7)$.
54. $A_1(4; 2; 10)$	$A_2(1; 2; 7)$	$A_3(5; 3; 7)$	$A_4(2; 3; 5)$.
55. $A_1(2; 3; 5)$	$A_2(5; 3; 7)$	$A_3(1; 2; 7)$	$A_4(4; 2; 10)$.
56. $A_1(5; 3; 7)$	$A_2(2; 3; 5)$	$A_3(4; 2; 10)$	$A_4(1; 2; 7)$.
57. $A_1(1; 2; 5)$	$A_2(4; 0; 6)$	$A_3(2; 6; 5)$	$A_4(6; 4; 8)$.
58. $A_1(4; 3; 5)$	$A_2(1; 9; 7)$	$A_3(0; 2; 0)$	$A_4(5; 3; 10)$.
59. $A_1(2; 1; 6)$	$A_2(1; 4; 9)$	$A_3(2; 5; 8)$	$A_4(5; 4; 2)$.
60. $A_1(2; 1; 7)$	$A_2(3; 3; 6)$	$A_3(2; 3; 9)$	$A_4(1; 2; 5)$.
61. $A_1(2; -1; 7)$	$A_2(6; 3; 1)$	$A_3(3; 2; 8)$	$A_4(2; -3; 7)$.
62. $A_1(4; 7; 8)$	$A_2(-1; 13; 0)$	$A_3(2; 4; 9)$	$A_4(1; 8; 9)$.
63. $A_1(4; 2; 5)$	$A_2(0; 7; 2)$	$A_3(0; 2; 7)$	$A_4(1; 5; 0)$.
64. $A_1(4; 4; 10)$	$A_2(4; 10; 2)$	$A_3(2; 8; 4)$	$A_4(9; 6; 4)$.
65. $A_1(4; 6; 5)$	$A_2(6; 9; 4)$	$A_3(2; 10; 10)$	$A_4(7; 5; 9)$.
66. $A_1(3; 5; 4)$	$A_2(8; 7; 4)$	$A_3(5; 10; 4)$	$A_4(4; 7; 8)$.
67. $A_1(10; 6; 6)$	$A_2(-2; 8; 2)$	$A_3(6; 8; 9)$	$A_4(7; 10; 3)$.
68. $A_1(1; 84\ 2)$	$A_2(5; 2; 6)$	$A_3(5; 7; 4)$	$A_4(4; 10; 9)$.
69. $A_1(6; 6; 5)$	$A_2(4; 9; 5)$	$A_3(4; 6; 11)$	$A_4(6; 9; 3)$.
70. $A_1(7; 2; 2)$	$A_2(5; 7; 7)$.	$A_3(5; 3; 1)$	$A_4(2; 3; 7)$.
71. $A_1(8; 6; 4)$	$A_2(10; 5; 5)$	$A_3(5; 6; 8)$	$A_4(8; 10; 7)$.
72. $A_1(7; 7; 3)$	$A_2(6; 5; 8)$	$A_3(3; 5; 8)$	$A_4(8; 4; 1)$.

73. $A_1(6; 6; 2)$	$A_2(5; 4; 7)$	$A_3(2; 4; 7)$	$A_4(7; 3; 0)$.
74. $A_1(1; 2; 7)$	$A_2(4; 2; 10)$	$A_3(2; 3; 5)$	$A_4(5; 3; 7)$.
75. $A_1(4; 2; 10)$	$A_2(1; 2; 7)$	$A_3(5; 3; 7)$	$A_4(2; 3; 5)$.
76. $A_1(2; 3; 5)$	$A_2(5; 3; 7)$	$A_3(1; 2; 7)$	$A_4(4; 2; 10)$.
77. $A_1(5; 3; 7)$	$A_2(2; 3; 5)$	$A_3(4; 2; 10)$	$A_4(1; 2; 7)$.
78. $A_1(1; 2; 5)$	$A_2(4; 0; 6)$	$A_3(2; 6; 5)$	$A_4(6; 4; 8)$.
79. $A_1(4; 3; 5)$	$A_2(1; 9; 7)$	$A_3(0; 2; 0)$	$A_4(5; 3; 10)$.
80. $A_1(2; 1; 6)$	$A_2(1; 4; 9)$	$A_3(2; 5; 8)$	$A_4(5; 4; 2)$.
81. $A_1(2; 1; 7)$	$A_2(3; 3; 6)$	$A_3(2; 3; 9)$	$A_4(1; 2; 5)$.
82. $A_1(2; -1; 7)$	$A_2(6; 3; 1)$	$A_3(3; 2; 8)$	$A_4(2; -3; 7)$.
83. $A_1(4; 7; 8)$	$A_2(-1; 13; 0)$	$A_3(2; 4; 9)$	$A_4(1; 8; 9)$.
84. $A_1(6; 6; 2)$	$A_2(5; 4; 7)$	$A_3(2; 4; 7)$	$A_4(7; 3; 0)$.
85. $A_1(1; 2; 7)$	$A_2(4; 2; 10)$	$A_3(2; 3; 5)$	$A_4(5; 3; 7)$.
86. $A_1(4; 2; 10)$	$A_2(1; 2; 7)$	$A_3(5; 3; 7)$	$A_4(2; 3; 5)$.
87. $A_1(2; 3; 5)$	$A_2(5; 3; 7)$	$A_3(1; 2; 7)$	$A_4(4; 2; 10)$.
88. $A_1(5; 3; 7)$	$A_2(2; 3; 5)$	$A_3(4; 2; 10)$	$A_4(1; 2; 7)$.
89. $A_1(1; 2; 5)$	$A_2(4; 0; 6)$	$A_3(2; 6; 5)$	$A_4(6; 4; 8)$.
90. $A_1(4; 3; 5)$	$A_2(1; 9; 7)$	$A_3(0; 2; 0)$	$A_4(5; 3; 10)$.
91. $A_1(2; 1; 6)$	$A_2(1; 4; 9)$	$A_3(2; 5; 8)$	$A_4(5; 4; 2)$.
92. $A_1(2; 1; 7)$	$A_2(3; 3; 6)$	$A_3(2; 3; 9)$	$A_4(1; 2; 5)$.
93. $A_1(2; -1; 7)$	$A_2(6; 3; 1)$	$A_3(3; 2; 8)$	$A_4(2; -3; 7)$.
94. $A_1(4; 7; 8)$	$A_2(-1; 13; 0)$	$A_3(2; 4; 9)$	$A_4(1; 8; 9)$.

95. $A_1(10;6;6)$	$A_2(-2;8;2)$	$A_3(6;8;9)$	$A_4(7;10;3)$.
96. $A_1(1;84\ 2)$	$A_2(5;2;6)$	$A_3(5;7;4)$	$A_4(4;10;9)$.
97. $A_1(6;6;5)$	$A_2(4;9;5)$	$A_3(4;6;11)$	$A_4(6;9;3)$.
98. $A_1(7;2;2)$	$A_2(5;7;7)$.	$A_3(5;3;1)$	$A_4(2;3;7)$.
99. $A_1(8;6;4)$	$A_2(10;5;5)$	$A_3(5;6;8)$	$A_4(8;10;7)$.
100. $A_1(7;7;3)$	$A_2(6;5;8)$	$A_3(3;5;8)$	$A_4(8;4;1)$.

Завдання 6. Рівняння площини

Знайти рівняння площини, що проходить через точку M_0, перпендикулярно заданій прямій.

1. M_0 (1,1,2), $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{3}$; 2. M_0 (-1,2,2), $\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{-1}$;

3. M_0 (1,-1,2), $\frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$; 4. M_0 (1,1,-2), $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3}$;

5. M_0 (1,-1,2), $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{3}$; 6. M_0 (-1,-1,2), $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-3}$;

7. M_0 (-1,-1,2), $\frac{x}{-1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3}$; 8. M_0 (-1,1,-2), $\frac{x}{-1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{3}$;

9. M_0 (2,1,1), $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{2}$; 10. M_0 (2,1,1), $\frac{x}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{2}$;

11. M_0 (2,1,-1), $\frac{x}{1}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{2}$; 12. M_0 (2,-1,1), $\frac{x}{1}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-1}{-2}$;

13. M_0 (2,-1,-1), $\frac{x}{-1}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-1}{3}$; 14. M_0 (1,3,2), $\frac{x}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{2}$;

15. $M_0\,(2,1,3)$, $\frac{x}{-1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+1}{-3}$; 16. $M_0\,(1,2,3)$, $\frac{x}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{1}$;

17. $M_0\,(-1,2,3)$, $\frac{x}{-3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{4}$; 18. $M_0\,(1,-2,3)$, $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{-1}$;

19. $M_0\,(1,2,-3)$, $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$; 20. $M_0\,(1,-2,-3)$, $\frac{x}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{2}$;

21. $M_0\,(1,-3,2)$, $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z}{1}$; 22. $M_0\,(1,-3,-2)$, $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z}{-1}$;

23. $M_0\,(0,1,2)$, $\frac{x}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}$; 24. $M_0\,(1,0,2)$, $\frac{x}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}$;

25. $M_0\,(2,0,1)$, $\frac{x}{-3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-2}$; 26. $M_0\,(2,4,-3)$, $\frac{x-1}{3}=\frac{4}{3}=\frac{z-1}{2}$;

27. $M_0\,(3,-2,1)$, $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+4}{-2}$; 28. $M_0\,(-3,1,-2)$, $\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{2}$;

29. $M_0\,(2,-1,3)$, $\frac{x-5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-1}$; 30. $M_0\,(1,5,0)$, $\frac{x+2}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+5}{7}$;

31. $M_0\,(-1,3,4)$, $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{4}=\frac{z+1}{3}$; 32. $M_0\,(7,4,5)$, $\frac{x-5}{7}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{1}$;

33. $M_0\,(5,6,7)$, $\frac{x+3}{-1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{0}$; 34. $M_0\,(2,-1,-3)$, $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{-4}$;

35. $M_0\,(1,-1,2)$, $\frac{x-1}{-3}=\frac{y+4}{2}=\frac{z}{-1}$; 36. $M_0\,(-1,3,-2)$, $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z+3}{1}$;

37. $M_0\,(2,1,-1)$, $\frac{x}{-2}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-4}{5}$; 38. $M_0\,(1,-5,-3)$, $\frac{x+2}{4}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z+3}{1}$;

39. $M_0\,(3,0,-1)$, $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{3}$; 40. $M_0\,(3,1,-1)$, $\frac{x-3}{-1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-1}{-5}$;

41. M_0 (3,7,0), $\frac{x}{5}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+1}{3}$; 42. M_0 (1,4,-3), $\frac{x-3}{-3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{1}$;

43. M_0 (2,4,-1), $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+7}{-3}$; 44. M_0 (-2,1,4), $\frac{x}{4}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-2}{1}$;

45. M_0 (-1,2,2), $\frac{x+1}{-1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{-1}$; 46. M_0 (-3,-1,2), $\frac{x-3}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{2}$;

47. M_0 (2,3,0), $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-2}{3}$; 48. M_0 (1,2,-3), $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{-1}$;

49. M_0 (5,7,-3), $\frac{x}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{1}$; 50. M_0 (2,-1,3), $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{2}$;

51. M_0 (-2,3,1), $\frac{x-1}{3}=\frac{y+4}{5}=\frac{z-7}{1}$; 52. M_0 (2,-1,-5), $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{1}$;

53. M_0 (3,2,-4), $\frac{x+3}{-2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{3}$; 54. M_0 (3,-2,1), $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{4}$;

55. M_0 (-1,2,0), $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{3}$; 56. M_0 (3,2,1), $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{2}$;

57. M_0 (2,-3,4), $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z}{2}$; 58. M_0 (5,0,-4), $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-3}{-1}$;

59. M_0 (1,0,-5), $\frac{x}{3}=\frac{y+5}{1}=\frac{z-1}{-6}$; 60. M_0 (1,-6,0), $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z+3}{-2}$;

61. M_0 (2,-3,1), $\frac{x-4}{1}=\frac{y}{5}=\frac{z+1}{3}$; 62. M_0 (3,-1,1), $\frac{x-5}{2}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z-1}{3}$;

63. $M_{0}0$ (-3,2,-7), $\frac{x+1}{6}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z}{3}$; 64. M_0 (2,1,-4), $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-3}{-1}$;

65. M_0 (2,0,-5), $\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{7}$; 66. M_0 (3,2,-5), $\frac{x-3}{6}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{5}$;

67. M_0 (-1,2,6), $\frac{x+1}{4}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z}{2}$;

68. M_0 (4,1,-2), $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{5}=\frac{z+3}{2}$;

69. M_0 (2,-3,1), $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z}{5}$;

70. M_0 (-3,2,5), $\frac{x-3}{-1}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z-2}{4}$;

71. M_0 (-1,3,0), $\frac{x+2}{5}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$;

72. M_0 (2,-1,5), $\frac{x+1}{6}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{1}$;

73. M_0 (2,-5,3), $\frac{x-1}{7}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{-1}$;

74. M_0 (-1,4,8), $\frac{x+5}{-2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+1}{6}$;

75. M_0 (10,2,-3), $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{5}=\frac{z}{3}$;

76. M_0 (7,-3,2), $\frac{x}{4}=\frac{y-3}{7}=\frac{z+2}{2}$;

77. M_0 (8,-3,4), $\frac{x}{5}=\frac{y-2}{6}=\frac{z-1}{-2}$;

78. M_0 (-2,8,3), $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-6}=\frac{z-3}{5}$;

79. M_0 (-1,-1,3), $\frac{x-5}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z+2}{6}$;

80. M_0 (3,-1,2), $\frac{x+3}{4}=\frac{y}{-5}=\frac{z+1}{-2}$;

81. M_0 (4,1,3), $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z}{1}$;

82. M_0 (2,4,4), $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{-4}=\frac{z+1}{5}$;

83. M_0 (-1,4,2), $\frac{x+3}{-2}=\frac{y}{7}=\frac{z-1}{4}$;

84. M_0 (4,1,0), $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-2}{-1}$;

85. M_0 (0,5,3), $\frac{x-1}{5}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z}{3}$;

86. M_0 (4,-1,2), $\frac{x}{4}=\frac{y-3}{-6}=\frac{z-1}{7}$;

87. M_0 (2,5,1), $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-2}{6}=\frac{7}{5}$;

88. M_0 (3,-2,1), $\frac{x+5}{2}=\frac{y}{-5}=\frac{z-2}{3}$;

89. M_0 (1,4,-1), $\frac{x+4}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-1}$;

90. M_0 (4,1,5), $\frac{x}{5}=\frac{y+5}{-3}=\frac{z-1}{4}$;

91. M_0 (3,-1,2), $\frac{x+7}{-2}=\frac{y}{6}=\frac{z-1}{0}$;

92. M_0 (3,2,-7), $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+2}{4}$;

93. M_0 (4,1,-2), $\frac{x}{8}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{-1}$;

94. M_0 (2,0,5), $\frac{x+3}{4}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-1}{-3}$;

95. M_0 (3,-2,1), $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{-7}=\frac{z-3}{5}$; 96. M_0 (-1,3,2), $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{8}=\frac{z+3}{2}$;

97. M_0 (1,-6,3), $\frac{x-6}{-1}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{4}$; 98. M_0 (3,5.0), $\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z}{9}$;

99. M_0 (2,6,-2), $\frac{x+1}{6}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+3}{-2}$; 100. M_0 (4,7,-1), $\frac{x+5}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{6}$.

Завдання 7. Границя функції

Обчислити границі функцій

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-2x}{3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{5x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{2x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^x$.

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{|x|}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4+x^2-6}{2x^4-x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{arctgx}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to +\infty} x[\ln(x+1)-\ln x]$.

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+x+3}{x^4-12x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 ctg 2x}{\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to +\infty}(2x+1)[\ln(x+3)-\ln x]$.

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-2x^2-x}{x^4+3x^2+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-5)[\ln(x-3)-\ln x]$.

8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2\frac{x}{2}}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{x/(3x-3)}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x^3+1}{x^4+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x tg 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{2x/(x^2-4)}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x^2+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} x tg 3x ctg^2 2x$; г) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{2/(x-3)}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{4}}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{x/(1-x)}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+3)[\ln(x+2)-\ln x]$.

13. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^6-x^3+2x}{2x^6-1}$; б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^5 x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to2}(2x-3)^{3x/(x-2)}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x2}{6x^2+2x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctg 2x}{5x}$; г) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-4)[\ln(2-3x)-\ln(5-3x)]$.

15. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4-4x^2+3}{2x^4+1}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 8x}$; г) $\lim\limits_{x\to-\infty}(3-x)[(\ln(1-x)-\ln(2-x)]$.

16. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+4x-5}{4x^2-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{2x/(1-x)}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-9}{2x^2+9x+9}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+5}{x^3+2x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{7x}{arcctg 4x}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-4x)[\ln(2x-1)-\ln(2x+1)]$.

18. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-6x^2+2}{x^4+4x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x\sin 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x-3}\right)^{3x}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-6x-3}{x^3-2x^2+4}$; б) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$;

в) $\lim\limits_{x\to0} x ctg 5x$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-7)[\ln(3x+4)-\ln 3x]$.

20. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^5-5x^2+5}{5x^5+2x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 3x-1}{x tg 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-2x)[\ln(2x-1)-\ln(2x-1)]$.

21. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14x^2+3x}{7x^2+2x-8}$; б) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xtg3x}{\cos x-\cos^3 x}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+5)[\ln(x+5)-\ln x]$.

22. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-x^2+x}{x^5-2}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-x-6}{2x^2+x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-2}{x^2-x}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)[\ln(2x-3)-\ln(2x+1)]$.

23. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-2x+7}{3x^3-5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x-2}-2}{\sqrt{x+1}-2}$; г) $\lim\limits_{x\to3}(2x-5)^{2x/(x-5)}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+x-2}{3x^2+4x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+3)[\ln(x+1)-\ln(x-2)]$.

25. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5+6x-5}{x^5+2x^2-3}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2-5x-7}{3x^3+x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}xtg8x$; г) $\lim\limits_{x\to3}(2x-5)^{2x/(x-5)}$.

26. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2-5x-7}{3x^3+x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$; г) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)[\ln(3-2x)-\ln(4-2x)]$.

27. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x+2}{2x^4+3x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}{\sqrt{2x+3}-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{xtg3x}$; г) $\lim\limits_{x\to2}(2x-3)^{x/(x-2)}$.

28. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-4x+8}{2x^5-3x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{2x-2}-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^2-4x+3}$; г) $\lim\limits_{x\to -\infty}(2-3x)[\ln(1-3x)-\ln(2-3x)]$.

29. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-4x^2+2}{6x^4+2x^3-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+25}-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+5x+2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-5}{6x}\right)^{3x}$.

30. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+3x^2-x^5}{2x+3x^2-3x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}{5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin 2x ctg^2 x$; г) $\lim\limits_{x\to 2}(4x-1)[\ln(x+3)-\ln(x+4)]$.

31. а) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to -\infty}(5-4x)[(\ln(1-x)-\ln(2-x)]$.

32. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+2x-5}{6x^2-3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{5x\sin 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{2x/(1-x)}$.

33. а) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2+x-1}{4(1-x^2)-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+5}{x^3+2x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{arctg 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to +\infty}(3-4x)[\ln(2x-1)-\ln(2x+1)]$.

34. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x+1}{x+\sqrt[3]{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{2x\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x-3}\right)^{3x}$.

35. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+4x^2}{x^2+2}-x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} 5x\,ctg\,6x;$ г) $\lim\limits_{x\to +\infty} (2x-7)[\ln(3x+4)-\ln 3x].$

36. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4-\sqrt{x+16}}{2x};$ б) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}};$

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x-1}{x\,tg\,6x};$ г) $\lim\limits_{x\to +\infty} (2-7x)[\ln(2x-1)-\ln(2x-1)].$

37. а) $\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{x-64}{\sqrt[3]{x}-4};$ б) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15};$

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\,tg\,3x}{\cos x-\cos^3 x};$ г) $\lim\limits_{x\to +\infty} (3x+5)[\ln(x+5)-\ln x].$

38. а) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^5-x^2+x}{x^5-2};$ б) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-x-6}{2x^2+x-2};$

в) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{1+3x^2}-2}{x^2-x};$ г) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x+2)[\ln(2x-3)-\ln(2x+1)].$

39. а) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^5+x^3-x}{7x^2-x+4};$ б) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-6};$

в) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{2x-2}-2}{\sqrt{x+1}-2};$ г) $\lim\limits_{x\to 3} (2x-5)^{2x/(x-5)}.$

40. а) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3};$ б) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2+x-10}{x^2+x-6};$

в) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{3}{x^3-1}+\dfrac{1}{1-x}\right);$ г) $\lim\limits_{x\to \infty} (x+3)[\ln(x+1)-\ln(x-2)].$

41. а) $\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{x-64}{\sqrt[3]{x}-4};$ б) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8};$

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{4x^2};$ г) $\lim\limits_{x\to \infty} (2x+3)[\ln(x+2)-\ln x].$

42. а) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^5+x^3-x}{7x^2-x+4};$ б) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21};$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^5 x}{3x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{3x/(x-2)}$.

43. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x2}{6x^2+2x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arcctg\,4x}{9x}$; г) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x-4)[\ln(2-3x)-\ln(5-3x)]$.

44. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4-4x^2+3}{2x^4+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 8x}$; г) $\lim\limits_{x\to -\infty}(6-7x)[(\ln(1-x)-\ln(2-x)]$.

45. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x+1)(x+2)}{(7x+2)^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x\sin 5x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{2x/(1-x)}$.

46. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+5}{x^3+2x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{arcctg\,5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+4}{5x-5}\right)^{2x}$.

47. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-6x^2+2}{x^4+4x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x\sin 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x-3}\right)^{3x}$.

48. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-6x-3}{x^3-2x^2+4}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} x\,ctg\,5x$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}$.

49. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{xtg2x}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-2x)[\ln(2x-1)-\ln(2x-1)]$.

50. а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{x^3-1}+\dfrac{1}{1-x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}5xctg2x$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-4}\right)^{3x}$.

51. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}4xctg3x$; г) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{2x/(x-5)}$.

52. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2-5x-7}{3x^3+x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$; г) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)[\ln(3-2x)-\ln(4-2x)]$.

53. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x+2}{2x^4+3x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}{\sqrt{2x+3}-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{xtg3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{x/(x-2)}$.

54. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-4x+8}{2x^5-3x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3+1}{x^2-1}-2x\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^2-4x+3}$; г) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2-3x)[\ln(1-3x)-\ln(2-3x)]$.

55. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-4x^2+2}{6x^4+2x^3-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+25}-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x}{3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{x/(x-2)}$.

56. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$; б) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4x+3}{x^3-4x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}(6x+1)[\ln(x+3)-\ln(x+4)]$.

57. а) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to -\infty}(5-4x)[(\ln(1-x)-\ln(2-x)]$.

58. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{5x\sin 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{2x/(1-x)}$.

59. а) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^2+x-1}{4(1-x^2)-3}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-x+5}{x^3+2x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$; г) $\lim\limits_{x\to +\infty}(6-5x)[\ln(2x-1)-\ln(2x+1)]$.

60. а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{9x+1}{x+\sqrt[3]{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 8x}$; г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x-3}\right)^{3x}$.

71. а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1-5x}{4x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{5x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+6}{x-7}\right)^{x}$.

72. а) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$;   б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 7x}{8x}$;   г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x-1}{7x+1}\right)^{x}$.

73. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2}$;   б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{|x|}$;   г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$.

74. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^4-x+2}$;   б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{arctg 7x}$;   г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}$.

75. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1}$;   б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{4x^2}$;   г) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-9)[\ln(x+1)-\ln x]$.

76. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+x+3}{x^4-12x+4}$;   б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 ctg 6x}{\sin 5x}$;   г) $\lim\limits_{x\to +\infty}(6x+4)[\ln(x+3)-\ln x]$.

77. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-2x^2-x}{x^4+3x^2+2}$;   б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 10x-\cos 4x}{x^2}$;   г) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-5)[\ln(x-3)-\ln x]$.

78. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+4x-2}$;   б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2\dfrac{x}{3}}{4x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(7-2x)^{4x/(3x-3)}$.

79. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x^3+1}{x^4+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2xtg2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{2x/(x^2-4)}$.

80. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x^2+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}3xtg4xctg^2 6x$; г) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{4/(x-5)}$.

81. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-5x-7}{3x^3+x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{(1-x^3}+x)$; г) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x+2)[\ln(3-2x)-\ln(4-2x)]$.

82. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x+2}{2x^4+3x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}{\sqrt{2x+3}-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{xtg3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{x/(x-2)}$.

83. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-4x+8}{2x^5-3x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3+1}{x^2-1}-2x\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^2-4x+3}$; г) $\lim\limits_{x\to -\infty}(2-3x)[\ln(1-3x)-\ln(2-3x)]$.

84. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+25}-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+4x^2}{x^2+2}-x\right)$; г) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{x/(x-2)}$.

85. а) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-4})$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xtg3x}{\cos x-\cos^3 x}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}(3x+5)[\ln(x+3)-\ln(x+4)]$.

86. а) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{\pi-3x}$; г) $\lim\limits_{x\to-\infty}(4-9x)[(\ln(1-x)-\ln(2-x)]$.

87. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x+1}{6x+\sqrt[3]{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 9x}{6x\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{2x/(1-x)}$.

88. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-6x-3}{x^3-2x^2+4}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-1}{xtg2x}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-2x)[\ln(2x-1)-\ln(2x-1)]$.

89. а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{x^3-1}+\frac{1}{1-x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}4xctg3x$; г) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{2x/(x-5)}$.

90. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2-5x-7}{3x^3+x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{xtg3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{x/(x-2)}$.

91. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^5-4x+8}{2x^5-3x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3+1}{x^2-1}-2x\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{x/(x-2)}$.

92. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$; б) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4x+3}{x^3-4x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to -\infty}(5-4x)[(\ln(1-x)-\ln(2-x)]$.

93. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$; г) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x+2)[\ln(3-2x)-\ln(4-2x)]$.

94. а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^4-5x+2}{2x^4+3x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}{\sqrt{2x+3}-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^2-4x+3}$; г) $\lim\limits_{x\to -\infty}(2-3x)[\ln(1-3x)-\ln(2-3x)]$.

95. а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^4-4x^2+2}{6x^4+2x^3-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+25}-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin 2x\,ctg^2 x$; г) $\lim\limits_{x\to 2}(4x-1)[\ln(x+3)-\ln(x+4)]$.

96. а) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{5x\sin 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{2x/(1-x)}$.

97. а) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^2+x-1}{4(1-x^2)-3}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-x+5}{x^3+2x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{2x\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x-3}\right)^{3x}$.

98. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+4x^2}{x^2+2}-x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{xtg6x}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-7x)[\ln(2x-1)-\ln(2x-1)]$.

99. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+4x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-5x-7}{3x^3+x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{xtg3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{x/(x-2)}$.

100. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-4x+8}{2x^5-3x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3+1}{x^2-1}-2x\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-x^2-2x}{2x^2-5}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{3x/(x-3)}$.

Завдання 8. Похідна функції

Знайти похідні функцій

1. $y=3xe^{-3x^2}+2$; $y=\dfrac{5x}{\sin 3x+2}$; $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$;

$y=\ell n\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$; $y=2xe^{\sin 5x}$; $y=\sin\left(\ell n\left(1+e^{\sqrt{x}}\right)\right)$;

$y=arctg^3 5x$; $y=\cos^4\left(1+\sqrt{x}\right)$; $y=x^{tgx}$; $x\sin 2y+y^2=4$.

2. $y=\left(4-x^2\right)e^{\sqrt{x}}+\pi$; $y=\dfrac{1-3x^2}{\cos 5x+4}$; $y=\dfrac{\sqrt[3]{1-3x^2}}{5x+4}$; $y=\ell n\left(x+\dfrac{1}{x+4}\right)$;

$y=\left(3+x^5\right)e^{\sin x}$; $y=arctg\ell n\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+x\right)$; $y=\arcsin^4(1-x)$.

3. $y=x^2 2^{-x}+5$; $y=\dfrac{7x}{\cos 5x+2}$; $y=\dfrac{\sqrt{1-x}}{x^2+3}$;

$y=\ell n\left(3x-\sqrt{1-x}\right)$; $y=3xe^{\cos 4x}$; $y=\cos \ell n\left(1-3^{x^2}\right)$;

$y=\arcsin^5 3x$; $y=\sin^8\left(1+\sqrt[3]{x}\right)$; $y=x^{\sin x}$; $x\sin 2y=y^3$.

4. $y=5x^3 3^{2-x}+4$; $y=\dfrac{3-x}{\sin 2x-4}$; $y=\dfrac{\sqrt{1-2x_3}}{4-x}$;

$y=\ell n\left(\sqrt[3]{1-x^2}+x\right)$; $y=x^2e^{-\cos 3x}$; $y=\ell n\sin\left(4+e^{-x}\right)$;

$y=arctg^5(1-3x)$; $y=x^{\cos(1-x)}$; $y=\cos^3\left(1-e^{3x}\right)$;

$xtgxy-e^{-y}=0$.

5. $y=(1-4x)e^{-x^3}+\ell n2$; $y=\dfrac{\arcsin\left(1-5x^2\right)}{1-x}$; $y=\left(1-x^2\right)2^{\cos(1+x)}$;

$y=\dfrac{x^3+2}{\sqrt{x-x^2}}$; $y=\ell n\dfrac{1}{x^2+\sqrt{x+3}}$; $y=\sin \ell n\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$;

$y=\arccos^3 7x$; $y=\sin^5\left(e^x+x\right)$; $y=(x+7)^{\cos x}$; $\cos(x+y)+\dfrac{x}{y}=3$.

6. $y=(x+4)e^{1-x^2}+\sqrt{7}$; $y=\dfrac{3x+1}{\arcsin(1-x)}$; $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{3-x^3}$;

$y=\ell n\dfrac{1}{x+\sqrt{1-x}}$; $y=\left(3+x^2\right)e^{\arccos 2x}$; $y=arctg\ell n\left(e^{\frac{1}{x}}+5\right)$;

$y=\sin^3\left(1-e^{2x}\right)$; $y=(x+\sin x)^x$; $\cos(1-y)+\dfrac{x^3}{y}=10$.

7. $y=\arccos x(x-1)+\ell n2$; $\quad y=\dfrac{\cos(1-x)+5}{x^4}$; $\quad y=\dfrac{\sqrt{x^5+4}}{3x+2}$;

$y=x^3e^{arctg\,3x}$; $\quad y=\ell n\left(x^2-\sqrt[3]{1-x}\right)$; $\quad y=\ell n arctg\sqrt[5]{x}$; $\quad y=\sin^8 3x$;

$y=\ell n^7\left(1-e^{-x}\right)$; $\quad y=x^{\ell n\left(1-e^x\right)}$; $\quad y^3e^{xy}+\cos x=3$.

8. $y=x^2 4^{1-x^2}+\pi$; $\quad y=\dfrac{1+3x^2}{1+3\cos 5x}$; $\quad y=\dfrac{5-x}{\sqrt{1-3x^3}}$; $\quad y=x^3e^{\sin 3x}$;

$y=\ell n\left(\sqrt{5-x}+x^2\right)$; $\quad y=\cos tg\left(\sqrt{x}-x^2\right)$; $\quad y=\arcsin^5\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$;

$y=arctg\sqrt[3]{1-x}$; $\quad y=(1-x)^{\cos 3x}$; $\quad x\arccos y+y^2=3$.

9. $y=x^4e^{1-\sqrt{x}}+4$; $\quad y=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{(1+x)^3}$; $\quad y=\dfrac{\cos(1-5x)}{4+x^2}$; $\quad y=\ell n\left(\sqrt[3]{4+x^3}+1\right)$;

$y=x^5 2^{tg\,3x}$; $\quad y=\arccos\ell n\left(e^{-x}+x\right)$; $\quad y=arcctg^7(1-x)$; $\quad y=(\arcsin x)^{-x^2}$;

$y=\sin^8\left(1+2^{\sqrt{x}}\right)$; $\quad y\sqrt{x}+\cos(3x+y)=4$.

10. $y=3xe^{-3x^2}+2$; $\quad y=\dfrac{5x}{\sin 3x+2}$; $\quad y=\dfrac{\sqrt[3]{3-x^2}}{5+2x}$;

$y=\ell n\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$; $\quad y=2xe^{\sin 5x}$; $\quad y=\sin\ell n\left(1+e^{\sqrt{x}}\right)$; $\quad y=arctg^3 5x$;

$y=\cos^4\left(1+\sqrt{x}\right)$; $\quad y=x^{tg\,3x}$; $\quad x\sin 2y+y^2=4$.

11. $y=3x^5 4^{-7x^2}$; $\quad y=\dfrac{arctg(5-x)}{1+x^4}$; $\quad y=\dfrac{1-3x}{\sqrt[5]{(2x+4)^3}}$; $\quad y=\ell n\left(x+e^{-x^3}\right)$;

$y=2^{\ell n 3x}\left(1-3x^2\right)$; $\quad y=arctg\ell n\left(e^{2x}-4\right)$; $\quad y=\arcsin^3\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$;

$y=\cos^6(1-x)$; $\quad (3\sin x)^{\sqrt{x}}=y$; $\quad y\ell nx-x\ell ny=x+y$.

12. $y=2x^5e^{1-7x}+\sqrt{3}$; $y=\dfrac{1-7x^2}{\arccos 3x+4}$; $y=\dfrac{\sqrt{3-4x^2}}{1-5x}$;

$y=\ell n\dfrac{1}{4+\sqrt[3]{1+x^3}}$; $y=5^{\cos 4x}\left(1+4x^3\right)$; $y=\cos^3\left(4+e^{\sqrt{x}}\right)$;

$y=arcctg\ell n\left(1+4e^{-x^2}\right)$; $y=\left(\sqrt{x}\right)^{\sin(1-x)}$; $y=\ell n(x+y)+x^2$; $y=x7^{arctg^2\sqrt[3]{x}}$.

13. $y=4^{-x+3}\left(1-7x^3\right)+e^2$; $y=\dfrac{2x+7}{\cos\left(5-x^2\right)}$; $y=\dfrac{\sqrt[5]{x^3+4}}{x-7}$; $y=\ell n\left(x^3+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$;

$y=(4x-7)e^{\sin(1-x)}$; $y=\arcsin\ell n\left(2^{\sqrt{1-x}}+4\right)$; $y=tg^7\left(1-3x^2\right)$;

$y=\sin^5\left(1-e^{-x}\right)$; $y=\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^{arctg 5x}$; $\sqrt{x^2+y^2}+\ell n\dfrac{x}{y}=e^2$.

14. $y=(1-3x)4^{2x}+7$; $y=\dfrac{3+2x}{\sin(1-x)}$; $y=\dfrac{\sqrt[3]{4-5x}}{x^3+4}$; $y=x^2e^{\sin(1-2x)}$;

$y=\ell n\left(\sqrt[4]{1-x}+4x\right)$; $y=\arccos^2(1+3x)$; $y=tg\ell n\left(1-e^{x^2}\right)$;

$y=arctg^3\left(3^{\sqrt{x}}+x\right)$; $y=\left(4-7x^3\right)^{\ell nx}$; $\cos\left(x+y^2\right)+xy=3$.

15. $y=\left(x-1^2\right)e^{x^3}+7$; $y=\dfrac{\arcsin\left(4-2\sqrt{x}\right)}{\sqrt{1-5x^2}}$; $y=\dfrac{1+\sqrt[3]{x-x^2}}{1+4x^3}$;

$y=\ell n\left(\dfrac{1}{x+4}+\sqrt{x}\right)$; $y=3^{\sin 8x}\left(4+7x^4\right)$; $y=\cos^5\left(x^2-7x\right)$; $y=\ell n^7\left(e^{\sqrt[3]{x}}+x\right)$;

$y=\ell narctg\left(\sqrt[3]{x}+x\right)$; $y=\left(\sqrt{x}+1\right)^{2x^2+3}$; $y=arctg^7(2-x)$;

16. $y=\left(\sqrt{x}+3\right)e^{x^2}+7$; $y=\dfrac{(3x-4)^2}{\sqrt[3]{x}+7}$; $y=\dfrac{\cos\left(x+5x^3\right)}{7-x^4}$;

$y=\ell n\left(\sqrt[5]{1-x^3}+2\right)$; $y=x^3 3^{arctg 5x}$; $y=\dfrac{arctg(4-2x)}{x^2+2}$;

$y = arcctg^6(5-3x)$; $y = \sin^6\left(e^{\sqrt[3]{x}} + x\right)$; $y = arcctg^4 5x$;

$xy + \ell n(x+5y) = 3$.

17. $y = 2x^3 4^{1-x^8}$; $y = \dfrac{arctg\left(5x-3x^3\right)}{\sqrt{x}+4}$; $y = \dfrac{5-3x^2}{\sqrt{3x^3+4}}$;

$y = x^5 2^{\ell n(1-3x)}$; $y = \ell n\left(x + 3^{-\sqrt{x}} + 4\right)$; $y = \arccos \ell n\left(e^{-\sqrt{x^{2+4}}} + 1\right)$;

$y = \sin^7(3-8x)$; $y = ark\sin^4\left(1 + \dfrac{2}{x^2}\right)$; $y = (5tgx)^{1-\sqrt{x}}$;

$\cos\left(x^2 - y\right) + \dfrac{3x+1}{y} = 4$.

18. $y = \sqrt[3]{x^2} e^{1-3x^3} + 4$; $y = \dfrac{x-7x^2}{\sqrt{x^2-4x}}$; $y = \dfrac{\sin\left(3x-4x^2\right)}{5+x^3}$;

$y = tg^7(3-7x)$; $y = \ell n\left(\sqrt[3]{1-2x^2} + 1\right)$; $y = x^4 2^{frk\sin\sqrt{x}}$;

$y = arctg\ell n\left(e^{\sqrt[3]{x^2-x}} + 3\right)$; $y = \sin^4\left(e^{-x^3} + x^2\right)$; $y = (\arccos)^{\sqrt[3]{x}}$;

$\ell n\left(x^2 + y\right) + \dfrac{y}{x^2} = 3$.

19. $y = \left(2 - 7x^2\right)3^{-3x} + \sqrt{2}$; $y = \dfrac{1-5x}{\cos\left(3-2x^3\right)}$; $y = \dfrac{1-4x^4}{\sqrt{5-x}}$;

$y = \left(1-4x^2\right)^{\sqrt{x}}$; $y = \ell n\left(3x - \sqrt[3]{x^2}\right)$; $y = (3x-4)e^{\sin 4x}$; $y = \arccos^5\left(1-4x^2\right)$;

$y = arctg^4\left(e^{5x} + 3\right)$; $y = tg\ell n\left(5^{\sqrt{x}} + 4\right)$; $\cos\left(x^3 - y\right) + \dfrac{y}{x} = 1$.

20. $y=(1+7x)e^{3x+x^2}+7$; $y=\dfrac{\arcsin(1-7x)}{\sqrt{1-x^2}}$; $y=\dfrac{\sqrt{x+4}}{x^5+4x^3}$;

$y=\ell n\dfrac{1}{x+\sqrt[3]{1-x}}$; $y=(4-x^3)3^{\sin(1-3x)}$; $y=\cos\ell n\left(\sqrt[3]{x}-\dfrac{4}{x}\right)$;

$y=arctg^7 3x$; $y=\sin^3\left(e^{-\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$; $y=(\cos x)^{1-\sqrt{x}}$; $\ell n\left(x^3-y^3\right)=x$.

21. $y=(1-x^2)2^{1-\sqrt{x}}+4$; $y=\dfrac{1-7x}{1-2\sin x}$; $y=\dfrac{\sqrt[3]{1-x^2}}{3-4x}$; $y=x^4e^{\cos 5x}$;

$y=\ell n\left(\sqrt[3]{1-4x}+x\right)$; $y=arctg^4\left(e^{7x}+2\right)$; $y=arctg^5(1-x)$;

$y=\ell n^7\left(1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$; $y=\left(1-4x^2\right)^{\sin 3x}$; $x^3\arccos y-y^4=\sqrt{e}$.

22. $y=(5-3x)3^{x^2}+7$; $y=\dfrac{\sin\left(5x-x^2\right)}{1-x}$; $y=\dfrac{5x+4}{\sqrt[3]{x}+4x}$;

$y=\cos^3\left(e^{\sqrt{x}}+4\right)$; $y=\ell n\left(5x-\sqrt[3]{x^2-7x}\right)$; $y=\ell n\sin\left(5-e^{-\sqrt{x}}\right)$;

$y=x^5e^{arctgx}$; $y=\arccos^7(1-5x)$; $y=\left(\sqrt{x}\right)^{\ell nx}$; $\dfrac{x}{y^2}+arctgxy=1$.

23. $y=5xe^{x^3+4}+\pi$; $y=\dfrac{arctg(5-x)}{x^2+4}$; $y=\dfrac{15+x^3}{\sqrt{x-7x^2}}$; $y=\ell n\dfrac{x}{1-\sqrt[3]{x}}$;

$y=\arccos\ell n\left(7-\sqrt[3]{x}\right)$; $y=x^4 2^{\cos\sqrt{x}}$; $y=arcctg^4 5x$; $y=\sin^9\left(3-e^{\sqrt{x}}\right)$;

$y=(x+\cos 3x)^{x^2}$; $\sin(x-y)+x^3y=3$.

24. $y=(1-x^3)e^{5x}+7$; $y=\dfrac{tg(1-3x)}{x^3+4}$; $y=\dfrac{\cos\sqrt{x}+4}{\sqrt[3]{x}+x}$;

$y=\sin^7\left(1-x^2\right)$; $y=x^7\,7\arcsin 5x$; $y=\ell n\dfrac{x}{\sqrt[6]{1+5x}-x}$;

$y=\ell n\cos\left(x-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$; $y=\ell n^4\left(1+e^{5x}\right)$; $\left(arctg\left(1-\sqrt{x}\right)\right)^x=y$;

$x^3e^{x+y}-y=4$.

25. $y=(5x-4)e^{\frac{1}{\sqrt{x}}+3}$; $y=\frac{(2x+4)^5}{\sqrt[4]{x^3}}$; $y=\frac{5+4x^3}{tg(1-7x)}$; $y=x^3 5^{\cos(1-x)}$;

$y=\ell n\left(\sqrt[3]{1-x^2}-x\right)$; $y=\arcsin\ell n\left(e^{1-5x}-\frac{1}{x}\right)$; $y=\cos^7\left(e^{\sqrt{x}}+3x\right)$;

$y=\sin^9\left(1+3^{\sqrt{x}}\right)$; $y=[\cos(1-x)]^x$; $\sqrt{y}\cdot x-\sin(5-x)=0$.

26. $y=\left(3+2x^2\right)e^{\sqrt{3-x}}+4$; $y=\frac{4-5x}{\cos 3x-7}$; $y=\frac{\sqrt[3]{4-7x}}{3x^2+7}$;

$y=\left(4-x^3\right)e^{\sin(2+4x)}$; $y=arctg\ell n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+2x\right)$; $y=\ell n\left(5x-\frac{1}{1-x}\right)$;

$y=\arcsin^3(2+3x)$; $y=\sin^4\left(e^{3x}-1\right)$; $y=(tgx)^{3-\sqrt{x}}$; $\cos(x+y)+\sqrt[4]{y=0}$.

27. $y=x^7 2^{5x}+7\pi$; $y=\frac{4x^2}{\cos(1-x)+4}$; $y=\frac{\sqrt{1-8x}}{x^3+1}$;

$y=\ell n\left(7x+\sqrt[3]{x^2}\right)$; $y=4xe^{\cos 9x}$; $y=\cos\ell n\left(1-3^{x^4}\right)$;

$y=\arcsin^3(1-7x)$; $y=\sin^4\left(1-5x^2\right)$; $y=(4-5x)^{\sin 2x}$;

$y^2\sin 5x+xy=4$.

28. $y=3x^5 3^{-x^2}-\pi^3$; $y=\frac{5-2x}{\sin 3x-1}$; $y=\frac{\sqrt{1-3x^2}}{3-2x}$; $y=3x^3\cos^{4x}$;

$y=\ell n\left(\sqrt[3]{1-5x^2}-x\right)$; $y=\ell n\sin\left(5-e^{3x}\right)$; $y=arctg^3(1+4x)$;

$y=\cos^5\left(4+e^{2x}\right)$; $y=x^{\cos(5-2x)}$; $(x+1)tg\left(y^2x\right)+e^y=0$.

29. $y=(3-2x)e^{-x^3}+\sqrt{3}$; $y=\dfrac{\arcsin(3+4x^2)}{1+3x}$; $y=\ell n\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+4}}$;

$y=\dfrac{3x^2+4}{\sqrt{2x+x^2}}$; $y=(1-5x^2)2^{\cos(1-x)}$; $y=\sin\ell n\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$; $y=\cos^4 3x$;

$y=\arcsin^3(e^{-x}+2x)$; $y=(1-x)^{\cos 3x}$.

30. $y=(3+2x)5^{1-x^2}+4$; $y=\dfrac{\sin(1-7x)}{5-x^2}$; $y=\dfrac{\sqrt[3]{1+5x}}{3x^2-2}$; $y=\ell n\left(5x-\sqrt[3]{x^2}\right)$;

$y=x^4e^{\arcsin 2x}$; $y=\ell n\cos\left(3-e^{\sqrt{x}}\right)$; $y=(tg3x)^{x^2}$; $y=\arccos^8 5x$;

$y=\sin^4\left(x^2-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$; $\dfrac{x}{y^2}+arctg(x+y)=\pi^2$.

31. $y=(2-x)e^{3+2x^2}-4$; $\cos(x-y)+\dfrac{y^3}{x}=3$; $y=\dfrac{5x+4}{\arcsin(3-2x)}$;

$y=\ell n\dfrac{3}{2x-\sqrt{3-x^2}}$; $y=\dfrac{\sqrt{3+x^2}}{5-x^4}$; $y=(x^2-5)e^{\arccos 3x}$; $y=\arcsin^5 2x$;

$y=arctg\ell n\left(e^{\sqrt{x}}-4\right)$; $y=\sin^9\left(3-e^{5x}\right)$; $\cos(3+y)-\dfrac{y}{x^3}=4$; $y=(tg2x)^{\ell nx}$.

32. $y=(1+7x)e^{4x}+\ell n2$; $y=\dfrac{\cos(1-x)+4}{x^2}$; $y=x^2e^{arctg(1-x)}$;

$y=\dfrac{\sqrt{x^3-7x}}{2-x}$; $y=\ell n\left(x^4-\sqrt[3]{1+x}\right)$; $y=\sin^6(5-3x)$; $y=\ell n^3\left(4-e^{3x}\right)$;

$y=\ell n\arccos\left(5-\sqrt[3]{x}\right)$; $y=x^{\ell n\left(5-e^{-3x}\right)}$; $(x+1)^2e^{xy}-\cos(1-y)=0$.

33. $y=x^3 4^{1+x^2}-4$; $y=\dfrac{5-4x}{1-\cos 2x}$; $y=\ell n\left(\sqrt{3-2x}-x^2\right)$; $y=\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{4+2x}$;

$y=(1-x)^8e^{\sin 2x}$; $y=\cos tg\left(\sqrt[3]{x}-x\right)$; $y=arctg^3(2+3x)$; $y=\arcsin^3\left(1-\sqrt{x}\right)$;

$y=(1-3x)^{\sin 5x}$; $(x+2)\arcsin y+\dfrac{x}{y}=3$.

34. $y = x^3 e^{4-2\sqrt{x}} + \ell n^2 3$; $y = \dfrac{\sqrt[3]{(1-x)^2}}{x^3+3}$; $y = \dfrac{\cos(2-3x)}{4-2x^2}$;

$y = x^8 2^{tg5x}$; $y = \ell n\left(\sqrt[3]{2-x^3} - 1\right)$; $\arccos \ell n\left(e^{2-x}\right)$; $y = \arccos^6$;

$y = \sin^4\left(3 - 2^{-3x}\right)$; $y = [\arcsin(2-x)]^{-x^2}$; $x\sqrt{y} + \cos(x+y) = 8$.

35. $y = 7xe^{2x^2} + 4$; $y = \dfrac{3x-1}{\sin 12x + 3}$; $y = \dfrac{\sqrt{4x^2-2}}{3x-1}$; $y = 6xe^{\sin 3x}$;

$y = \ell n\left(3x - \sqrt{x - x^2}\right)$; $y = \sin \ell n\left(7 - e^{-\sqrt[3]{x}}\right)$; $y = \cos^6\left(3 - 2\sqrt{x}\right)$;

$y = arctg^3 5x$; $y = (x+1)^{tg3x}$; $y + (x-2)\sin 3y = \sqrt{\pi}$.

36. $y = 8x^5 4^{-2x^2}$; $y = \dfrac{arctg(3-2x)}{3-4x^4}$; $y = \dfrac{4+3x}{\sqrt[5]{(x-1)^2}}$; $y = \ell n\left(5x - e^{-x^2}\right)$;

$y = 2^{\ell n 7x}\left(1 - 6x^2\right)$; $y = arctg \ell n\left(e^{5x} + 4\right)$; $y = \cos^5(3-2x)$;

$y = \arcsin^3\left(1 + \dfrac{3}{x}\right)$; $y = (\sin 5x)^{\sqrt{x}}$; $(y+1)\ell n 3x - x\ell n y = 0$.

37. $y = 5x^3 4^{1-x^8}$; $y = \arccos \ell n\left(e^{\sqrt{3-2x^2}} + 4\right)$; $y = \dfrac{arctg\left(3x - 4x^3\right)}{\sqrt{x}+7}$;

$y = \dfrac{4-3x^2}{\sqrt{5x^{3-4}}}$; $y = \ell n\left(x + 3^{5-3\sqrt{x}}\right)$; $y = 2^{\ell n(4+3x)} x^5$; $y = (3tgx)^{2+\sqrt{x}}$;

$y = \sin^7(5-3x)$; $y = \arcsin^4\left(3 - \dfrac{4}{x^2}\right)$; $\cos\left(x^2 - 5y\right) + \dfrac{x+3}{y} = 4$.

38. $y = \sqrt[3]{x^2} e^{5-2x^3} + 4$; $y = \dfrac{2x+4x^2}{\sqrt{x^2-7x}}$; $y = arctg \ell n\left(e^{\sqrt[3]{3x^2+x}} - 1\right)$;

$y = \dfrac{\sin\left(5x+4x^2\right)}{3-x^3}$; $y = \ell n\left(\sqrt[3]{5+2x^2} + 1\right)$; $y = x^4 2^{\arcsin\left(\sqrt{x}+2\right)}$; $y = tg^7(5-2x)$;

$y = \sin^4\left(e^{3x^2} - x^2\right)$; $y = (\arccos 3x)^{1+\sqrt[3]{x}}$; $\ell n\left(x^3 - 7y\right) + \dfrac{y}{2x} = 1$.

39. $y=\left(1-2x^2\right)3^{2x}+1$; $y=\dfrac{5-x}{os\left(2-3x^3\right)}$; $y=\arccos^5\left(2-x^2\right)$;

$y=\dfrac{2+5x^4}{\sqrt{3-2x}}$; $y=\ell n\left(5x+\sqrt[3]{x^2}\right)$; $y=\left(2x-4\right)e^{\sin 5x}$; $y=arctg^4\left(e^{7x}+2\right)$;

$y=tg\ell n\left(e^{-\sqrt{x}}+1\right)$; $y=\left(3+x^2\right)^{\sqrt{x}}$; $\cos\left(x^3+y\right)+\dfrac{y}{2x}=4$.

40. $y=\left(2+3x\right)e^{3x-x^2}+\sqrt{7}$; $y=\dfrac{\arcsin\left(3+\sqrt{3x}\right)}{\sqrt{1+x^2}}$; $y=\ell n\dfrac{1}{3x+\sqrt[3]{1+x}}$;

$y=\dfrac{\sqrt{2x-4}}{x^5-2x^3}$; $y=\left(2-x^3\right)3^{\sin(2+x)}$; $y=\cos\ell n\left(\sqrt[3]{2x}-\dfrac{5}{x}\right)$; $y=arctg^7 5x$;

$y=\sin^3\left(e^{\sqrt{x}}+\dfrac{2}{x}\right)$; $y=\left(\cos 2x\right)^{1+\sqrt{x}}$; $\ell n\left(x^3+2y^2\right)+5x=1$.

41. $y=\left(\left(1+x^2\right)\right)2^{1+\sqrt{x}}$; $y=\dfrac{3-7x}{1+2\sin x}$; $y=\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}}{3+2x}$; $y=2x^4e^{\cos 5x}$;

$y=\ell n\left(\sqrt[3]{2+4x}-x\right)$; $y=\sin arctg\left(2\sqrt{x}-1\right)$; $y=arctg^5\left(2+x\right)$;

$y=\ell n^7\left(3-\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)$; $y=\left(2-4x^2\right)\cos 2x$; $x^3\arccos 5y-y^4=3$.

42. $y=\left(5-2x\right)3^{x^2}$; $y=\dfrac{\sin\left(x-7x^2\right)}{4+2x}$; $y=\dfrac{2x-x^2}{\sqrt[3]{x}-x}$;

$y=\ell n\left(4x-\sqrt[3]{x^2-x}\right)$; $y=\ell n\sin\left(3-e^{5\sqrt{x}}\right)$; $y=\left(1-x\right)^5e^{arctgx}$;

$y=\arccos^8\left(2-6x\right)$; $y=\cos^3\left(e^{2\sqrt{x}}-1\right)$; $y=\left(\sqrt{x}\right)^{\ell n(x+1)}$;

$y=\dfrac{3x}{y^2}-5arctg\left(xy\right)=0$.

43. $y=7xe^{x^{3+5}}+8$; $y=\dfrac{arctg\left(5+3x\right)}{x^2-3}$; $y=\dfrac{4-3x^3}{\sqrt{8x^2+x}}$;

$y=\ell n\dfrac{5x}{3-2\sqrt[3]{x}}$; $y=\arccos\ell n\left(4+3\sqrt{x}\right)$; $y=\left(1-x\right)^4e^{\cos\sqrt{5x}}$;

$y = arcctg^4 5x$; $y = \sin^9\left(4 - e^{-\sqrt{x}}\right)$; $y = (5x - \cos 2x)^{x^2}$; $\sin(x - 5y) + x^3(1 - y) = 0$.

44. $y = \left(3 + x^3\right)e^{5x} + \ell n 3$; $y = \dfrac{tg(7 - 3x)}{4 - 2x^3}$; $y = \dfrac{\cos\sqrt{3x} - 5}{\sqrt[3]{7x} + 3x}$;

$y = \ell n \dfrac{1}{\sqrt[6]{7 - x^2 + x}}$; $y = x^3 7^{\arcsin(5 - x)}$; $y = \ell n \cos\left(5x + \dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}\right)$;

$y = \sin^9\left(2 - 3x^2\right)$; $y = \ell n^4\left(4 - e^{2 - x}\right)$; $y = \left(arctg\left(1 - \sqrt{x}\right)\right)^{x-1}$;

$y = \left(1 - x^3\right)e^{x - y}$.

45. $y = (x + 7)e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}$; $y = \dfrac{(x - 4)^5}{\sqrt[4]{2x^3}}$; $y = \dfrac{2 - 3x^3}{tg(3 + 2x)}$; $y = \ell n\left(\sqrt[3]{2 - x^3} + x\right)$;

$y = x^3 5^{\cos(3 - x)}$; $y = \arcsin \ell n\left(e^{3 - x} + \dfrac{1}{x}\right)$; $y = \cos^7\left(e^{-\sqrt{x}} - 5x\right)$;

$y = \sin^3\left(6 + 3^{-\sqrt{x}}\right)$; $y = (ctg(2 - x))^{3x}$; $\sqrt{y(x + 1)} - \sin(y - 2x) = 0$.

46. $y = (x + 3)^2 2^x + \pi$; $y = \dfrac{2x}{\cos 3x + 1}$; $y = \dfrac{\sqrt{1 + x}}{x^2 - 7}$; $y = 3xe^{\cos 5x}$;

$y = \ell n\left(5x + \sqrt{1 + x}\right)$; $y = \cos \ell n\left(3 - 3^{-x^2}\right)$; $y = \arcsin^5 8x$; $y = \sin^8\left(3 - \sqrt[3]{x}\right)$;

$y = x^{\sin 6x}$; $(x + 1)\sin 2y - \dfrac{y}{x} = 4$.

47. $y = 8x^3 3^{x - 2} + \pi$; $y = \dfrac{5 - x}{\sin 3x - 1}$; $y = \dfrac{\sqrt{1 + 3x^3}}{1 - 4x}$;

$y = \ell n\left(\sqrt[3]{3 - x^2} + 2x\right)$; $y = 2x^2 e^{\cos(3x - 2)}$; $y = \ell n \sin\left(3 - e^{5x}\right)$;

$y = arctg^5(4 + 3x)$; $y = \cos^3\left(7 + e^{-2x}\right)$; $y = (x - 1)^{\cos x}$;

$ytg(xy) - e^x = 3$.

48. $y = 2xe^{3x+x^2} + 5$; $y = \dfrac{5+x}{\sin 7x + 3}$; $y = \dfrac{\sqrt{2-x^3}}{7+5x}$;

$y = \ell n^8 \dfrac{1}{e^{-x^2} + 7}$; $y = 3x^2\, 2^{\sin(3-x)}$; $y = \ell n\left(\sqrt[3]{5+x^2} - 7x\right)$;

$y = \arccos^8 15x$; $y = \sin^5\left(3e^x - 7x\right)$; $y = \left(x + 9^{\cos 7x}\right)$;

$\cos(2x - 3y) + \dfrac{2x}{y} = 0$.

49. $y = \left(5 - x^2\right)e^{\sqrt{2x}} - 4$; $y = \dfrac{3-x^2}{\cos 7x - 4}$; $y = \dfrac{\sqrt[3]{4-7x^2}}{3x+8}$;

$y = \ell n\left(3x - \dfrac{2}{x+1}\right)$; $y = \left(5 - x^5\right)e^{\sin(3-x)}$; $y = (tg5x)^{3-\sqrt{x}}$;

$\cos(3x - y) - \sqrt[3]{2y} = 0$.

50. $y = (3+2x)5^{x^3} - \sqrt{8}$; $y = \dfrac{\sin(3+2x)}{3(x-1)^2}$; $y = (x-7)^3 e^{\arcsin 5x}$;

$y = \dfrac{\sqrt[3]{3+2x}}{(x-1)^2 - 7}$; $y = \ell n\left(12x + \sqrt[3]{x^3 + 4}\right)$; $y = \sin^5\left(2x - \dfrac{3}{x^2}\right)$;

$y = \ell n \cos\left(5 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)$; $y = \arccos^5 2x$; $y = (tg8x)^{3+x^2}$;

$\dfrac{x^2}{2y} + arctg(x+y) = 1$.

51. $y=(2-3x)8^{-x^3}+\sin 1$; $y=\dfrac{\sin(3-4x)}{5x^2}$; $y=\dfrac{\sqrt[3]{3-2x}}{x^2-4}$;

$y=x^3e^{\sin 7x}$; $y=\ell n\left(5x-7\sqrt{x^3+3}\right)$; $y=\ell n\cos\left(1-e^{\frac{5}{\sqrt{x}}}\right)$;

$y=\arccos^5(1-6x)$; $y=\sin^5\left(\sqrt{5x}-\dfrac{7}{x^2}\right)$; $y=(tg3x)^{5x-x^3}$

52. $y=(5-x^2)e^{\sqrt{2x}}-4$; $y=\dfrac{3-x^2}{\cos 7x-4}$; $y=\dfrac{\sqrt[3]{4-7x^2}}{3x+8}$;

$y=\ell n\left(3x-\dfrac{2}{x+1}\right)$; $y=\arcsin^7(1-8x)$; $y=\sin^3\left(e^{\sqrt{1-x}}\right)$;

$y=(5x-\sin 2x)^{3x}$; $\cos(x-y)\dfrac{x^4}{y^2}=4$.

53. $y=(4-7x)e^{5x}+\sin 3$; $y=\dfrac{\cos(2-4x)-9}{3x^5}$; $y=\ell n\left(5x^2-\sqrt[7]{3-2x}\right)$;

$y=(1-x)^3e^{arctg 5x}$; $y=\dfrac{\sqrt{x^4-7}}{5x+2}$; $y=\ell n\arccos\left(3+7\sqrt{x}\right)$;

$y=\sin^8(3-7x)$; $y=\ell n^6\left(5+3e^{-2x}\right)$; $y=x^{\ell n(3-x)}$; $y^3e^{xy}+\cos x=2$.

54. $y=\sin^8(8+7x)$; $y=\ell n^7\left(5-\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\right)$; $y=\dfrac{3-x^2}{4-9\cos^5(x-3)}$;

$y=(x-3^2)4^{x^3}+\sin 5$; $y=\dfrac{3+12x}{\sqrt{1-9x^4}}$; $y=\cos tg\left(\sqrt{3}x-x^5\right)$;

$y=\arcsin\sqrt{4+12x}$; $y=(x-4)e^{\sin 5x}$; $y=(4-2x)^{\cos 7x}$;

$(x-1)\arcsin y+xy=0$.

55. $y=7x^8e^{3-x^5}+\pi^3$; $y=\dfrac{\arcsin\left(4-5x^3\right)}{4-8x}$; $y=\ell n\dfrac{1}{x^3+\sqrt{3x^2-7}}$;

$y=\dfrac{5x^2+7x}{\sqrt{4+3x^5}}$; $y=\left(4-x^3\right)2^{\cos 8x}$; $y=\sin \ell n\left(\sqrt[6]{x^2}-3x^3\right)$; $y=(3+4x)^{\cos 7x}$;

$y=\arccos^6(1-5x)$; $y=\sin^9\left(e^{3x}-x^3\right)$; $\cos(y+12x)-\dfrac{3+x}{y}=4$.

56. $y=\left(3+x^2\right)e^{\sqrt[4]{x}}+7$; $y=\dfrac{5-4x}{\cos 2x+7}$; $y=\dfrac{\sqrt[3]{1+5x^2}}{7x+8}$;

$y=\ell n\left(5x-4\sqrt{x}\right)$; $y=\left(5+x^4\right)e^{\sin(3-7x)}$; $y=arctg\ell n\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+5x\right)$;

$y=\sin^4\left(e^{1-x}+3\right)$; $y=\arcsin^7(3-5x)$; $y=(tg3x)^{1-5\sqrt{x}}$;

$\cos\left(3x^2-y\right)+\sqrt{y}=0$.

57. $y=x^5 2^{3x}+4$; $y=\dfrac{5x+3}{\cos 2x-2}$; $y=\dfrac{\sqrt{2-3x}}{x^2+7x}$; $y=4xe^{\cos 9x}$;

$y=\ell n\left(8x-\sqrt{1-3x}\right)$; $y=\arcsin^{15}2x$; $y=\sin^6\left(1-5\sqrt{x}\right)$; $y=(3x)^{\sin 4x}$;

$y=\arcsin \ell n^2\left(e^{3x}+x\right)$; $(y+1)\sin 5y+x^6=2$.

58. $y=4x^7 3^{5+2x}-\sqrt{3}$; $y=\dfrac{5+4x}{\sin 7x-8}$; $y=3(1-x)^2e^{-\cos 2x}$;

$y=\dfrac{\sqrt{1+7x^4}}{5+9x}$; $y=\ell n\left(\sqrt[3]{1+2x^2}-4\right)$; $y=\ell n\sin\left(1-e^{-3x}\right)$; $y=(3-x)^{\cos x}$;

$y=atctg^4(2+5x)$; $y=\cos^6\left(4+e^{3-x}\right)$; $ytg(x+y)+e^x=1$.

59. $y=(2+8x)e^{-3x}-\ell n7$; $y=\dfrac{\arcsin(3+4x^2)}{3-2x}$; $y=\sin\ell n\left(\dfrac{1}{x-1}+\sqrt[3]{x}\right)$;

$y=\dfrac{3x^2+7}{\sqrt{2x+x^2}}$; $y=\ell n\dfrac{1}{2x-\sqrt{1-x^2}}$; $y=(3-x^3)2^{\cos(3-2x)}$; $y=\arccos^2 3x$;

$y=\sin^4(e^{3x}-x^2)$; $y=x^{\cos(3-4x)}$; $\cos(y-x)+\dfrac{y}{x}=1$.

60. $y=(5+3x)5^{1-x^2}+\ell n^3$; $y=\dfrac{\sin(3-8x)}{1-5x^2}$; $y=\ell n\cos\left(2-e^{\sqrt[3]{x}}\right)$;

$y=\dfrac{\sqrt[3]{2-4x}}{x^2-2x}$; $y=\ell n\left(5x-\sqrt{x^2+4}\right)$; $y=\arccos^6 2x$; $y=(tg3x)^{3+x^2}$;

$y=x^2e^{\arcsin 3x}$; $y=\sin^6\left(\sqrt[3]{x}-x^2\right)$; $\dfrac{y^2}{x}-arctgy=7$.

61. $y=(2x-4)e^{2-5x^2}-14$; $y=\dfrac{2x-4}{\arcsin(2-3x)}$; $y=\ell n\dfrac{1}{2x+\sqrt{3+4x}}$;

$y=\dfrac{\sqrt{3-4x^2}}{5-3x^2}$; $y=(4-x^2)e^{arcc0s5x}$; $y=\arcsin^3(7-x)$;

$y=\sin^6(3+e^{5x})$; $y=arctg\ell n\left(e^{\sqrt[3]{x^2}}+1\right)$; $y=(3x-\sin 2x)^x$;

$\cos(3+y^2)-\dfrac{x}{y}=8$.

62. $y=(2-7x)e^{1-5x}-\ell n7$; $y=\dfrac{\cos(2+4x)+1}{x^2}$;

$y=\ell n\arccos\left(3-\sqrt{x^2}\right)$; $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^6-1}}{5-3x}$; $y=\ell n\left(x-\sqrt[3]{1+x}\right)^2$;

$y=\sin^3(1-7x^2)$; $y=x^{\ell n(3-7^x)}$; $y=x^4e^{arctg(5-2x)}$; $y=\ell n^5(4+e^{1-6x})$;

$(1-y)^2e^{xy}-\cos x=3$.

63. $y=(x-1)^3 4^x-\ell n2$; $y=\dfrac{1-7x^2}{1-2\cos 3x}$; $y=\dfrac{3-2x}{\sqrt[3]{3+5x}}$;

$y=(3-x)^2 e^{\sin 5x}$; $y=\ell n\left(\sqrt{3+5x^2}-2x\right)$; $y=\cos t\left(x-\sqrt[3]{x^2}\right)$;

$y=arctg^7(3+2x)$; $y=\arcsin^6\left(1-\sqrt[3]{x}\right)$; $y=(5-2x)^{\cos 5x}$;

$y^3+(x+1)\arcsin y=2$.

64. $y=x^5e^{3+\sqrt{x}}-6$; $y=\dfrac{\sqrt[3]{(2-x)^2}}{(x+8)^4}$; $y=\dfrac{\cos(5-4x)}{7-x^8}$; $y=x^9 2^{tg 6x}$;

$y=\ell n\left(\sqrt[3]{5-2x}-x\right)$; $y=\arccos \ell n\left(e^{1-x}-x^2\right)$; $y=arctg^3\left(1+x^4\right)$;

$y=\sin^4\left(1-2^{\sqrt{x}-1}\right)$; $y=(\arcsin(2-x))^{x^2}$; $(y-4)\sqrt[3]{x}+\cos 5y=3$.

65. $y=5xe^{-x^2}-7$; $y=\dfrac{3x-1}{\sin 5x-4}$; $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{2x-3}$;

$y=\ell n\left(x^2-\sqrt{5x^2+1}\right)$; $y=\sin \ell n\left(1-e^{3x^2}\right)$; $y=\sin \ell n\left(3+e^{3x}\right)$;

$y=arctg^6(3-x)$; $y=\cos^4\left(1-2\sqrt{x}\right)$; $y=x^{tg 5x}$; $x^5\sin 6y+y=1$.

66. $y=\left(\sqrt{x}+5\right)^{e^{(x+1)^2}}+\pi$; $y=\dfrac{(3x+1)^2}{\sqrt[3]{x}+12}$; $y=\arcsin \ell n\left(e^{-\sqrt{x}}-5x\right)$;

$y=\dfrac{\cos\left(3x^2-2x\right)}{5+x^4}$; $y=\ell n\left(\sqrt[5]{5-2x^3}+1\right)$; $y=x^3 3^{arctg(1-5x)}$;

$y=(\arcsin 3x)^{\sqrt[3]{x}}$; $y=arctg^8(3-5x)$; $y=\sin^6\left(e^{\sqrt[3]{1-x}}-1\right)$;

$\ell n(5x-y)-xy=3$.

67. $y = 7x^3 4^{2+x^8}$; $y = \dfrac{arctg\left(6x + 4x^3\right)}{2\sqrt{x} + 3}$; $y = \dfrac{6 - 2x^2}{\sqrt{5x^3 - 1}}$; $y = \sin^7(5 - 9x)$;

$y = \ell n\left(3x - 3^{2+\sqrt{x}}\right)$; $y = 2^{\ell n(4-7x)} x^5$ $y = \arcsin^4\left(5 - \dfrac{7}{x^2}\right)$;

$y = \arccos \ell n\left(e^{-\sqrt[5]{x}} + 3\right)$; $y = (tgx)^{5+2\sqrt{x}}$; $\cos\left(x^2 + y\right) - \dfrac{1 - x}{y} = 0$.

68. $y = \sqrt[3]{7x^2} e^{3-x^2} + 8$; $y = \dfrac{4x - 5x^2}{\sqrt{x^2 - 9x}}$; $y = \dfrac{\sin\left(x + 4x^2\right)}{6 + 2x^2}$;

$y = tg^9(12 - 8x)$; $y = \ell n\left(\sqrt[3]{7 + 5x^2} + 2\right)$; $y = (1 - x)^4 2^{\arcsin\sqrt{x}}$;

$y = \sin^4\left(e^{8x^3} + 12x\right)$; $y = arctg\ell n\left(e^{\sqrt[3]{x^2 - 3x}} + 4\right)$; $y = (\arccos 5x)^{\sqrt[3]{x-1}}$;

$\ell n\left(x^3 + 4y\right) + \dfrac{x}{y} = 1$.

69. $y = \left(3 - 2x^2\right)3^{5x} + 4$; $y = \dfrac{4 + 7x}{\cos\left(1 - x^3\right)}$; $y = \dfrac{1 - 5x^4}{\sqrt{3 + x}}$;

$y = \ell n\left(3x + 2\sqrt[3]{x^2}\right)$; $y = (3x + 7)e^{\sin 6x}$; $y = \arccos^5\left(3 + 5x^2\right)$;

$y = arctg^4\left(e^{3x} + 8\right)$; $y = tg\ell n\left(5^{\sqrt{x+1}} + 3\right)$; $y = \left(2 - x^2\right)^{-\sqrt{x}}$;

$\cos\left(2x^3 + y\right) - \dfrac{2y}{x} = 1$.

70. $y = (5 - 3x)e^{x-x^2} + \pi$; $y = \dfrac{\arcsin\left(1 - \sqrt{3x}\right)}{\sqrt{1 - x^2}}$; $y = \cos \ell n\left(\sqrt[3]{5x} + \dfrac{3}{x}\right)$;

$y = \dfrac{\sqrt{3x + 4}}{x^5 + 4x^3}$; $y = \ell n \dfrac{1}{2x - \sqrt[3]{1 + 2x}}$; $y = arctg^7(1 - x)$; $y = (\cos 5x)^{-\sqrt{x}}$;

$y = \sin^3\left(e^{\sqrt{x+1}} + \dfrac{3}{x}\right)$; $y = \left(2 + x^3\right)3^{\sin(3-2x)}$; $\ell n\left(3x^3 - y\right) + x = 4$.

71. $y=\left(2+4x^2\right)2^{1+\sqrt{x}}+5$; $y=\ell n\dfrac{3-x}{2+4\sin 2x}$;

$y=\sin arctg\left(3\sqrt{x}+4\right)$; $y=\dfrac{\sqrt[3]{2+3x^2}}{4+x}$; $y=arctg^5\left(5+7x\right)$;

$y=\left(1-x\right)^4 e^{\cos 3x}$; $y=\ell n\left(\sqrt[3]{7+2x}-3x\right)$; $y=\ell n^8\left(5+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$;

$y=\left(1-7x^2\right)^{\cos 6x}$; $\left(x-1\right)^2\arccos y-2y^4=2$.

72. $y=\left(2-3x\right)3^{5x^2}-1$; $y=\dfrac{\sin\left(3x-2x^2\right)}{1+x}$; $y=\dfrac{x+4x^2}{\sqrt[3]{x}-7x}$;

$y=\ell n\left(2x+\sqrt[3]{x^2-4x}\right)$; $y=\ell n\left(5+y^{\sqrt{ч}}\right)$; $y=x^5 e^{atctg\left(1-x\right)}$;

$y=\cos^3\left(e^{-\sqrt{x}}+7\right)$; $y=\arccos^7\left(3+5x\right)$; $y=\left(\sqrt{x}\right)^{\ell n 3x}$;

$\dfrac{2x}{y^2}=arctg\left(x^2 y\right)+2$.

73. $y=2xe^{x^3-7}+\sqrt{5}$; $y=\dfrac{arctg\left(3+x\right)}{x^2-7}$; $y=\dfrac{2+x^3}{\sqrt{4x^2+x}}$;

$y=\arccos \ell n\left(3+\sqrt[3]{x}\right)$; $y=\ell n\dfrac{3x}{1+\sqrt[3]{x}}$; $y=x^4 2^{\cos 5\sqrt{x}}$; $y=arcctg^4 3x$;

$y=\sin^9\left(2+e^{\sqrt{x}}\right)$; $y=\left(2x+\cos\right)^{x^2}$; $\sin\left(3x-y\right)+x^2y^3=1$.

74. $y=\left(2+x^3\right)e^{3x}+\pi$; $y=\dfrac{tg\left(2+3x\right)}{x^3+7}$; $y=\dfrac{\cos\sqrt{x}-7}{\sqrt[3]{x}-3x}$;

$y=\ell n\dfrac{1}{\sqrt[3]{3-x^2}-x}$; $y=x^6 9^{\arcsin 4x}$; $y=\ell n\cos\left(2x+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$;

$y=\sin^7\left(5+x^2\right)$; $y=\ell n^4\left(3-e^{5x}\right)$; $y=\left(arctg\left(2+\sqrt{x}\right)\right)^x$;

$\left(x+1\right)^3 e^{2x-y}+y=1$.

75. $y=(2x+3)^{-\frac{1}{\sqrt{x}}-1}$; $y=\frac{(x+4)^5}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}$; $y=\frac{1-4x^3}{tg(1-7x)}$;

$y=\ell n\left(\sqrt[3]{3-x^2}-2x\right)$; $y=(1-x)^3 5^{\cos(3+2x)}$; $y=\arcsin \ell n\left(e^{x+3}-\frac{2}{x}\right)$;

$y=\cos^7\left(e^{5\sqrt{x}}-4x\right)$; $y=in^3\left(2-3^{\sqrt{2x}}\right)$; $y=[ctg(4-7x)]^{5x}$;

$\sqrt{y+1}\cdot x-\sin(x-y)=4$.

76. $y=(5-3x)e^{\sqrt{x-1}}+8$; $y=\frac{1+4x^2}{\cos 3x-4}$; $y=\frac{\sqrt[3]{1-3x^3}}{5-x}$;

$y=\ell n\left(5x-\frac{1}{8-2x}\right)$; $y=\left(3-x^3\right)e^{\sin(3-7x)}$; $y=arctg\ell n\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}+5x\right)$;

$y=\sin^9\left(e^{-x}+4\right)$; $y=\arcsin^6(3-2x)$; $y=(tg3x)^{1+\sqrt[3]{x}}$;

$\cos(3x+2y)+\sqrt{x=0}$.

77. $y=\left(3-4x^2\right)2^{-5x}+7$; $y=\frac{1-5x}{\cos 3x+4}$; $y=\frac{\sqrt{5-2x}}{5x^2-x}$;

$y=\cos\ell n\left(1-5^{x^2}\right)$; $y=\ell n\left(5x-\sqrt{3-2x}\right)$; $y=7xe^{\cos(7x-1)}$; $y=\arcsin^4 5x$;

$y=\sin^4\left(1-\sqrt[3]{x}\right)$; $y=x^{\sin 2x}$; $x^5\sin 7y+y^4+3$.

78. $y=2x^7 3^{4+5x}+\pi^2$; $y=\frac{4-7x}{3\sin 4x-8}$; $y=\frac{\sqrt{1+3x^2}}{5+6x}$;

$y=\ell n\sin\left(3-e^{2x}\right)$; $y=\ell n\left(\sqrt[3]{3+x}+x^2\right)$; $y=4x^2e^{\cos(1-x)}$;

$y=arctg^4(5+12x)$; $y=\cos^9\left(3+e^{2x}\right)$; $y=(3x+2)^{\cos 5x}$;

$ytg(xy)-e^x=2$.

79. $y=(3+2x)e^{4-3x^2}+\sqrt{\pi}$; $y=\dfrac{\arcsin(3-4x^2)}{2+7x}$;

$y=\ell n\dfrac{1}{x^3+\sqrt{x^2+4}}$; $y=\dfrac{x^2-2x}{\sqrt{1-x^5}}$; $y=(5-x^3)2^{\cos(1-5x)}$;

$y=\sin\ell n\left(\sqrt[4]{x}+x^2\right)$; $y=\sin^9\left(e^{2z}+x^2\right)$; $y=\arccos^7(1-x)$;

$y=(1-7x)^{\cos 3x}$; $\cos(y-5x)-\dfrac{1-y}{x}=13$.

80. $y=(2+3x)5^{7x^4}+\ell n8$; $y=\dfrac{\sin(3+8x)}{1-x^2}$; $y=x^2e^{\arcsin(1-x)}$;

$y=\dfrac{\sqrt[3]{2-7x}}{3x^2-x}$; $y=\ell n\left(5x-\sqrt{x^4+2}\right)$; $y=\ell n\cos\left(e^{\sqrt[3]{x}}-x\right)$; $y=(tg5x)^{x^3}$;

$y=\dfrac{\sqrt[3]{2-7x}}{3x^2-x}$; $y=\arccos^4(1-5x)$; $y=\sin^4\left(\sqrt[5]{x^2-x}\right)$;

$xy^2-arctg(x-y)=5$.

81. $y=(2-7x)e^{x^3+3}=\pi^2$; $y=\dfrac{3-8x}{\arcsin(1-8x)}$;

$y=arctg\ell n\left(e^{-\sqrt[4]{x}}-x\right)$; $y=\dfrac{\sqrt{y-x^3}}{5-x^2}$; $y=\ell n\dfrac{1}{2x-\sqrt{5-3x}}$;

$y=\sin^9\left(4+e^{7x}\right)$; $y=(3x-\sin 2x)^x$; $y=(5-x)^2e^{\arccos 7x}$;

$y=\arcsin^5\left(1-x^2\right)$; $\cos 3x-x^2y^3=17$.

82. $y=(1-5x)e^{3x}+\pi$; $y=\dfrac{\cos(5-2x)+3}{x^3}$; $y=\dfrac{\sqrt{x^3-7}}{2x-1}$;

$y=\ell n\left(x^3-\sqrt{1-3x}\right)$; $y=(x-1)^3e^{arctg5x}$; $y=\ell n\arccos\left(1+\sqrt[3]{x}\right)$;

$y=\sin^4(1-3x)$; $y=\ell n^6\left(2+e^{3x}\right)$; $y=(x+3)^{\ell n\left(1+e^{-x}\right)}$; $x^3e^{xy}+\cos y=4$.

83. $y=x^4 4^{3-x}+\ell n5$; $y=\dfrac{2-5x^3}{3-\cos 2x}$; $y=\dfrac{5-4x}{\sqrt{5x-7x^3}}$; $y=x^5e^{\sin 8x}$; $y=\ell n\left(\sqrt{7+5x}-x^6\right)$; $y=\cos tg\left(\sqrt[3]{2x}+x\right)$; $y=arctg^7(2-x)$; $y=\arcsin^6\left(1-\sqrt[3]{x^2}\right)$; $y=(5-2x)^{\cos(1-x)}$; $x^y\arcsin y+y^3=3$.

84. $u=x^5e^{2-5x}-\ell n3$; $y=\dfrac{\sqrt[3]{8-x^2}}{(x+4)^7}$; $y=\cos\dfrac{5-4x}{7-x^2}$; $y=x^7 4^{tg 5x}$; $y=\ell n\left(\sqrt[3]{3-2x^2-3}\right)$; $y=\arccos \ell n\left(e^{-3x}+4x\right)$; $y=arctg^5(3-2x)$; $y=\sin^4\left(1-3^{\sqrt{x}}\right)$; $y=(\arcsin 5x)^{x^3-1}$; $(y+1)^{\sqrt{x}}+\cos(x-y)=0$.

85. $y=(3-x)e^{x^2+2}-\ell n2$; $y=\dfrac{3x}{\sin 7x+4}$; $y=\dfrac{\sqrt{2x^2+7}}{1-x}$; $y=5xe^{\sin 3x}$; $y=\ell n\left(2x-\sqrt{3x^2-2}\right)$; $y=\sin \ell n\left(4-e^{-\sqrt{x+1}}\right)$; $y=arctg^3(3-5x)$; $y=\cos^4\left(x-\sqrt[3]{x}\right)$; $y=x^{tg 7x}$; $x\sin(5xy)-y^3=3$.

86. $y=\left(2\sqrt{x}+4\right)e^{-x^2}+3$; $y=\dfrac{(5x-2)^2}{\sqrt[3]{x-4}}$; $y=\dfrac{\cos\left(x-4x^2\right)}{1-3x^4}$; $y=\ell n\left(\sqrt[5]{5+x^2-4}\right)$; $y=x^3 3^{arctg(1-3x)}$; $y=\arcsin \ell n\left(e^{-\sqrt{1-x}}+3\right)$;

$y = arctg^6(3+7x)$; $y = \sin^6\left(e^{\sqrt[3]{1-x}}+4\right)$; $y = (\arcsin 7x)^{\sqrt{3x}}$;

$\ell n(3x-7y)+\dfrac{x}{y}=3$.

87. $y = 6x^3 4^{3-2x^8} - e^2$; $y = \dfrac{arctg(2x-7x^3)}{3\sqrt{x}-4}$; $y = \cos x^5 2^{\ell n(2-8x)}$;

$y = \dfrac{3-x^2}{\sqrt{2x^3-7}}$; $y = \ell n\left(5x+3^{-\sqrt{x}}\right)$; $y = \sin^7(4-12x)$; $y = (tg(1-x))^{\sqrt{x}}$;

$y = \arccos \ell n\left(e^{-\sqrt{2-7x^2}}+1\right)$; $y = \arcsin^4\left(3-\dfrac{10}{x^2}\right)$; $\cos(x^2-3y)+\dfrac{y+1}{x}=\pi$.

88. $y = \sqrt[3]{3x^2}e^{5+2x^2}-1$; $y = \dfrac{5x-x^2}{\sqrt{3x^2+x}}$; $y = arctg\ell n\left(e^{\sqrt[3]{3x^2-7x}}+2\right)$;

$y = \dfrac{\sin(2x-3x^2)}{5-2x^2}$; $y = \ell n\left(\sqrt[3]{3-2x^2}+1\right)$; $y = tg^7(4+5x)$;

$y = (\arccos)^{\sqrt[3]{x}}$; $y = x^4 2^{\arcsin(2-\sqrt{x})}$; $y = \sin^4\left(e^{2x^3}-7x^2\right)$;

$\ell n(x^3+2y)+\dfrac{2y}{x^2}=4$.

89. $y = (8+x^2)3^{8x}+\pi^3$; $y = \dfrac{7-3x}{\cos(5+8x^3)}$; $y = tg\ell n\left(5^{\sqrt{1-x}}+4\right)$;

$y = \dfrac{3-2x^4}{\sqrt{5-3x}}$; $y = \ell n\left(3x-2\sqrt[3]{x}\right)$; $y = (x-8)e^{\sin 3x}$; $y = (3-2x)^{\sqrt{x}}$;

$y = \arccos^5(2+x^2)$; $y = arctg^4(e^{6x}-4)$; $\cos(x^3-2y)-\dfrac{x}{y}=4$.

90. $y=(2-3x)e^{x+5x^2}-\ell n2$; $y=\dfrac{\arcsin\left(4-2\sqrt{x}\right)}{\sqrt{1-5x^2}}$; $y=\ell n\dfrac{1}{5x-\sqrt[3]{3-x}}$;

$y=\dfrac{\sqrt{x-7}}{4x^5-x^3}$; $y=arctg^7(3+2x)$; $y=\sin^3\left(e^{-\sqrt{x}}+\dfrac{y}{x}\right)$;

$y=(\cos 7x)^{2\sqrt{x}}$; $y=\left(7-2x^3\right)3^{\sin(5+2x)}$; $y=\cos\ell n\left(\sqrt[3]{7x}+\dfrac{2}{x}\right)$;

$\ell n\left(x^3+y^2\right)-7x=6$.

91. $y=\left(1-2x^2\right)2^{3\sqrt{x}}+\pi$; $y=\dfrac{5+x}{2+\sin 3x}$; $y=\dfrac{\sqrt[3]{3-x^2}}{5+2x}$;

$y=tg^5\left(3-7x^2\right)$; $y=\ell n\left(\sqrt[3]{1+2x}+4x\right)$; $y=(x+1)^4e^{\cos 8x}$;

$y=arctg\left(\sqrt{x}+7\right)^3$; $y=\ell n^7\left(3-\dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}\right)$; $y=\left(1-8x^2\right)^{\cos 3x}$;

$x^3\arccos 3x+y^4=2$.

92. $y=(1-7x)3^{2x^2}+4$; $y=\dfrac{\sin\left(5x+2x^2\right)}{2-4x}$; $y=\ell n^2\sin\left(4-e^{2\sqrt{x}}\right)$;

$y=\dfrac{2x-8x^2}{\sqrt[3]{x}+5x}$; $y=\ell n\left(3x-\sqrt[3]{x^2-2x}\right)$; $y=2x^5e^{arctg 3x}$; $y=\left(\sqrt{x+1}\right)^{\ell nx}$;

$y=\arccos^7(4-7x)$; $y=\cos^3\left(e^{8\sqrt{x}}-4\right)$; $\dfrac{5x}{y^2}-arctgxy=4$.

93. $y=3xe^{8x^2+7}+\ell n^2 3$; $y=\dfrac{arctg(4-2x)}{x^2+2}$; $y=(x+2)^4 2^{\cos\sqrt{3x}}$;

$y=\dfrac{x-5x^3}{\sqrt{x-2x^2}}$; $y=\ell n\dfrac{2x}{4-\sqrt[3]{x}}$; $y=arctg^4 7x$; $y=\sin^9\left(2+3e^{\sqrt{x}}\right)$;

$y=\arccos\ell n\left(2-\sqrt[3]{1-x}\right)$; $y=(3x-\cos x)^{x^2}$; $\sin(2x+y)-x^3y=4$.

94. $y=\left(4-2x^3\right)e^{2x}+\sqrt{\pi}$; $y=\dfrac{tg(4-5x)}{2-x^3}$; $y=\dfrac{\cos\sqrt{2x}+4}{\sqrt[3]{1-x}+4x}$;

$y=\sin^7\left(3-2x^2\right)$; $y=\ell n\dfrac{1}{\sqrt[6]{4+x^2}+2x}$; $y=(1-x)^5\,6^{\arcsin 3x}$;

$y=\ell n\cos\left(3x-\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)$; $y=\ell n^4\left(5+e^{x-3}\right)$; $y=\left(arctg\left(3-2\sqrt{x}\right)\right)^x$;

$y+x^3e^{2x+y}+4x=0$.

95. $y=(3x-1)^{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+4\right)}$; $y=\dfrac{(1-3x)^5}{\sqrt[4]{(1-5x)^3}}$; $y=\dfrac{1-7x^3}{tg(5+3x)}$;

$y=(3x-1)^3\,5^{\cos 4x}$; $y=\arcsin\ell n\left(e^{7-x}-\dfrac{5}{x}\right)$; $y=\cos^7\left(e^{-3\sqrt{x}}+2x\right)$;

$y=\ell n\left(\sqrt[3]{1-7x^2}-3x\right)$; $y=\sin^3\left(4-3^{-2\sqrt{x}}\right)$; $y=(ctg(5+3x))^{-x}$;

$x\sqrt{y}-\sin(3x+5y)=3$.

96. $y=(2+x)^2\,2^{-3x}+4$; $y=\dfrac{5x}{\cos 5x-7}$; $y=\dfrac{\sqrt{3-x}}{1-x^2}$;

$y=\ell n\left(2x+\sqrt{3-x}\right)$; $y=(1-x)e^{co4x}$; $y=\cos\ell n\left(4-3^{x^2}\right)$;

$y=\arcsin^5 3x$; $y=\sin^8\left(7+\sqrt[3]{x}\right)$; $y=x^{\sin 3x}$; $y+\sin\left(x-y^2\right)=4$.

97. $y=(1-x)^3\,3^{x+7}+\sqrt{6}$; $y=\dfrac{5+2x}{\sin 7x-4}$; $y=\ell n\left(\sqrt[3]{3+2x^2}-x\right)$;

$y=\dfrac{\sqrt{3-x^3}}{\sin 6x+1}$; $y=\cos^3\left(6-e^{2x}\right)$; $y=(x+2)^{\cos 3x}$; $y=arctg^5(3-7x)$;

$y=(x-1)^2e^{\cos(5x-3)}$; $y=\ell n\sin\left(5-e^{-3x}\right)$; $x+tg(xy)=4$.

98. $y=(x-3)e^{x^3+2x}$; $y=\dfrac{8-7x}{\sin 3x+2}$; $y=\dfrac{\sqrt{5+3x^3}}{9-4x}$;

$y=2(x-1)^2e^{\sin x}$; $y=\ell n\left(\sqrt[3]{12-x^2}-3x\right)$; $y=\arccos^3 10x$;

$y=\sin^5\left(12e^{3x}-4x\right)$; $y=arctg\ell n^{3\frac{1}{3x}}$; $y=(x-1)^{\cos 3x}$; $\dfrac{x}{y}-e^{xy}=5$.

99. $y=\left(3+x^2\right)e^{-\sqrt{3x}}+\pi$; $y=\dfrac{5+x^2}{\cos 12x+3}$; $y=\left(8+x^5\right)e^{\sin(5+2x)}$;

$y=\dfrac{\sqrt[3]{6-7x^2}}{9x+4}$; $y=\ell n\left(7x-\dfrac{5}{x+1}\right)$; $y=\sin^3\left(e^{7x}+4\right)$; $y=\left(tg^{4x}\right)^{7-x}$;

$y=arctg\ell n\left(\dfrac{5}{\sqrt{x}}+4x\right)$; $y=\arcsin^4(7+8x)$; $\cos(5x+y)+\sqrt[3]{5y}=2$.

100. $y=(7-5x)5^{3x^2}+\sqrt{e}$; $y=\dfrac{\sin(9-11x)}{7x^2}$; $y=\ell n\cos\left(3+e^{\frac{1}{\sqrt{2x}}}\right)$;

$y=\dfrac{\sqrt[3]{5-9x}}{x^2-12}$; $y=\ell n\left(3x-\sqrt{2x^3-1}\right)$; $y=\arccos^5(1-13x)$; $y=(tg7x)^{4-x^2}$;

$y=(x+7)^3e^{arctg 8x}$; $y=\sin^7\left(\sqrt{3x}+\dfrac{4}{x^2}\right)$; $\dfrac{\left(x-3^2\right)}{y}+arctg(x-y)=0$.

Завдання 9. Застосування похідної для дослідження функцій

Дослідити методами диференціального числення задані функції та побудувати їх графіки.

1.	$y=\dfrac{x+1}{x^3}$	$y=xe^{-x}+1$
2.	$y=\dfrac{x^2}{x-1}$	$y=(2x+x)e^{x}-1$
3.	$y=\dfrac{x^3}{x^3-2}$	$y=(x-1)e^{-2x}+2$
4.	$y=\dfrac{-x}{x^3-1}$	$y=(3x-1)e^{2x}-3$
5.	$y=\left(\dfrac{2x+3}{x-1}\right)^2$	$y=(2x+1)e^{2x}+1$
6.	$y=\dfrac{3x^3}{x^3+6}$	$y=2xe^{x}-1$
7.	$y=\dfrac{x^2+1}{2x+3}$	$y=(3-x)e^{-x}+3$
8.	$y=\dfrac{x^3}{x^2+2x+3}$	$y=(3x+1)e^{-x}+2$
9.	$y=\dfrac{16}{x^2(x-4)}$	$y=(1-x)e^{-x}+1$
10.	$y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$	$y=(2x+1)e^{x}-1$
11.	$y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$	$y=(6-3x)e^{2x}+2$

12.	$y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$	$y=3xe^{-x}+1$
13.	$y=\dfrac{-x^2}{(x-2)^2}$	$y=(5x-2)e^{-x}+3$
14.	$y=\dfrac{x}{x^3-2}$	$y=(2x-1)e^{2x}+3$
15.	$y=\dfrac{4x^3}{x^3-1}$	$y=(4-2x)e^{x}-2$
16.	$y=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-2x}$	$y=(x+3)e^{-2x}+1$
17.	$y=\dfrac{x+3}{x^3}$	$y=-xe^{x}+2$
18.	$y=\dfrac{4x^3+5}{x}$	$y=(2x+5)e^{2x}+1$
19.	$y=\dfrac{x^2}{x^3+1}$	$y=(1-x)e^{x}+1$
20.	$y=\dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$	$y=(x+1)e^{-x}+3$
21.	$y=\dfrac{x}{2-x^3}$	$y=(2x+3)e^{x}+2$
22.	$y=\dfrac{x}{x^2-4}$	$y=(x-3)e^{-2x}+4$
23.	$y=\dfrac{4x^3}{x^{3-1}}$	$y=2xe^{-x}-1$
24.	$y=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$	$y=(2x-1)e^{-x}-2$

25.	$y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$	$y=(x-2)e^{2x}-3$
26.	$y=\dfrac{-x}{x^3+3}$	$y=(2x-3)e^{-3x}+1$
27.	$y=\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^2$	$y=-xe^{2x}+2$
28.	$y=\dfrac{x}{x^3-4}$	$y=(5-2x)e^{-x}+3$
29.	$y=\dfrac{x-2}{(x+1)^2}$	$y=(2x-3)e^{-x}+4$
30.	$y=\dfrac{x}{x^2-4x+3}$	$y=(2x-3)e^{-x}+4$
31.	$y=\dfrac{3x}{3+x^2}$	$y=(x+2)e^{3x}+2$
32.	$y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$	$y=2xe^{x}-1$
33.	$y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$	$y=(1-2x)e^{x}+2$
34.	$y=\dfrac{x^3}{x^2+9}$	$y=(x-2)e^{-3x}-2$
35.	$y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$	$y=(5x+2)e^{2x}-1$
36.	$y=\dfrac{2x^3}{x^3+1}$	$y=(3x+1)e^{-x}-2$
37.	$y=\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^2$	$y=(x+2)e^{2x}+3$

38.	$y=\dfrac{-2x^3}{x^2+3}$	$y=(2x-1)e^{-2x}+1$
39.	$y=\dfrac{-x}{x^3+2}$	$y=-xe^{x}+2$
40.	$y=\dfrac{4x-12}{(x-2)^2}$	$y=(x-2)e^{x}+2$
41.	$y=\dfrac{x^4}{x^3+1}$	$y=xe^{-3x}+4$
42.	$y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$	$y=(5x-2)e^{x}+1$
43.	$y=\dfrac{x}{(x-1)^2}$	$y=(2x+3)e^{-3x}+2$
44.	$y=\dfrac{x^3}{x^2-3}$	$y=(3x-2)e^{-x}+1$
45.	$y=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2$	$y=(2-x)e^{3x}+1$
46.	$y=\dfrac{x^3}{3(x-2)^2}$	$y=(3x-1)e^{-2x}+2$
47.	$y=\dfrac{3x^3}{x^3+8}$	$y=3xe^{x}-1$
48.	$y=\dfrac{2x^2}{x+2}$	$y=(5x+2)e^{-x}+3$
49.	$y=\dfrac{2x^2}{x+2}$	$y=(5x+2)e^{-x}+3$
50.	$y=\dfrac{x^3}{(2x+1)^2}$	$y=(2x-1)e^{x}-1$

51.	$y=\frac{2x-3}{x^2-3x+2}$	$y=(3x+6)e^{-x}+2$
52.	$y=\frac{4x^3}{x^3-4}$	$y=(2x-4)e^{-ex}+3$
53.	$y=\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2$	$y=(3x+2)e^{3x}+2$
54.	$y=\frac{3x}{x^3+1}$	$y=(2x+1)e^{-3x}-1$
55.	$y=\frac{x^3}{x^2-x+2}$	$y=(1-x)e^{3x}+2$
56.	$y=\frac{x^2}{(x-2)^2}$	$y=2xe^{-x}+3$
57.	$y=\frac{2x+4}{(x+1)^2}$	$y=(3x-6)e^{x}-2$
58.	$y=\frac{x^4}{x-3}$	$y=(2x+1)e^{-2x}+3$
59.	$y=\frac{2x}{1=x^3}$	$y=(5x+2)e^{x}-3$
60.	$y=\frac{x^3}{3(x+2)^2}$	$y=(2-3x)e^{-x}-1$
61.	$y=\left(\frac{x-2}{x}\right)^2$	$y=(1+2x)e^{-x}-1$
62.	$y=\frac{x+1}{(x-3)^2}$	$y=(2x+4)e^{-3x}+2$

63.	$y=\dfrac{-x^2}{(x+3)^2}$	$y=xe^{-2x}+1$
64.	$y=\dfrac{x^3}{x^3-6}$	$y=(3x+6)e^{-x}+2$
65.	$y=\dfrac{3x^4+4}{x^3}$	$y=(1-2x)e^{2x}+3$
66.	$y=\dfrac{-x^3}{x^2-x+4}$	$y=(x+1)e^{-3x}-2$
67.	$y=\dfrac{6-3x}{(x+2)^2}$	$y=(5x-2)e^{-2x}+2$
68.	$y=\dfrac{(3x-2)^2}{x^2}$	$y=-xe^{2x}+1$
69.	$y=\dfrac{x^4}{x^3+3}$	$y=(x-3)e^{-x}+2$
70.	$y=\dfrac{-3x^3}{x^3-4}$	$y=(1-2x)e^{3x}+1$
71.	$y=\dfrac{x^3}{x^2+x+1}$	$y=(3x+2)e^{-2x}-3$
72.	$y=\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^2$	$y=(2-x)e^{2x}+3$
73.	$y=\dfrac{-3x^3}{x^3+5}$	$y=(2-4x)e^{x}+1$
74.	$y=\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^2$	$y=(3x-6)e^{2x}-2$
75.	$y=\dfrac{x+1}{(x-3)^2}$	$y=(2x+4)e^{-x}+1$

76.	$y=\frac{2x}{x^3-3}$	$y=(2-3x)e^x+4$
77.	$y=\frac{x^3}{x^2+4}$	$y=2xe^{3x}+1$
78.	$y=\frac{x+1}{x^2+x+1}$	$y=(1-2x)e^x-3$
79.	$y=\frac{x^3-2}{(x-1)^2}$	$y=(2x+5)e^{-x}+2$
80.	$y=\frac{-2x}{x^3+4}$	$y=(x-3)e^{2x}+1$
81.	$y=\frac{x+2}{(x+3)^2}$	$y=(2x-3)e^{-3x}+2$
82.	$y=\frac{2x^3}{x^3-8}$	$y=(x+2)e^{2x}+3$
83.	$y=\frac{3x^3}{x^2-x+1}$	$y=xe^{-3x}-1$
84.	$y=\frac{-3x}{x^3+3}$	$y=(x+2)e^{-2x}+1$
85.	$y=\frac{x^2+2x-1}{x-2}$	$y=(6-3x)e^x+2$
86.	$y=\frac{-x^3}{x^3+4}$	$y=(x-1)e^{3x}-3$
87.	$y=\frac{x^3+4}{x^2}$	$y=(3-x)e^{2x}+2$

88.	$y=\dfrac{2x^3}{x^3-5}$	$y=(2x-5)e^{-x}+1$
89.	$y=\dfrac{-2x^3}{x^2+x+1}$	$y=xe^{3x}-2$
90.	$y=\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^2$	$y=(3x-2)e^{2x}+4$
91.	$y=\dfrac{-x^3}{x^3-5}$	$y=(x+2)e^{-3x}+1$
92.	$y=\dfrac{3x}{4-x^3}$	$y=(5x-2)e^{3x}+3$
93.	$y=\dfrac{2x+1}{x^2-x+1}$	$y=(2+2x)e^{-x}+3$
94.	$y=\dfrac{-2x^3}{x^3+4}$	$y=(3-x)e^{x}-1$
95.	$y=\left(\dfrac{2x-3}{x+1}\right)^2$	$y=(x-2)e^{-3x}+2$
96.	$y=\dfrac{-2x^3}{x^3+2}$	$y=(2x-4)e^{2x}-3$
97.	$y=\dfrac{4x}{4+x^2}$	$y=(1-x)e^{-3x}+3$
98.	$y=\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^2$	$y=3xe^{-x}-2$
99.	$y=\left(\dfrac{3x-1}{x+1}\right)^2$	$y=(5-2x)e^{2x}+3$
100.	$y=\dfrac{x-2}{x^2+4}$	$y=(x-2)e^{3x}-1$.

Завдання 10. Невизначений інтеграл

Обчислити невизначені інтеграли

1. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$; $\int x e^{-x^2} dx$; $\int \sqrt{x^2+4} dx$; $\int \sqrt{9-x^2} dx$; $\int e^{-x} \sin x dx$; $\int \frac{3x+4}{x^2+x+1} dx$; $\int \frac{dx}{x^2(x+1)(x^2+4)}$; $\int e^{-x} \sin x dx$; $\int \sin^4 x dx$; $\int \sin 2x \cos 3x dx$.

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+3x}}$; $\int \frac{dx}{x^2(x^2+4)}$; $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$; $\int \sqrt{x} e^{x\sqrt{x}} dx$; $\int \sin^3 x dx$; $\int x \cos 5x dx$; $\int \cos 2x \cdot \sin 3x dx$; $\int \cos^4 x dx$; $\int \frac{dx}{x^2-x}$; $\int \sqrt{1-2x^2} dx$.

3. $\int \sqrt{2+3x} dx$; $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$; $\int x^3 \cos x^2 dx$; $\int \cos^2 x dx$; $\int \sqrt{x^2+4} dx$; $\int \frac{dx}{2+\sin x}$; $\int \frac{dx}{x(x-2)(x^2+1)}$; $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$; $\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$; $\int x^2 e^x dx$.

4. **Ошибка! Закладка не определена.** $\int \frac{arctg^2 x}{1+x^2} dx$; $\int \frac{dx}{x(x+2)^2}$; $\int \sqrt{\frac{1+x}{2-x}} dx$; $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$; $\int 2x \sin 2x dx$; $\int \sin^4 x dx$; $\int \sqrt{x^2-16} dx$; $\int \ln^2 x dx$; $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$; $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$.

5. $\int tg^2 2xdx$; $\int \frac{dx}{2+3x}$; $\int \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}dx$; $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$;

$\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$; $\int \arcsin xdx$; $\int \frac{3x}{2+x^2}dx$; $\int \frac{dx}{(2x^2+1)x}$;

$\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$; $\int \frac{dx}{x\ln x}$.

6. $\int sh^2 xdx$; $\int \ln(1+e^{2x})e^{2x}dx$; $\int tg^3 xdx$; $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$;

$\int \frac{tg(\ln x)}{x}dx$; $\int \sin 2x\cos xdx$; $\int x^2e^{-x}dx$; $\int x\ln xdx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$;

$\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$.

7. $\int \frac{dx}{(x+3)\sqrt{x}}$; $\int xarctgxdx$; $\int x^4e^{-2x^5}dx$; $\int \frac{5x}{1+2x}dx$;

$\int ch^2 xdx$; $\int \cos^3 xdx$; $\int x\ln(1+x)dx$; $\int \sin^4 2xdx$;

$\int \frac{dx}{(x+2)(x-1)}$; $\int \frac{3dx}{\sqrt{2x+1}}$.

8. $\int \sqrt{4-x^2}dx$; $\int e^{-2x}\cos xdx$; $\int x\cos xdx$; $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$;

$\int 2\ln\sqrt{x}dx$; $\int \frac{dx}{x(x+1)(x-1)}$; $\int x\cos^2 xdx$; $\int x^2e^{2x}dx$; $\int \frac{dx}{\sin^3 2x}$;

$\int \frac{xdx}{x^2+4x+6}$.

9. $\int \frac{dx}{x^3+x^2}$; $\int arctg\,2x\,dx$; $\int \frac{tg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; $\int \frac{x+1}{x-1}dx$; $\int x\sin^2 x\,dx$;

$\int \sin 2x\cos 7x\,dx$; $\int \sqrt{x^2+1}\,dx$; $\int \ln(2+3x)dx$; $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$; $\int \sqrt{5x-2}\,dx$.

10. $\int ctg^2 x\,dx$; $\int 5\cos^2 2x\,dx$; $\int \ln x^2\,dx$; $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$;

$\int \frac{dx}{x(x-3)(x+1)}$; $\int xe^{-x}dx$; $\int \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$; $\int \frac{dx}{\sin x}$; $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$;

$\int arctgx\,dx$.

11. $\int \frac{dx}{x^4+x^2}$; $\int \frac{\cos\sqrt{pc}}{\sqrt{x}}dx$; $\int xe^{-2x}dx$; $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$;

$\int \cos x\cos 4x\,dx$; $\int \frac{dx}{3+\sin x}$; $\int \cos^2 x\sin^4 x\,dx$; $\int \frac{e^{arctgx}}{1+x^2}dx$;

$\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}dx$; $\int e^x\cdot e^{e^x}dx$.

12. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2+3x}}$; $\int \frac{e\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; $\int x\sin 3x\,dx$; $\int \frac{dx}{x(x+5)}$;

$\int \frac{dx}{x^2+x+2}$; $\int tg^2 x\,dx$; $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$; $\int \sqrt{9-x^2}\,dx$; $\int x^2\ln x\,dx$;

$\int \sin x\cos 2x\,dx$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{2+3x}}$; $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; $\int 3\ln\sqrt[3]{x}dx$; $\int \frac{dx}{x^2-4}$; $\int \frac{x^3}{x+1}dx$;

$\int x^2 e^{-3x}dx$; $\int \frac{dx}{x^2+x+4}$; $\int e^{-x}\cos 2xdx$; $\int \frac{dx}{\sin^4 2x}$; $\int \sqrt{x^2-4}dx$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{9+2x}}$; $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$; $\int \frac{dx}{x^2-9}$; $\int \frac{x^2}{x-1}dx$;

$\int x^3 \ln xdx$; $\int \frac{dx}{2-\sin x}$; $\int \ln(x+2)dx$; $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}dx$; $\int \sqrt{x^2+4}dx$.

15. $\int \sqrt[4]{3-2x}dx$; $\int xe^{-6x}dx$; $\int x arctg x^2 dx$; $\int \frac{arctg^3 x}{1+x^2}dx$;

$\int \frac{dx}{x^2+2x+1}$; $\int \frac{dx}{x(x^2+9)}$; $\int \frac{dx}{\cos^4 2x}$; $\int \frac{dx}{2-\cos x}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}}$;

$\int \sqrt{x^2+x+1}dx$;.

16. $\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}dx$; $\int \frac{arctg(x+1)}{x^2+2x+2}dx$; $\int \frac{dx}{(2x-1)(x+3)}$; $\int \cos^6 xdx$;

$\int \frac{x}{x^2+1}dx$; $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$; $\int \frac{dx}{\cos x+6}$; $\int \sqrt{\frac{x}{3x+1}}dx$; $\int x\sin 7xdx$;

$\int \cos^3(2x+1)dx$.

17. $\int \frac{x}{x^2+x+3}dx$; $\int (2x+1)\cos(x^2+x)dx$; $\int \ln\sqrt[5]{x+2}dx$;

$\int \sin^3(2x+1)dx$; $\int \frac{x^2+x+1}{3x-1}dx$; **Ошибка! Закладка не определена.**

$\int \cos x e^{\sin x}dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{3+5x}}$; $\int \cos^4(3x+2)dx$; $\int \sin x\cos 5xdx$.

18. $\int \sin 2xe^{\cos 2x}dx$; $\int x^2 \sin 2xdx$; $\int \sin x\sqrt{\cos x}dx$; $\int \frac{dx}{(x+3)(x-4)}$; $\int \sqrt{\frac{x+2}{x-3}}dx$; $\int \frac{dx}{\sin 2x+3}$; $\int \frac{dx}{x^2+4x}$; $\int \sqrt[3]{x-3}dx$; $\int xe^{x^2+1}dx$; $\int arctg3xdx$.

19. $\int x\sin\left(x^2+3\right)dx$; $\int \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}dx$; $\int \frac{dx}{x^2+x+10}$; $\int \frac{2xdx}{3x+4}$; $\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$; $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x+4}}$; $\int \frac{dx}{x\ln x}$; $\int \frac{\sin^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; $\int \ln^2(x+2)dx$.

20. $\int \sqrt[3]{3-2x}dx$; $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$; $\int 5x\cos(6x+1)dx$; $\int \frac{dx}{x^2-3}$; $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$; $\int x^3\ln\sqrt{x}dx$; $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x}}$; $\int \sin^5 xdx$; $\int \cos^4 2xdx$; $\int \sqrt{x^2+16}dx$.

21. $\int \sqrt{16+21x}dx$; $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; $\int \frac{dx}{x\left(x^2+16\right)}$; $\int \frac{dx}{2x+\sqrt{x}}$; $\int \arcsin xdx$; $\int \frac{dx}{x^2+3x+11}$; $\int x^2 arctgxdx$; $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$; $\int \cos^2 x\sin^4 xdx$; $\int \sqrt{x^2-16}dx$.

22. $\int \sqrt[3]{9+17x}dx$; $\int arctg(x+6)dx$; $\int e^{-3x}\cos 2xdx$; $\int \frac{dx}{x^2+5x+19}$; $\int \frac{dx}{x^3-3x^2+2x}$; $\int \frac{e^{\sqrt{x+2}}}{\sqrt{x+2}}dx$; $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$; $\int \cos^3 x\sin^3 xdx$; $\int x^3e^{-x^2}dx$; $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+2\sqrt{x}}$.

23. $\sqrt{5+6x}dx$; $\int \frac{\cos\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}dx$; $\int \frac{dx}{x(2x+3)}$; $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$; $\int x3^{2x}dx$; $\int \frac{dx}{x^2+x+10}$; $\int \sqrt{16-x^2}dx$; $\int \sin^4 xdx$; $\int \cos 3x \sin xdx$; $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}+1}$.

24. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{3x-1}}$; $\int \frac{arctg^2(x+1)}{x^2+2x+2}dx$; $\int \frac{\sin\sqrt{3x}}{\sqrt{x}}dx$; $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$; $\int \frac{dx}{x^2+3x+3}$; $\int \frac{dx}{x(x-4)}$; $\int \frac{dx}{\cos^4 2x}$; $\int x^3 \ln xdx$; $\int \sin 5x \cos 2xdx$; $\int \sqrt{16+4x^2}dx$.

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x+7}}$; $\int \frac{e^{\sqrt{x-2}}}{\sqrt{x-2}}dx$; $\int x^2 \cos 5xdx$; $\int \frac{dx}{x(x-3)^2}$; $\int ctg^2 2xdx$; $\int \cos 6x \sin xdx$; $\int \sqrt{x^2+x+4}dx$; $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$; $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$; $\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$.

26. $\int \sqrt{3x+10}dx$; $\int \frac{\cos\sqrt{3x+1}}{\sqrt{1+3x}}dx$; $\int \sqrt{x}\cos\sqrt{x^3}dx$; $\int \frac{dx}{x^2-x+2}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$; $\int \frac{dx}{1-3\sqrt{x}}$; $\int \frac{dx}{\cos^6 2x}$; $\int \cos 4x \sin xdx$; $\int \cos^2 x \sin^6 xdx$; $\int x^3 e^{x^4}dx$.

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{b+ax}}$; $\int x^3 e^{-x^4}dx$; $\int \cos^3 2xdx$; $\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+81)}$; $\int 3x \sin 2xdx$; $\int \sin^4 xdx$; $\int \cos 5x \cos 2xdx$; $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$; $\int \frac{dx}{x^4+x^2}$; $\int \sqrt{3-5x}\,dx$.

28. $\int\sqrt{3+7x}dx$; $\int\frac{\sqrt{x}}{3+2\sqrt{x}}dx$; $\int\frac{dx}{x^2-5x+6}$; $\int\frac{dx}{\sin^6 3x}$; $\int\frac{dx}{3+\sin x}$;

$\int\sin 4x\sin 3xdx$; $\int\sqrt{2x^2+4}dx$; $\int\frac{dx}{x(x+2)(x^2+4)}$; $\int 3x^2e^{-2x}dx$.

29. $\int\frac{arctg^2 2x}{1+4x^2}dx$; $\int\frac{dx}{3x(x+2)^2}$; $\int(5x+1)\sin 2xdx$; $\int\sqrt{\frac{1+2x}{2-3x}}dx$;

$\int\frac{dx}{\sin^3 2x}$; $\int\frac{dx}{x^2+3x+5}$; $\int\frac{e^{\sqrt{3x}}}{\sqrt{x}}dx$; $\int\cos^4 3xdx$; $\int\ln^2(3x)dx$;

$\int\sqrt{4x^2-1}dx$.

30. $\int\frac{dx}{3+4x}$; $\int\sqrt{2x}e^{\sqrt{3x}}dx$; $\int\arcsin 2xdx$; $\int\frac{dx}{\sin^4 2x}$; $\int tg^2 3xdx$;

$\int\frac{4x}{7+9x^2}dx$; $\int\frac{dx}{x(4x^2+1)}$; $\int\frac{dx}{x(5x+1)^2}$; $\int\frac{dx}{x\ln 2x}$; $\int\ln(x+2)dx$.

31. $\int ch^2 5xdx$; $\int e^{3x}\ln(1+e^{3x})dx$; $\int\frac{dx}{\sqrt{9-7x}}$; $\int\frac{dx}{x^2+3x+11}$;

$\int tg^3 2xdx$; $\int\frac{dx}{(x+5)^2(x-4)}$; $\int\frac{tg(\ln 2x)}{x}dx$; $\int x^2e^{-6x}dx$;

$\int\sin 7x\cos 3xdx$; $\int x\ln(1+2x)dx$.

32. $\int\frac{dx}{\sqrt{3x}(2x+5)}$; $\int\frac{2x}{5+7x}dx$; $\int x^8e^{-5x^9}dx$; $\int\frac{5dx}{\sqrt{11+9x}}$;

$\int xarctg 2xdx$; $\int ch^2(2x+1)dx$; $\int\cos^3(3x-2)dx$; $\int\sin^4(3x-1)dx$;

$\int x\ln(1+3x)dx$; $\int\frac{dx}{(x+4)(x-7)}$.

33. $\int\sqrt{9-x^2}\,dx$; $\int e^{-7x}\sin 2x\,dx$; $\int(x+3)\cos 5x\,dx$; $\int 3\ln\sqrt[3]{x+1}\,dx$;

$\int\frac{dx}{x(x-2)(x-3)}$; $\int(x+3)^2e^{-5x}dx$; $\int\frac{dx}{\sin^3(5x+1)}$; $\int x\cos^2 2x\,dx$;

$\int\frac{dx}{3+5\sqrt{x+3}}$; $\int\frac{x\,dx}{x^2+x+7}$.

34. $\int\frac{dx}{2x^3+x^2}$; $\int arctg 12x\,dx$; $\int x\sin^2(3x-2)dx$; $\int\frac{dx}{\sin^4 x}$;

$\int\cos 4x\sin 9x\,dx$; $\int\frac{tg\left(\sqrt{x+2}\right)}{\sqrt{x+2}}dx$; $\int\ln(7+9x)dx$; $\int\sqrt{x^2+49}\,dx$;

$\int\frac{e^{\frac{1}{x+1}}}{(x+1)^2}dx$; $\int\sqrt{3x+7}\,dx$.

35. $\int ctg^2(2x+3)dx$; $\int 5\cos^2(3x-2)dx$; $\int\ln(x+2)^2dx$;

$\int\frac{\sqrt{\ln(x+1)}}{x+1}dx$; $\int xe^{-(x+2)}dx$; $\int\frac{\sin\frac{1}{x+1}}{(x+1)^2}dx$; $\int\frac{dx}{\cos(3x+2)}$; $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$;

$\int arctg 2x\,dx$; $\int\frac{(2x+1)dx}{(x-2)(x^2+4x+5)}$.

36. $\int\frac{dx}{x^4+x}$; $\int\frac{\sin\sqrt{4+3x}}{\sqrt{4+3x}}dx$; $\int xe^{-2x-3}dx$; $\int\sqrt{9-x^2}\,dx$;

$\int\cos 2x\sin 5x\,dx$; $\int\frac{dx}{5+6\sin 2x}$; $\int\cos^2 2x\sin^4 2x\,dx$; $\int\frac{e^{arctg 2x}}{1+4x^2}dx$;

$\int\frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$; $\int\cos x\,e^{\sin x}dx$.

37. $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{3-2x}}$; $\int \frac{e^{\sqrt{5x}}}{\sqrt{x}}dx$; $\int x\sin(2x+1)dx$; $\int \frac{dx}{x^2+3x+5}$; $\int \frac{dx}{x(2x+3)}$; $\int x^2 \ln 11x dx$; $\int \sin 3x \cos x dx$; $\int ctg^2 6x dx$; $\int \sqrt{4+2x^2}dx$; $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$.

38. $\int \frac{dx}{\sqrt[7]{5x+6}}$; $\int \frac{\arcsin 9x}{\sqrt{1-81x^2}}dx$; $\int 3\ln \sqrt[4]{x}dx$; $\int \frac{dx}{x^2-16}$; $\int \frac{dx}{x^2-4x+8}$; $\int \frac{2x^2}{x-1}dx$; $\int (x+1)^2 e^{-3x}dx$; $\int \sqrt{4x^2-1}dx$; $\int e^{-2x}\cos 3x dx$; $\int \frac{dx}{\cos^4 \frac{x}{3}}$.

39. $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{5+3x}}$; $\int \frac{\sin\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}}dx$; $\int \ln(3x+1)dx$; $\int \frac{dx}{9x^2-1}$; $\int \frac{dx}{x^2+2x+6}$; $\int \frac{x^2}{2x+3}dx$; $\int x^3 \ln(x-3)dx$; $\int \frac{dx}{2+\cos x}$; $\int \frac{\sqrt{x}}{3-2x}dx$; $\int \sqrt{9x^2-1}dx$.

40. $\int \sqrt[6]{5-3x}dx$; $\int \frac{arctg^3 2x}{1+4x^2}dx$; $\int xe^{-7x}dx$; $\int \frac{dx}{x^2+2x+4}$; $\int \frac{dx}{x(4x^2+1)}$; $\int \frac{dx}{3+\cos 2x}$; $\int x^2 arctg x^3 dx$; $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; $\int \frac{dx}{\cos^4(3x+7)}$; $\int \sqrt{4x^2-3x}dx$.

41. $\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}}dx$; $\int \frac{arctg(1-x)}{x^2-2x+2}dx$; $\int \sqrt{\frac{2x}{x-3}}dx$; $\int \frac{xdx}{x^2+4}$;

$\int \cos^6 3xdx$; $\int \frac{dx}{(2x+1)(x-2)}$; $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}$; $\int \frac{dx}{7+\cos x}$; $\int 2x\cos 5xdx$;

$\int \sin^3(x-2)dx$.

42. $\int \frac{xdx}{x^2+2x+3}$; $\int (1+3x)\cos\left(x+\frac{3x^2}{2}\right)dx$; $\int \cos^3(3x+1)dx$;

$\int \frac{x^2-x+1}{x+5}dx$; $\int \cos 2xe^{-\sin 2x}dx$; $\int \ln\sqrt[4]{2x+1}dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}}$;

$\int \sin^4(2x+3)dx$; $\int \sin x\cos 4xdx$; $\int \sqrt{\frac{x-3}{x-2}}dx$.

43. $\int x^2\sin(x^3+1)dx$; $\int \sqrt{x+1}e^{-\sqrt{x+1}}dx$; $\int \frac{e^{\arcsin\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{x}}dx$;

$\int \frac{dx}{x^2+2x+9}$; $\int \frac{3x}{2x+1}dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{4-2x}}$; $\int \ln^2(2x+1)dx$;

$\int \frac{dx}{\cos^2(x+1)\sin^2(x+1)}$; $\int \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}$; $\int \frac{\cos^2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}dx$.

44. $\int \sin 3xe^{\cos 3x}dx$; $\int (x+3)^2\sin 3xdx$; $\int \sin 2x\sqrt{\cos 2x}dx$;

$\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$; $\int \ln\sqrt[3]{3+x}dx$; $\int \sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}dx$; $\int \frac{dx}{5+\cos 2x}$; $\int \frac{dx}{x^2+9x}$;

$\int xe^{x^2+2}dx$; $\int arctg 4xdx$.

45. $\int \sqrt[4]{7-3x}\,dx$; $\int x^3 \ln \sqrt[3]{x}\,dx$; $\int \frac{(\arcsin x)^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

$\int 3x\cos(5x-1)dx$; $\int \frac{dx}{4x^2-9}$; $\int \frac{dx}{x^2+4x+9}$; $\int \cos^5 x\,dx$;

$\int \cos^4(3x+2)dx$; $\int \frac{dx}{2+3\sqrt{x}}$; $\int \sqrt{4x^2+1}\,dx$.

46. $\int \sqrt{11+15x}\,dx$; $\int \frac{\cos\sqrt{2+x}}{\sqrt{2+x}}dx$; $\int \arcsin 4x\,dx$; $\int \frac{dx}{x(x^2+10)}$;

$\int \frac{dx}{x^2+2x+11}$; $\int x\,arctg(x+2)dx$; $\int \cos^2 2x \sin^4 2x\,dx$; $\int \frac{dx}{\sin^3(x+1)}$;

$\int \sqrt{x^2-9}\,dx$; $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$.

47. $\int \sqrt[3]{10+9x}\,dx$; $\int \frac{e^{\sqrt{3-x}}}{\sqrt{3-x}}dx$; $\int \frac{dx}{x^2+4x+10}$; $\int \frac{\sqrt{x}}{1+2\sqrt[3]{x}}dx$;

$\int arctg(x-5)dx$; $\int \frac{dx}{x^3+2x^2+3x}$; $\int e^{-x}\cos 3x\,dx$;

$\int \cos^3(2x+1)\sin(2x+1)dx$; $\int x^5 e^{-x^3}dx$; $\int \frac{dx}{\cos^4(2x-1)}$.

48. $\int \sqrt[3]{3+2x}\,dx$; $\int \frac{\cos\sqrt{3x-1}}{\sqrt{3x-1}}dx$; $\int \frac{dx}{x^2+x+9}$; $\int \frac{dx}{x(3x+2)}$;

$\int x2^{3x}dx$; $\int \cos 7x \sin 2x\,dx$; $\int \cos^4 2x\,dx$; $\int \frac{dx}{\sin^6 3x}$; $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$;

$\int \sqrt{1-9x^2}\,dx$.

49. $\int \frac{dx}{\sqrt[7]{2x+7}}$; $\int \frac{arctg^3(2x+1)}{4x^2+4x+2}dx$; $\int \frac{\sin\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}}dx$; $\int \frac{dx}{x(x+2)}$;
$\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$; $\int x^2 \ln x dx$; $\int \sin 6x \cos x dx$; $\int \sqrt{16+x^2}dx$;
$\int \frac{dx}{\cos^4(2x+1)}$; $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}-x}$.

50. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{7x+5}}$; $\int \frac{e^{\sqrt{1+x}}}{\sqrt{1+x}}dx$; $\int x^2 \sin 7x dx$; $\int \frac{dx}{x(2x+1)^2}$;
$\int tg^2 3x dx$; $\int \cos 7x \sin x dx$; $\int \sqrt{x^2+x+1}dx$; $\int \frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt[3]{x}}dx$; $\int \frac{dx}{\sin^6 2x}$;
$\int ctg^2 3x dx$.

51. $\int \sqrt{19x+23}dx$; $\int \frac{\cos\sqrt{1+2x}}{\sqrt{1+2x}}dx$; $\int \sqrt{x}\sin\sqrt{x^3}dx$; $\int \frac{dx}{1+3\sqrt{x}}$;
$\int \frac{dx}{x^2-x+4}$;
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}}$; $\int \frac{dx}{\cos^6(2x+1)}$; $\int x^2 e^{x^3}dx$; $\int \cos 4x \sin 2x dx$;
$\int \cos^2 2x \sin^4 2x dx$.

52. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-7x}}$; $\int \sqrt{2x}e^{3x\sqrt{x}}dx$; $\int \sin^3 7x dx$; $\int \cos^4 5x dx$;
$\int 2x \cos 3x dx$; $\int \frac{dx}{x^2(x^2-8)}$; $\int \cos 3x \sin 7x dx$; $\int \frac{dx}{x^2+5x+6}$; $\int \frac{dx}{x^2+5x}$;
$\int \sqrt{2-x^2}dx$.

53. $\int\sqrt{2+8x}dx$; $\int\frac{dx}{\sin^6 7x}$; $\int 3x^3\cos 5x^2dx$; $\int\sin^2 3xdx$; $\int\frac{dx}{5+\sin x}$; $\int\sqrt{9x^2+5}dx$; $\int\frac{\sqrt{x}dx}{2+3\sqrt{x}}$; $\int\frac{dx}{x^2+x-2}$; $\int\frac{dx}{x(x+3)(x^2+5)}$; $\int x^2e^{-7x}dx$.

54. $\int\frac{arctg^2 3x}{1+9x^2}dx$; $\int\frac{dx}{x(x-5)^2}$; $\int\sqrt{\frac{2x+1}{1+3x}}dx$; $\int\frac{dx}{\sin^3 5x}$; $\int(3x-1)\cos 3xdx$; $\int\sin^4(3x+1)dx$; $\int\ln^2(7x)dx$; $\int\sqrt{16x^2-9}dx$; $\int\frac{dx}{x^2+5x+10}$; $\int\frac{e^{\sqrt{4+x}}}{\sqrt{4+x}}dx$.

55. $\int tg^2 5xdx$; $\int\frac{dx}{7+6x}$; $\int\sqrt{2x}e^{\sqrt{2x}}dx$; $\int\frac{dx}{x(2x+3)^2}$; $\int\frac{dx}{\sin^4 3x}$; $\int\arcsin 4xdx$; $\int\frac{5x}{5+4x^2}dx$; $\int\frac{dx}{x(9x^2+1)}$; $\int\frac{dx}{x\ln 5x}$; $\int\ln(2x-3)dx$.

56. $\int ch^2 3xdx$; $\int e^{5x}\ln(1+e^{5x})dx$; $\int x\ln(5x+1)dx$; $\int tg^3 4xdx$; $\int\frac{dx}{(x+2)(x-1)}$; $\int x^2e^{-7x}dx$; $\int\frac{tg(\ln 3x)}{x}dx$; $\int\sin 5x\cos 2xdx$; $\int\frac{dx}{\sqrt{11-7x}}$; $\int\frac{dx}{x^2+2x+9}$.

57. $\int\frac{dx}{\sqrt{2x}(3x-1)}$; $\int xarctg3xdx$; $\int x^6e^{-5x^7}dx$; $\int ch^2 7xdx$; $\int\frac{3x}{7-2x}dx$; $\int\sin^3(5x-1)dx$; $\int\cos^4(5x-2)dx$; $\int x\ln(3+2x)dx$; $\int\frac{dx}{(x-2)(x+9)}$; $\int\frac{dx}{\sqrt{9+11x}}$.

58. $\int\sqrt{7-x^2}\,dx$; $\int e^{-5x}\cos 3x\,dx$; $\int(x-2)\cos 7x\,dx$;

$\int\ln\sqrt{2x-3}\,dx$; $\int\frac{dx}{x(x-7)(x+5)}$; $\int(x+1)\cos^2 3x\,dx$; $\int\frac{dx}{\cos^3(3x-2)}$;

$\int(x+1)^2e^{-x}\,dx$; $\int\frac{dx}{3+\sqrt{x-2}}$; $\int\frac{x\,dx}{x^2+5x+11}$.

59. $\int\frac{dx}{x^3+5x^2}$; $\int arctg\,7x\,dx$; $\int\frac{3x+4}{x-2}dx$; $\int\sqrt{x^2+9}\,dx$;

$\int\frac{tg\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}dx$; $\int\sin 3x\cos 5x\,dx$; $\int\frac{e^{\frac{1}{2x+1}}}{(2x+1)^2}dx$; $\int\ln(5+11x)\,dx$;

$\int x\cos^2(5x+1)\,dx$; $\int\sqrt{2-7x}\,dx$.

60. $\int\frac{dx}{x^3+3x}$; $\int\frac{\cos\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}dx$; $\int xe^{-3x+4}\,dx$; $\int\sqrt{49-x^2}\,dx$;

$\int\sin 3x\cos 2x\,dx$; $\int\frac{dx}{2+3\cos x}$; $\int\cos^2 x\sin^4 x\,dx$; $\int\frac{e^{\arcsin\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}}\sqrt{x}\,dx$;

$\int\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx$; $\int\sin x\,e^{\cos x}\,dx$.

61. $\int tg^2(5x-3)\,dx$; $\int 3\sin^2(5x+3)\,dx$; $\int\frac{dx}{x(5x+1)(2x-2)}$;

$\int\ln(x+5)^2\,dx$; $\int\frac{\sqrt{\ln(2x-1)}}{2x-1}dx$; $\int(2x-1)e^{-3x}\,dx$; $\int\frac{\sin\frac{1}{3x+1}}{(3x+1)^2}dx$; $\int\frac{dx}{\sin(x+2)}$;

$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$; $\int arctg\sqrt{x}\,dx$.

62. $\int \frac{dx}{\sqrt[7]{7-11x}}$; $\int \frac{e^{\sqrt{6x}}}{\sqrt{x}}dx$; $\int \frac{dx}{x^2-x+6}$; $\int \frac{dx}{x(3x+1)}$;

$\int x\cos(3x-2)dx$; $\int x^2 \ln 3x dx$; $\int \sin 7x \cos x dx$; $\int ctg^2 3x dx$;

$\int \sqrt{4x^2+1}dx$; $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$.

63. $\int \frac{dx}{\sqrt[8]{5x+1}}$; $\int \frac{\arcsin 7x}{\sqrt{1-49x^2}}dx$; $\int \frac{dx}{x^2-x+10}$; $\int \frac{dx}{x^2-81}$;

$\int 2\ln \sqrt[6]{x}dx$; $\int \frac{3x^2}{2x-1}dx$; $\int x^2 e^{-2x+3}dx$; $\int e^{-4x}\cos 3x dx$;

$\int \frac{dx}{\cos^4(2x+1)}$; $\int \sqrt{x^2-81}dx$.

64. $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{7x+11}}$; $\int \frac{\cos\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}dx$; $\int \frac{dx}{x^2-2x+7}$; $\int \frac{dx}{25x^2-1}$;

$\int \ln(5x+1)dx$; $\int \frac{x^3}{3x-1}dx$; $\int x^3 \ln(1-3x)dx$; $\int \frac{dx}{3+2\cos x}$;

$\int \frac{\sqrt{x}}{4+7x}dx$; $\int \sqrt{4x^2+1}dx$.

65. $\int \sqrt{5+10x}dx$; $\int \frac{arctg^2 3x}{1+9x^2}dx$; $\int (x+2)e^{-5x}dx$; $\int \frac{dx}{x^2-2x+4}$;

$\int \frac{dx}{x(25x^2+1)}$; $\int \frac{dx}{3+\sin x}$; $\int x^3 arctg x^4 dx$; $\int \frac{dx}{5\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}}$;

$\int \frac{dx}{\cos^4(3x+1)}$; $\int \sqrt{x^2+6x+8}dx$.

66. $\int \frac{e^{\sqrt{1+3x}}}{\sqrt{1+3x}}dx$; $\int \frac{arctg(2-x)}{x^2-4x+5}$; $\int \frac{5xdx}{x^2+9}$; $\int \sqrt{\frac{x}{x+3}}dx$;

$\int \frac{dx}{(3x-1)(x+5)}$; $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4x+8}}$; $\int \frac{dx}{5-\sin x}$; $\int \sin^6 3xdx$;

$\int (x-2)\cos 7xdx$; $\int \cos^3(3x+2)dx$.

67. $\int \frac{2xdx}{x^2-x+2}$; $\int (2x+1)\sin(x^2+x)dx$; $\int \cos 3xe^{-\sin 3x}dx$;

$\int \cos^3 2xdx$; $\int \frac{x^2-3x}{2x+1}dx$; $\int \ln\sqrt[6]{3-2x}dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{2+5x}}$;

$\int \cos^4(5x+2)dx$; $\int \sin 2x\cos 3xdx$; $\int \sqrt{\frac{2x+3}{x-2}}dx$.

68. $\int \cos 5xe^{-\sin 5x}dx$; $\int (x+2)^2\cos 2xdx$; $\int \frac{dx}{(x-3)(x+1)}$;

$\int \cos 3x\sqrt{\sin 3x}dx$; $\int \ln\sqrt[4]{2x+1}dx$; $\int arctg\,6xdx$; $\int \sqrt{\frac{x}{2x+1}}dx$;

$\int \frac{dx}{4+2\sin x}$; $\int \frac{dx}{x^2+2x}$; $\int x^2e^{x^3+1}dx$.

69. $\int x\cos(x^2+2)dx$; $\int \sqrt{x-2}e^{\sqrt{x-2}}dx$; $\int \frac{e^{\arccos\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{x}}dx$;

$\int \frac{dx}{x^2+3x+10}$; $\int \frac{5x}{2x+1}dx$; $\int x^3e^{x^4+1}dx$; $\int \ln^2(2x-3)dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x}}$;

$\int \frac{dx}{(x+2)\ln(x+2)}$; $\int \frac{\sin^2\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}}dx$.

70. $\int(5+2x)^{-\frac{1}{2}}dx$; $\int\frac{(\arcsin x)^4}{\sqrt{1-x^2}}dx$; $\int 2x\sin(3x+2)dx$; $\int\frac{dx}{x^2-x+2}$; $\int\frac{dx}{x^2-5}$; $\int x^2\ln\sqrt[4]{x}dx$; $\int\sqrt{25x^2+1}dx$; $\int\cos^5(2x-1)dx$; $\int\sin^4(2x+1)dx$; $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+5}$.

71. $\int\sqrt{12-7x}dx$; $\int\frac{\cos\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}}dx$; $\int\frac{dx}{x(x^2+7)}$; $\int\frac{dx}{x+2\sqrt{x}}$; $\int\arcsin 7xdx$; $\int x\,arctg(x-3)dx$; $\int\frac{dx}{\cos^3(x-3)}$; $\int\cos^2 2x\sin^4 2xdx$; $\int\sqrt{4x^2-1}dx$; $\int\ln^2(x+1)dx$.

72. $\int\sqrt[3]{11-12x}dx$; $\int\frac{e^{-\sqrt{2+x}}}{\sqrt{2+x}}dx$; $\int arctg(3x-2)dx$; $\int\frac{dx}{x^2+6x+10}$; $\int\frac{dx}{x^3+2x^2+5x}$; $\int\frac{dx}{\sin^4(2x+1)}$; $\int\frac{\sqrt[4]{x}dx}{1+3\sqrt{x}}$; $\int e^{-2x}\sin 3xdx$; $\int\cos^3(3x+1)\sin^3(3x+1)dx$; $\int x^5\sin x^3dx$.

73. $\int\sqrt[6]{7x+2}dx$; $\int\frac{\sin\sqrt{3x+2}}{\sqrt{3x+2}}dx$; $\int\frac{dx}{x^2-x+4}$; $\int\frac{dx}{x(5x+1)}$; $\int 2x\cdot 4^{3x}dx$; $\int\frac{dx}{\cos^6 3x}$; $\int\frac{dx}{3+2\sqrt[4]{x}}$; $\int\sin^4 3xdx$; $\int\cos 5x\sin 3xdx$; $\int\sqrt{49-x^2}dx$.

74. $\int \frac{dx}{\sqrt[8]{3x+2}}$; $\int \frac{arctg^2(1-2x)}{4x^2-4x+2}dx$; $\int \frac{\cos\sqrt{3x}}{\sqrt{x}}dx$; $\int \frac{dx}{x^2+x+4}$;

$\int \frac{dx}{x(3x+1)}$; $\int \frac{dx}{\sin^4(3x+1)}$; $\int \frac{dx}{x-2\sqrt{x}}$; $\int (x+1)^2 \ln x dx$;

$\int \sin 3x \cos 2x dx$; $\int \sqrt{9x^2+1}dx$.

75. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{2-5x}}$; $\int \frac{e^{\sqrt{2x+1}}}{\sqrt{2x+1}}dx$; $\int (x-2)\cos 3x dx$; $\int tg^2 9x dx$;

$\int \frac{dx}{x(x+4)^2}$; $\int \cos 5x \sin 6x dx$; $\int \sqrt{x^2-x+3}dx$; $\int \frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt[3]{x}}dx$; $\int \frac{dx}{\cos^6 3x}$;

$\int ctg^2 5x dx$.

76. $\int \sqrt{7x+11}dx$; $\int \frac{\sin\sqrt{3x+2}}{\sqrt{3x+2}}dx$; $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$; $\int \frac{dx}{3+2\sqrt[3]{x}}$;

$\int \sqrt{x}\cos\sqrt{2x^3}dx$; $\int \cos 6x \sin 3x dx$; $\int \cos^4 x \sin^2 x dx$;

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+4}}$; $\int \frac{dx}{\sin^6(3x+1)}$; $\int xe^{-x^2}dx$.

77. $\int \frac{dx}{\sqrt{11x+3}}$; $\int \sqrt{5x}e^{7x\sqrt{x}}dx$; $\int \cos 4x \sin 5x dx$; $\int \sin^3 8x dx$;

$\int 3x\cos 5x dx$; $\int \cos^4 7x dx$; $\int \frac{dx}{x^2+3x}$; $\int \frac{dx}{x^2(2x^2+12)}$;

$\int \frac{dx}{x^2+3x+7}$; $\int \sqrt{4+x^2}dx$.

78. $\int \sqrt{4+5x}\,dx$; $\int \frac{dx}{\sin^6 5x}$; $\int \sqrt{16x^2+6}\,dx$; $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{5+2\sqrt{x}}$;

$\int 5x^3 \sin 3x^2 dx$; $\int \cos^2 7x dx$; $\int 2x^2 e^{-5x} dx$; $\int \frac{dx}{3+2\sin x}$;

$\int \frac{dx}{x(x+3)(x^2+7)}$; $\int \frac{dx}{x^2-9x+20}$.

79. $\int \frac{arctg^2 5x}{1+25x^2} dx$; $\int \frac{dx}{x(x+7)^2}$; $\int \sqrt{\frac{1-3x}{2+x}}\,dx$; $\int \frac{dx}{\cos^3 3x}$;

$\int (3x-1)\cos 5x dx$; $\int \cos^4(2x+1)dx$; $\int \ln^2(8x)dx$; $\int \sqrt{9x^2-1}\,dx$;

$\int \frac{dx}{x^2+5x+6}$; $\int \frac{e^{\sqrt{5x}}}{\sqrt{x}} dx$.

80. $\int tg^2 7x dx$; $\int \frac{dx}{5-3x}$; $\int \sqrt{5x}\, e^{\sqrt{3x}} dx$; $\int \frac{dx}{x(3x+2)^2}$;

$\int \arcsin 3x dx$; $\int \frac{dx}{\sin^4 5x}$; $\int \ln(x+5)dx$; $\int \frac{2x}{3+2x^2} dx$; $\int \frac{dx}{x(16x^2+1)}$;

$\int \frac{dx}{x \ln 3x}$.

81. $\int sh^2 3x dx$; $\int e^{7x} \ln(1+e^{7x})dx$; $\int tg^3 3x dx$; $\int \frac{dx}{(x+3)(x-2)}$;

$\int \frac{tg(\ln 5x)}{x} dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{9x+5}}$; $\int \frac{dx}{x^2+x+10}$; $\int x^2 e^{-5x} dx$;

$\int \sin 6x \cos x dx$; $\int x \ln(7x+9)dx$.

82. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(2x-4)}$; $\int\frac{dx}{\sqrt{7x+5}}$; $\int\frac{4x}{2+11x}dx$; $\int\frac{dx}{(x-3)(x+9)}$;
$\int x\,arctg\,5x\,dx$; $\int x^5e^{-2x^6}dx$; $\int\sin^3(2x-4)dx$; $\int ch^2 3x\,dx$; $\int\cos^4(2x-3)dx$;
$\int x\ln(7x+5)dx$.

83. $\int\sqrt{11-x^2}\,dx$; $\int e^{-3x}\cos 2x\,dx$; $\int(2x-1)\cos 5x\,dx$; $\int 2\ln\sqrt{2x+1}\,dx$;
$\int(x-2)\sin^2 3x\,dx$; $\int(x-2)^2e^{-2x}dx$; $\int\frac{dx}{x(x+3)(x+2)}$; $\int\frac{dx}{\cos^3(2x+3)}$;
$\int\frac{dx}{5+\sqrt{2x-1}}$; $\int\frac{dx}{x^2+4x+9}$.

84. $\int\frac{dx}{x^4+x^2}$; $\int\frac{3x+2}{2x-3}dx$; $\int\frac{tg\sqrt{3x-2}}{\sqrt{3x-2}}dx$; $\int\frac{e^{\frac{1}{x+3}}}{(x+3)^2}dx$;
$\int arctg\,9x\,dx$; $\int x\cos^2(2x-3)dx$; $\int\cos 2x\cos 3x\,dx$; $\int\ln(2+7x)dx$;
$\int\sqrt{x^2+10}\,dx$; $\int\sqrt{11x+3}\,dx$.

85. $\int tg^2(3x+2)dx$; $\int 2\sin^2(7x-2)dx$; $\int\ln(2x-3)^2dx$;
$\int\frac{dx}{x(3x+2)(x-2)}$; $\int\frac{\sqrt{\ln(x+2)}}{x+2}dx$; $\int\frac{\cos\frac{1}{2x+1}}{2x+1}dx$; $\int\frac{dx}{\cos(2x-1)}$;
$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$; $\int(x+2)e^{-3x}dx$; $\int arctg(5x+1)dx$.

86. $\int\frac{dx}{x^4+3x^2}$; $\int\frac{\sin\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}dx$; $\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x}+1}$; $\int e^{e^x+1}dx$;
$\int(x-2)e^{-3x}dx$; $\int\sqrt{16-x^2}\,dx$; $\int\cos 3x\cos 5x\,dx$; $\int\sin^2 2x\cos^4 2x\,dx$;
$\int\frac{dx}{4+3\cos 2x}$; $\int\frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

87. $\int\frac{dx}{\sqrt[5]{2+5x}}$; $\int\frac{e^{\sqrt{3x}}}{\sqrt{x}}dx$; $\int\frac{dx}{x(2x+3)}$; $\int\frac{dx}{x^2-2x+7}$;

$\int x\cos(5x+3)dx$; $\int x^2\ln 5x dx$; $\int\sin 5x\cos 7x dx$; $\int tg^2 5x dx$;

$\int\sqrt{2x^2+7}dx$; $\int\frac{\sqrt[3]{2x}}{1+\sqrt{x}}dx$.

88. $\int\frac{dx}{\sqrt[9]{2x-9}}$; $\int\frac{\arcsin 11x}{\sqrt{1-121x^2}}dx$; $\int\frac{dx}{x^2-2x+4}$; $\int\frac{dx}{4x^2-1}$;

$\int 5\ln\sqrt[7]{x+2}dx$; $\int x^2e^{-5x+1}dx$; $\int e^{-3x}\cos 2x dx$; $\int\frac{x^3}{2x-3}dx$; $\int\frac{dx}{\sin^4(3x-2)}$;

$\int\sqrt{9x^2-1}dx$.

89. $\int\frac{dx}{\sqrt[9]{3-13x}}$; $\int\frac{\cos\sqrt{2+3x}}{\sqrt{2+3x}}dx$; $\int\frac{dx}{16x^2-1}$; $\int\frac{x^3dx}{2x+1}$;

$\int\ln(2x-1)dx$; $\int x^3\ln(2x+1)dx$; $\int\frac{dx}{x^2-x+9}$; $\int\frac{dx}{3-2\sin x}$; $\int\frac{\sqrt{x}}{5-2x}dx$;

$\int\sqrt{25x^2+1}dx$.

90. $\int\sqrt[4]{7x+5}dx$; $\int\frac{arctg^3 5x}{25x^2+1}dx$; $\int(2x-1)e^{-3x}dx$; $\int\frac{dx}{x^2-6x+9}$;

$\int\frac{dx}{x(9x^2+1)}$; $\int\frac{dx}{2-\sin 4x}$; $\int\frac{dx}{2\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}$; $\int x^4 arctg x^5 dx$;

$\int\frac{dx}{\sin^4(2x+1)}$; $\int\sqrt{x^2-2x+3}dx$.

91. $\int\frac{x}{x^2-2x+3}dx$; $\int(x-3)\sin\left(\frac{x^2}{2}-3x\right)dx$; $\int\frac{x^2+1}{2x-1}dx$; $\int\frac{dx}{\sqrt{4+7x}}$;

$\int\sin^3 5x dx$; $\int\sin 5x e^{-\cos 5x}dx$; $\int\frac{dx}{3-2\cos 2x}$; $\int\ln\sqrt[3]{2+3x}dx$;

$\int\sin 3x\cdot\cos 2x dx$; $\int\sqrt{\frac{2x+1}{x-2}}dx$.

92. $\int \cos 7x e^{-\sin 7x} dx$; $\int \frac{dx}{(2x+1)(x-2)}$; $\int \sqrt{\frac{3+x}{2x-1}} dx$; $\int \frac{dx}{x^2-3x}$;

$\int (2x-1)^2 \sin 2x dx$; $\int \ln \sqrt[5]{x+5} dx$; $\int x^3 e^{x^4+2} dx$; $\int \frac{dx}{3-\cos 2x}$;

$\int \cos 5x \sqrt{\sin 5x} dx$; $\int arctg 5x dx$.

93. $\int x^2 (\cos^3 x - 1) dx$; $\int \sqrt{x+3} e^{-\sqrt{x+3}} dx$; $\int \frac{e^{arctgx}}{1+x^2} dx$;

$\int \frac{dx}{x^2-x+9}$; $\int \frac{9x dx}{5x+2}$; $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-1}}$; $\int \frac{dx}{(x-3)\ln(x-3)}$;

$\int \ln^2 (3x-2) dx$; $\int \frac{\cos^2 \sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}} dx$.

94. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{2-4x}}$; $\int \frac{(\arcsin x)^5}{\sqrt{1-x^2}} dx$; $\int \frac{dx}{x^2-2x+8}$; $\int \frac{dx}{3x^2-1}$;

$\int x \sin(7x-3) dx$; $\int x^4 \ln \sqrt[3]{x} dx$; $\int \sin^5 (x+3) dx$; $\int \sin^4 (2x-2) dx$;

$\int \sqrt{9x^2-11} dx$; $\int \frac{dx}{3\sqrt{x}-4}$.

95. $\int \sqrt{7-11x} dx$; $\int \frac{\sin \sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}} dx$; $\int \frac{dx}{x(x^2+9)}$; $\int \frac{dx}{x-3\sqrt{x}}$;

$\int \arcsin 3x dx$; $\int \frac{dx}{x^2-2x+11}$; $\int x arctg(x+5) dx$; $\int \cos^2 2x \sin^4 2x dx$;

$\int \frac{dx}{\cos^3 (x+1)}$; $\int \sqrt{9x^2-1} dx$.

96. $\int \sqrt[4]{9+15x} dx$; $\int \frac{e^{\sqrt{x+5}}}{\sqrt{x+5}} dx$; $\int \frac{dx}{x^2+7x+14}$; $\int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{1+\sqrt[3]{x}}$;

$\int arctg(2x+1) dx$; $\int \frac{dx}{x^3+x^2+x}$; $\int e^{-5x} \sin 4x dx$;

$\int \cos^3 (3x-2) \sin^3 (3x-2) dx$; $\int \frac{dx}{\sin^4 (3x+2)}$; $\int x^5 \cos x^3 dx$.

97. $\int \sqrt[5]{2+3x}\,dx$; $\int \frac{\cos\sqrt{3x+2}}{\sqrt{3x+2}}dx$; $\int \frac{dx}{x(4x-2)}$; $\int \frac{dx}{\cos^6 2x}$;

$\int x2^{5x}dx$; $\int \frac{dx}{x^2-x+12}$; $\int \cos 11x \sin x dx$; $\int \frac{dx}{2+3\sqrt{x}}$; $\int \cos^4 5x dx$;

$\int \sqrt{25-x^2}\,dx$.

98. $\int \frac{dx}{\sqrt[9]{5-3x}}$; $\int \frac{arctg(3x+1)}{9x^2+6x+2}dx$; $\int \frac{\cos\sqrt{5x+1}}{\sqrt{5x+1}}dx$; $\int \frac{dx}{x^2+x+2}$;

$\int (x-1)^2 \ln x dx$; $\int \sin 3x \cos 4x dx$; $\int \frac{dx}{3x(x+1)}$; $\int \sqrt{4+x^2}\,dx$;

$\int \frac{dx}{\sin^4(2x-1)}$; $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+x}$.

99. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{3x+1}}$; $\int \frac{e^{\sqrt{x-2}}}{\sqrt{x-2}}dx$; $\int \frac{dx}{x(x+7)^2}$; $\int \frac{\sqrt{x}dx}{2+\sqrt{x}}$;

$\int (x+3)\sin 6x dx$; $\int ctg^2 5x dx$; $\int \sqrt{x^2-2x+9}\,dx$;

$\int \cos 3x \cos 4x dx$; $\int \frac{dx}{\cos^6 5x}$; $\int tg^2 4x dx$.

100. $\int \sqrt{11x+13}\,dx$; $\int \frac{\sin\sqrt{7+5x}}{\sqrt{7+5x}}dx$; $\int \sqrt{x}\sin\sqrt{4x^3}\,dx$;

$\int \frac{dx}{x^2-2x+9}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+9}}$; $\int \frac{dx}{2+3\sqrt[3]{x}}$; $\int \frac{dx}{\sin^6(2x-1)}$;

$\int \cos 5x \sin 3x dx$; $\int x^4 e^{-x^5}dx$; $\int \cos^4 2x \sin^2 2x dx$.

Завдання 11. Визначений інтеграл

Обчислити визначені інтеграли:

1. $\int_1^e \frac{dx}{x(1+ln^2x)}$; $\int_1^2 xe^{-x}dx$; $\int_1^2 \frac{x^2}{x^2(x^2+1)}dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3xcos^3xdx$.

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^{sinx}cosxdx$; $\int_0^{\frac{\pi}{6}} xcos3xdx$; $\int_0^1 \frac{5x^2-x+1}{(x-7)(x^2+4)}dx$; $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{cos2x}{sin^5 2x}dx$.

3. $\int_2^0 x\sqrt[6]{5-x^2}dx$; $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} xsinxcosxdx$; $\int_1^2 \frac{x^2-3x+2}{(x^2+4x+20)x}dx$; $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+cosx}$.

4. $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{x^3dx}{\sqrt{3-x^4}}$; $\int_1^2 xe^{-3x}dx$; $\int_{-1}^0 \frac{(x+1)dx}{(x-1)(x^2+2)}$; $\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} sin^2(\omega t+\varphi_0)dt$;

5. $\int_1^e \frac{ln^2x}{x}dx$; $\int_0^{\pi} xsin3xdx$; $\int_1^3 \frac{(3x+2)dx}{(x^2-x+3)x}$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^3xdx$;

6. $\int_0^1 xe^{-3x^2}dx$; $\int_0^1 xarctgxdx$; $\int_0^1 \frac{dx}{x^3+27}$; $\int_0^{\frac{\pi}{9}} \frac{dx}{cos^6 3x}$;

7. $\int_e^2 \frac{dx}{xln^2x}$; $\int_1^{e^2} \frac{lnx}{\sqrt{x}}dx$; $\int_2^3 \frac{x^5+4x-1}{x^2+x+5}dx$; $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} ctg^3 2xdx$;

8. $\int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$; $\int_0^{0.5} x\,e^{2x}dx$; $\int_1^3 \frac{3x-4}{x(x^2+6)}dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{sinx}{1-sinx}dx$.

9. $\int_1^4 \frac{xdx}{\sqrt{3x+5}}$; $\int_0^1 \ln(x^2+4)\,dx$; $\int_2^3 \frac{dx}{(x+1)(x^2+9)}$; $\int_0^{\frac{\pi}{7}} sin^4 7xdx$.

10. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; $\int_1^3 x^2lnxdx$; $\int_2^3 \frac{x^4-2}{x^3+1}dx$; $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{sin2xcos2x}$.

11. $\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xcosxdx$; $\int_{-2}^0 \frac{xdx}{(x-1)(x^2+4)}$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{cos^3 2x}$.

12. $\int_0^3 x\sqrt{x+1}dx$; $\int_0^{e-1} \ln(x+1)\,dx$; $\int_0^1 \frac{(x^3+2x)dx}{x^2-x+3}$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^5xdx$.

13. $\int_0^3 \frac{4-x}{\sqrt{1+x}}dx$; $\int_0^{\pi} xsin2xdx$; $\int_2^3 \frac{(x+2)dx}{(x+1)(x^2+4)}$; $\int_0^1 sh^4xdx$.

14. $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$; $\int_1^e x\ln x dx$; $\int_0^1 \frac{(4x-3)dx}{2x^2-4x+6}$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^3 x}$.

15. $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$; $\int_1^e \ln^2 x dx$; $\int_0^{0.5} \frac{(3x-2)dx}{(x-1)(x^2+2)}$.

16. $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^8+1}dx$; $\int_0^1 x e^{-x}dx$; $\int_1^2 \frac{(x^3+1)dx}{x^2+x+4}$; $\int_0^{\pi} \sin^4 x dx$.

17. $\int_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$; $\int_2^{\pi} x\cos\frac{x}{2}dx$; $\int_2^3 \frac{dx}{(x-1)(x+x^3)}$; $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \sin 3x dx$.

18. $\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$; $\int_0^2 x^2 e^{-2x}dx$; $\int_1^2 \frac{(2x-1)dx}{x(2x^2+1)}$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cos 4x dx$.

19. $\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; $\int_0^{\frac{1}{2}} x\cos\pi x dx$; $\int_0^1 \frac{(x^2+3x)dx}{(x+1)(x^2+1)}$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \cos 4x dx$.

20. $\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx$; $\int_0^1 x\sin\pi x dx$; $\int_1^2 \frac{dx}{x(4x^2+5x+5)}$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x dx$.

21. $\int_1^e \frac{\ln 2x}{x\ln 4x}dx$; $\int_0^2 x\cos\frac{\pi x}{2}dx$; $\int_0^1 \frac{(x^2-1)dx}{2x^2-3x+6}$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx$.

22. $\int_0^1 \frac{arctg\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}dx$; $\int_0^{2\pi} x^2\cos x dx$; $\int_1^2 \frac{(x+1)dx}{x^4+4x^2}$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx$.

23. $\int_0^{-1} \frac{2x dx}{\sqrt{1-4^x}}$; $\int_1^3 arctg\sqrt{x}dx$; $\int_1^2 \frac{x^5-x+1}{x^4+x^2}dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos^4 2x dx$.

24. $\int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{4-e^x}}$; $\int_0^1 \arcsin\sqrt{x}dx$; $\int_1^2 \frac{x^4-x+1}{x^4+4x^2}dx$; $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^4 x}$;

25. $\int_1^5 x\sqrt{2x-1}dx$; $\int_0^{\sqrt{3}} x\,arctg x dx$; $\int_0^1 \frac{x dx}{x^4-9}$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^5 x}$.

26. $\int_0^2 x7^{x^2}dx$; $\int_0^{0.5} \arccos 7x dx$; $\int_1^2 \frac{x^2-x+1}{x(x^2-x+3)}dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^2 5x dx$.

27. $\int_1^2 e^{\frac{1}{x^2}}\frac{dx}{x^3}$; $\int_0^{e-1} \ln(x+1)dx$; $\int_0^1 \frac{x dx}{(x+3)(x^2+2)}$; $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} ctg^3 x dx$.

28. $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx;\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx;\ \int_2^3 \frac{(x^5+x)dx}{(x-1)(x^2+9)};\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x}.$

29. $\int_0^1 (e^x-1)^5 e^x dx;\ \int_2^3 \frac{x^3 dx}{(x-1)(x^2+x+4)};\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{1+\cos x}.$

30. $\int_0^3 \frac{2x+1}{\sqrt{4-x}}dx;\ \int_0^1 (x^2-1)e^{-x}dx;\ \int_2^3 \frac{(1-x)dx}{x^2(x^2+3)};\ \int_0^1 sh^3 x dx.$

31. $\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx;\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} (5x+6)\cos 2x dx;\ \int_{-1}^0 \frac{(x+4)dx}{(x-1)(x^2+5)};\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} ctg^4 x dx.$

32. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3};\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^2 x}dx;\ \int_{-1}^{-2} \frac{(x^3-1)dx}{x(x^2+9)};\ \int_0^{\pi} \sin 3x \cos 7x dx.$

33. $\int_1^5 x\sqrt{x-1}dx;\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} 3^x \cos 2x dx;\ \int_2^3 \frac{(7-4x)dx}{x(x^2+x+5)};\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x dx}{1+\cos^2 x}.$

34. $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \sin\frac{1}{x}\frac{dx}{x^2};\ \int_0^1 x^3 e^{-x^2}dx;\ \int_{-1}^0 \frac{x dx}{(x-1)(x^2+2)};\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{3+\sin^2 x}.$

35. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} ctg 3x dx;\ \int_0^2 (1+x)3^x dx;\ \int_2^3 \frac{3x+1}{x^3-1}dx;\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x dx}{1+\cos^2 x}.$

36. $\int_2^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6-1}};\ \int_1^e \frac{\ln(\ln x)}{x}dx;\ \int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^3+27};\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^4 x dx.$

37. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}};\ \int_0^1 x^2 e^{-x}dx;\ \int_1^2 \frac{(x^4+2)dx}{x(x^2+25)};\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx.$

38. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{\cos^2 x^2};\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-x)\sin 2x dx;\ \int_0^2 \frac{(1-2x)dx}{(x+4)(x^2+2)};\ \int_0^1 ch^4 x dx.$

39. $\int_1^3 x\sqrt{x+4}dx;\ \int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos 3x dx;\ \int_0^1 \frac{x dx}{x^3-8};\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 3x dx.$

40. $\int_0^1 x\sin(1-x^2)dx;\ \int_0^{\frac{\pi}{6}} x\sin 4x dx;\ \int_1^2 \frac{dx}{x(x^2+1)};\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 5x \cos x dx.$

41. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} ctgx dx$; $\int_0^1 (1-x)4^x dx$; $\int_2^3 \frac{xdx}{x^3-1}$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^2 x dx}{1+sin^2 x}$.

42. $\int_0^1 \frac{3^x dx}{1+3^{2x}}$; $\int_0^4 (x-4)e^{5x} dx$; $\int_1^2 \frac{x^5+x^4-8}{x^3+4x} dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{8}} cos^3 4x dx$.

43. $\int_{-1}^{ln\frac{1}{2}} \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$; $\int_0^1 (1-x) arctg 2x dx$; $\int_1^2 \frac{dx}{x^4+x^2}$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+cos2x}$.

44. $\int_1^4 \frac{3x+1}{\sqrt{3x+2}} dx$; $\int_0^1 \ln(x^2+1)\, dx$; $\int_2^3 \frac{dx}{1+x^3}$; $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} sin^4 3x dx$.

45. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{tgx}}{cos^2 x} dx$; $\int_0^1 ln^2(x+1) dx$; $\int_2^3 \frac{x^2 dx}{1-x^4}$; $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^2 x}{sin^3 x} dx$.

46. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(ctgx)^{\frac{2}{3}}}{sin^2 x} dx$; $\int_0^7 (x-7) sin5x dx$; $\int_2^3 \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cosx cos2x dx$.

47. $\int_0^1 x\sqrt[5]{5-x^2} dx$; $\int_9^{8+e} \ln(x-8)\, dx$; $\int_1^2 \frac{x^5+x^4-8}{x^3+4x} dx$; $\int_0^{\frac{1}{3}} sh^3 3x dx$.

48. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3^{sinx} codx dx$; $\int_0^1 x^2 5^x dx$; $\int_0^1 \frac{xdx}{(x-4)(x^2+1)}$; $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{sin^3 4x}$.

49. $\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\pi}} \frac{xdx}{sinx^2}$; $\int_0^1 arcsin\sqrt{x}\, dx$; $\int_1^2 \frac{(5x-3)dx}{x(x^2+x+4)}$; $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-cosx}$.

50. $\int_1^e \frac{dx}{x(4-ln^2 x)}$; $\int_{-4}^0 (x+4) cos\pi x dx$; $\int_0^1 \frac{dx}{x^3+8}$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{cos2x}$.

51. $\int_1^2 \frac{\ln(x^2+x+1)}{x^2+x+1}(2x+1) dx$; $\int_0^{\frac{1}{3}} arccos3x dx$; $\int_0^1 \frac{(x-2)dx}{x^2+2x+5}$; $\int_0^1 ch^3 2x dx$.

52. $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-lnx}}$; $\int_1^3 (x^2-4)ln2xdx$; $\int_2^3 \frac{x^4+2x-1}{x^3-1}dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{cos^3x.}$

53. $\int_0^1 \mathrm{x}\sqrt{1-\mathrm{x}}\mathrm{dx}$; $\int_0^{\frac{1}{5}-\frac{e}{5}} \ln(1-5x)\,dx$; $\int_0^1 \frac{(x^3+4)dx}{x^2+x+3}$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^5 3xdx.$

54. $\int_2^3 \frac{xdx}{(x^2-1)^3}$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2+1)cosxdx$; $\int_{-2}^0 \frac{(3x+4)dx}{(x+3)(x^2+4)}$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{sin^3 2x}.$

55. $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}(4-\mathrm{ln}^2\mathrm{x})}$; $\int_1^2 (1-x)2^{-x}dx$; $\int_0^1 \frac{(x^2-5x+1)dx}{(x+7)(x^2+4)}$; $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{cos3x}{sin^3 3x}dx.$

56. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} sinxdx$; $\int_0^1 arctg\sqrt{x}dx$; $\int_1^2 \frac{dx}{(x+2)(x^2+1)}$; $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-cosx}.$

57. $\int_0^2 \mathrm{x}\sqrt[5]{5+x^2}\mathrm{dx}$; $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} xsin3xcos3xdx$; $\int_1^2 \frac{x^2+3x+2}{x(x^2+3x+4)}dx$; $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^2 2xdx.$

58. $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{x^3dx}{\sqrt{3+x^4}}$; $\int_1^2 (x+1)e^{-3x}dx$; $\int_{-1}^0 \frac{(2x-1)dx}{(x-2)(x^2+4)}$; $\int_0^{\frac{\pi}{10}} cos^2(\omega t+\varphi)dt.$

59. $\int_1^e \frac{ln^2 3x}{x}dx$; $\int_2^{\pi} (2x+1)sin3xdx$; $\int_1^2 \frac{(x-2)dx}{x(x^2+x+3)}$; $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}+1} cos^3(2x-1)dx.$

60. $\int_0^1 4xe^{-2x^2}dx$; $\int_0^1 xarctg2xdx$; $\int_0^1 \frac{xdx}{x^3-2x}$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{cos^6 4x}$;

61. $\int_1^e \frac{dx}{xln^2 2x}$; $\int_0^{0.5} (3x-1)e^{2x}dx$; $\int_2^3 \frac{(x^5-1)dx}{x^2+x+5}$; $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{8}} ctg^3 5xdx.$

62. $\int_0^4 \frac{x+3}{\sqrt{1+2x}}dx$; $\int_1^{e^2} \frac{ln2x}{\sqrt{x}}dx$; $\int_1^3 \frac{x+3}{x(x^2+9)}dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{sin2xdx}{1+sin2x}.$

63. $\int_0^3 \frac{4+3x}{\sqrt{1+x}}dx$; $\int_0^{\pi} (1-3x)sinxdx$; $\int_2^3 \frac{(2x-1)dx}{(x-1)(x^2+4)}$; $\int_{0.1\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{sin^6 x}.$

64. $\int_2^3 \frac{e^x dx}{1-e^{2x}}$; $\int_1^e (1-x^2)lnxdx$; $\int_0^1 \frac{(3+x)dx}{x^2-4x+6}$; $\int_{\frac{-1}{5}}^{\frac{\pi}{5}-1} \frac{dx}{cos^3(5x+1)}.$

65. $\int_1^e \frac{\sin(\ln 2x)}{x}dx$; $\int_1^e \ln^2 5x dx$; $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2+9)}$; $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 2x}{son^2 x}dx$.

66. $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^8+1}$; $\int_0^1 (x+4)e^x dx$; $\int_0^1 \frac{(x^3+2)dx}{x^2-x+4}$; $\int_0^{\pi} \sin^4 3x dx$.

67. $\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{5-3x}}$; $\int_0^{\pi} (4-3x)\cos\frac{x}{2}dx$; $\int_2^3 \frac{dx}{(x+1)(x+x^3)}$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \sin 6x dx$.

68. $\int_1^e \frac{\cos(\ln\sqrt{x})}{x}dx$; $\int_0^2 (4-x^2)e^{2x}dx$; $\int_1^2 \frac{(2x+3)dx}{x(4x^2+1)}$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 3x \cos 5x dx$.

69. $\int_{0.25}^1 \frac{\cos 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; $\int_0^{\frac{1}{2}} (2-x)\cos\pi x dx$; $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{(x+2)(x^2+1)}$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cos 2x dx$.

70. $\int_0^2 \sqrt{2x+5}\,dx$; $\int_0^1 (3x-2)\sin\pi x dx$; $\int_0^1 \frac{x+1)dx}{(x+2)(x^2+x+5)}$; $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x \sin 3x dx$.

71. $\int_1^e \frac{\ln 4x dx}{x \ln 8x}$; $\int_0^2 (x+3)\cos\frac{\pi x}{2}dx$; $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{2x^2+3x+16}$; $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^5 2x dx$.

72. $\int_0^{-1} \frac{3^x dx}{\sqrt{1-9^x}}$; $\int_1^3 arctg 5\sqrt{x}dx$; $\int_1^2 \frac{(x^3-1)dx}{x^4+9x^2}$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2x \cos^2 2x dx$.

73. $\int_0^1 \frac{4^x dx}{\sqrt{1+16^x}}$; $\int_{-0.5}^0 \arccos\sqrt{1+x}dx$; $\int_1^2 \frac{(1+x)dx}{x^3+3x}$; $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^4 3x}$.

74. $\int_{0.5}^1 \frac{arctg 4\sqrt{x}}{(1+9x)\sqrt{x}}dx$; $\int_0^{\pi} (x^2+x+1)\cos x dx$; $\int_1^2 \frac{x^3-x+1)dx}{x^4+x^2}$; $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^4 6x dx$.

75. $\int_{-1}^3 (x+1)\sqrt{2x+3}dx$; $\int_0^1 (3-x) arctg x dx$; $\int_0^1 \frac{(x+1)dx}{x^4-16}$; $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{dx}{\cos^5 2x}$.

76. $\int_0^2 x 5^{x^2} dx$; $\int_0^{e-2} \ln(x+2)\,dx$; $\int_1^2 \frac{(x^2+1)dx}{x(x^2+x+4)}$; $\int_0^{\frac{\pi}{8}} tg^2 3x dx$.

77. $\int_1^2 e^{\frac{1}{x^4}} \frac{dx}{x^5}$; $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$; $\int_0^1 \frac{(x-1)dx}{(x-3)(x^2+4)}$; $\int_{\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{8}} ctg^3 4x dx$.

78. $\int_1^e \frac{1+\ln^2 x}{x}dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} sin dx$; $\int_2^3 \frac{(x^5+x)dx}{(x-1)(x^2+9)}$; $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{dx}{\cos^6 2x}$.

79. $\int_0^1 (e^x+1)^4 e^x dx$; $\int_0^1 \frac{(x+1)dx}{e^{2x}}$; $\int_2^3 \frac{(x-4)dx}{(x-1)(x^2+x+4)}$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosxdx}{1+2cosx}$.

80. $\int_0^3 \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{4+3x}}$; $\int_0^1 (x+1)e^{3x}dx$; $\int_2^3 \frac{(x+1)dx}{x^2(x^2+3)}$; $\int_0^1 sh^3 2xdx$.

81. $\int_4^9 \frac{(x+1)dx}{4+\sqrt{x}}$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 5xcos3xdx$; $\int_{-1}^0 \frac{xdx}{(x+2)(x^2+4)}$; $\int_0^{\frac{\pi}{12}} ctg^4 3xdx$.

82. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(5-x)^3}$; $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{cos^2 x}$; $\int_{-4}^{-1} \frac{(x^3+2)dx}{x(x^2+9)}$; $\int_0^{\pi} sin7xcos3xdx$.

83. $\int_1^5 x\sqrt{1+4x}dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2xcosxdx$; $\int_2^3 \frac{(3-x)dx}{(x^2+2x+8)}$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin4xdx}{1+cos^2 2x}$.

84. $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} sin\frac{1}{x^2}\frac{dx}{x^3}$; $\int_0^1 (1-x)e^{5x}dx$; $\int_0^1 \frac{(x+2)dx}{x^4-16}$; $\int_0^{\frac{\pi}{16}} sin^6 2xdx$.

85. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$; $\int_1^e \frac{ln^2 3x}{x^2}dx$; $\int_{-1}^0 \frac{xdx}{(x+3)(x^2+4)}$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{1+sin^2 x}dx$.

86. $\int_2^3 \frac{xdx}{\sqrt{x^4-1}}$; $\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(2x+1)\,dx$; $\int_0^1 \frac{(x+1)dx}{x^3+8}$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^2 xsin^4 xdx$.

87. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{1-16x^4}}$; $\int_0^1 \frac{x}{e^{2x}}dx$; $\int_1^2 \frac{(x^3-1)dx}{(x+4)(x^2+1)}$; $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{sin^2 2xdx}{cos^4 2x}$.

88. $\int_{0.5}^1 \frac{xdx}{sin^2 x^2}$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+2)sin3xdx$; $\int_0^1 \frac{(x+2)dx}{x^4-16}$; $\int_0^{\frac{\pi}{16}} sin^6 2xdx$.

89. $\int_1^3 x\sqrt{4-x}dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{8}} xcos5xdx$; $\int_0^1 \frac{(x-1)dx}{x^3-8}$; $\int_0^{\frac{\pi}{10}} sin^4 2xdx$.

90. $\int_0^1 xsin(1+x^2)dx$; $\int_0^1 (x+2)arctgxdx$; $\int_1^2 \frac{dx}{x(x^2+4)}$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxcos5xdx$.

91. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} ctg3xdx$; $\int_0^2 (1+x)3^x dx$; $\int_2^3 \frac{3x+1}{x^3-1}dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^2 xdx}{1+cos^2 x}$.

92. $\int_0^1 \frac{5xdx}{1+5^{2x}}$; $\int_1^e (x-1)lnxdx$; $\int_1^2 \frac{(x^5+4)dx}{x^3+9x}$; $\int_0^{\frac{\pi}{6}} cos^3 6xdx$.

93. $\int_{-1}^{ln\frac{1}{2}} \frac{2^x dx}{\sqrt{1-2^{2x}}}$; $\int_0^1 arctg\sqrt{x}dx$; $\int_1^2 \frac{(1-x)dx}{x(x^2+1)}$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+sin2x}$.

94. $\int_1^4 \frac{xdx}{\sqrt{3x+5}}$; $\int_0^1 \ln(x^2+4)\,dx$; $\int_2^3 \frac{dx}{(x+1)(x^2+9)}$; $\int_0^{\frac{\pi}{7}} sin^4 7xdx$.

95. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{ctgx}}{sin^2 x}dx$; $\int_0^1 ln^2 x+5)dx$; $\int_0^1 \frac{dx}{81-x^4}$; $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{cos^2 3xdx}{sin^3 3x}$.

96. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{tg^{\frac{2}{3}}x}{cos^2 x}dx$; $\int_0^7 (x+7)cos5xdx$; $\int_2^3 \frac{(x+1)dx}{(x-1)(x^2+1)}$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cosxcos3xdx$.

97. $\int_0^1 x\sqrt[3]{2-x^2}dx$; $\int_8^{7+e} (x-7)\ln(x-7)\,dx$; $\int_1^2 \frac{(x^5+2)dx}{x^3+4x}$; $\int_0^{\frac{1}{5}} sh^4 5xdx$.

98. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4^{sinx} cosxdx$; $\int_0^1 \arcsin(x^2+1)\,dx$; $\int_1^2 \frac{dx}{x(x^3+8)}$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{sin2x}$.

99. $\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{xdx}{\cos(x^2)}$; $\int_0^1 (x^2+1)3^x dx$; $\int_0^1 \frac{(x+2)dx}{(x+4)(x^2+1)}$; $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{sin^3 3x}$.

100. $\int_1^e \frac{dx}{x(4+ln^2 x)}$; $\int_0^1 arccos\sqrt{x}dx$; $\int_0^1 \frac{(x-1)dx}{x^2+x-5}$; $\int_0^2 ch^3 2xdx$.

Завдання 12. Теорема про середнє значення визначеного інтегралу

Знайти середнє значення функції *f(x)* на інтервалі $[a,b]$ і точку, в якій досягається це значення

1. $f(x) = sin2x, \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$
2. $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}, [1,4].$
3. $f(x) = sin^2 x\,,\ [0,\pi].$
4. $f(x) = \sqrt{x}\,, [0,100].$
5. $f(x) = 10 + 2sinx, [0,2\pi].$
6. $f(x) = \sqrt[3]{x}, [-1,8].$
7. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right].$
8. $f(x) = x^3, [-1,2].$
9. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, [1,4].$
10. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right].$
11. $f(x) = \sqrt[3]{x-1},\ [2,9].$
12. $f(x) = e^{3x},\ [1,\ 2].$
13. $f(x) = 2^{3x}, [0,2].$
14. $f(x) = \frac{1}{x}, [2,4].$
15. $f(x) = \frac{1}{2x-1}, [1,2].$
16. $f(x) = \frac{x^2}{1+x^6}, [0,1].$
17. $f(x) = \frac{1}{xlnx}, [2,4].$
18. $f(x) = sh^3 x, [0,2].$
19. $f(x) = xcos^2 x, [1,2].$
20. $f(x) = cos^2 x, \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$
21. $f(x) = \frac{4}{2x+1}, [2,4].$
22. $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}, [0,4].$
23. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}, [4,9].$
24. $f(x) = \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}, [1,2].$
25. $f(x) = \frac{coslnx}{x},\ [1,e].$
26. $f(x) = cos^3 x, \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$
27. $f(x) = ch^3 3x, \left[0, \frac{1}{3}\right].$
28. $f(x) = \frac{1}{x^2}, [1,2].$
29. $f(x) = \sqrt{2-x}, [2,6].$
30. $f(x) = \frac{1}{x^2-1}, [-2,-3].$
31. $f(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}, [0,1].$
32. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{25+3x}}, [0,-3].$
33. $f(x) = chx, [0,1].$
34. $f(x) = sec^2 x, \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right].$
35. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$
36. $f(x) = tgx, \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right].$
37. $f(x) = \sqrt[4]{x, [1,3]}.$
38. $f(x) = \frac{1}{x^2+x-2}, [2,3].$

39. $f(x) = \frac{arctgx}{1+x^2}, [0,1].$

40. $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}, [1,2].$

41. $f(x) = x\, 7^{x^2}, [1,2].$

42. $f(x) = e^x - e^{-x}, [0,1].$

43. $f(x) = \frac{arctg\frac{x}{2}}{4+x^2}, [0,2].$

44. $f(x) = \frac{x^2}{1+x^6}, [0,1].$

45. $f(x) = \frac{x}{cos^2x^2}, \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$

46. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} 5^{\sqrt{x}}, [0,1].$

47. $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}, [0,1].$

48. $f(x) = cos\frac{x}{\sqrt{2}}, \left[0, \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right].$

49. $f(x) = \frac{\sqrt{tgx}}{cos^2x}, \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$

50. $f(x) = thx, [0,1].$

51. $f(x) = sinx, [0,\pi].$

52. $f(x) = 3 + 2cosx, [-\pi,\pi].$

53. $f(x) = sin5x, \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$

54. $f(x) = x^2 + x, [0,3].$

55. $f(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, [1,4].$

56. $f(x) = cos^2 3x, [0,\pi].$

57. $f(x) = \sqrt{1+2x}, \quad [0,10].$

58. $f(x) = 10 - sinx, [0,2\pi].$

59. $f(x) = \sqrt[3]{x-3}, [0,8].$

60. $f(x) = \frac{1}{1+2x^2}, \left[\frac{1}{2}, 2\right].$

61. $f(x) = x^3 + x, [-1,2]$

62. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}, [2,4].$

63. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}, \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right].$

64. $f(x) = \sqrt[3]{x+1}, [2,5].$

65. $f(x) = 4^{2x}, [0,2].$

66. $f(x) = \frac{1}{x-1}, [2,4].$

67. $f(x) = \frac{1}{2x+1}, [1,2].$

68. $f(x) = \frac{x^2}{2^6+x^6}, [0,1].$

69. $f(x) = \frac{1}{x+7}, [0,1].$

70. $f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}, [2,4].$

71. $f(x) = cos^2 4x, \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$

72. $f(x) = ch^3 2x, [0,2].$

73. $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}, [0,8].$

74. $f(x) = \frac{3}{3x-2}, [3,4].$

75. $f(x) = x^2 cosx^3, [1,2].$

76. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4}, [4,9]$

77. $f(x) = \frac{1}{x^3} e^{\frac{5}{x^3}}, [1,2].$

78. $f(x) = \frac{sinlnx}{x}, [1,e].$

79. $f(x) = cos^3 2x, \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$

80. $f(x) = ch^2 2x, \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

81. $f(x) = \frac{1}{x^5}, [1,2]$.

82. $f(x) = \sqrt{x+2}, [-2,4]$.

83. $f(x) = \frac{1}{x^2-4}, [5,7]$.

84. $f(x) = \frac{2^x}{1+2^{2x}}, [0,1]$.

85. $f(x) = tgx, \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$.

86. $f(x) = \sqrt[4]{2x+3}, [0,1]$.

87. $f(x) = \frac{1}{cos^2 3x}, \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$.

88. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}, [0,2]$.

89. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{25-3x}}, [0,3]$.

90. $f(x) = ch5x, [0,1]$.

91. $f(x) = \frac{1}{x^2-x+1}, [2,3]$.

92. $f(x) = \frac{arctgx}{1+x^2}, [0,1]$.

93. $f(x) = \frac{x}{sin^2 x^2}, \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

94. $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} e^{\frac{1}{x+1}}, [1,2]$.

95. $f(x) = \frac{3^x}{\sqrt{1+3^{2x}}}, [0,1]$.

96. $f(x) = \frac{\sqrt{ctgx}}{sin^2 x}, \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

97. $f(x) = 2 + cos5x, \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

98. $f(x) = \frac{sinx}{\sqrt{2}}, \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

99. $f(x) = \frac{arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x^2)}}, \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

100. $f(x) = \frac{1}{x^2} sin\frac{1}{x}, \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Завдання 13. Геометричні додатки визначених інтегралів. Обчислення площ

Обчислити площу фігури, обмежену лініями (зробити схематичне креслення)

1. *а)* $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ y^2 = \frac{3}{2}x; \end{cases}$ *б)* $\rho = 2\cos\varphi;$ *в)* $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2}\sin^3 t. \end{cases}$

2. *а)* $\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2, \\ y = 3x - \frac{1}{2}x^2; \end{cases}$ *б)* $\rho = 2(1 + \cos\varphi);$ *в)* $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \\ (0 \le t \le 2\pi). \end{cases}$

3. *а)* $\begin{cases} y = \sqrt[3]{x}, \\ x = 2, x = 4; \end{cases}$ *б)* $\rho = \sqrt{1 - tg\varphi};$ *в)* $\begin{cases} y = \sqrt{t}, \\ x = t^2(t-1)^2. \end{cases}$

4. *а)* $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2, \\ 2y = 3x - 2; \end{cases}$ *б)* $\rho = \frac{3}{2\pi}\varphi, \; (0 \le \varphi \le 2\pi);$ *в)* $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t), \\ (0 \le \varphi \le 2\pi). \end{cases}$

5. *а)* $\begin{cases} y = \sin x, \\ y = 2x, \\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ *б)* $\rho = 4\cos\varphi;$ *в)* $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$

6. *а)* $\begin{cases} y = e^x - 1, \\ y = e^{2x} - 3, \end{cases}$ *б)* $\rho = 2\sin 2\varphi;$ *в)* $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$

7. *а)* $\begin{cases} y^2 = x^3, \\ x + y = 1, \\ x = 0; \end{cases}$ *б)* $\rho = 3\cos 3\varphi;$ *в)* $\begin{cases} x = t^2 - 4, \\ y = t^3 - 4t. \end{cases}$

8. *а)* $\begin{cases} y = x^2, \\ y = -chx; \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} \rho = arctg\varphi, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{4}; \end{cases}$ *в)* $\begin{cases} x = t^2 + 2t, \\ y = t^3 + t. \end{cases}$

9. *а)* $\begin{cases} y = \arcsin x, \\ x = 0, y = \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ *б)* $\rho = \cos 5\varphi;$ *в)* $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t\left(\frac{1}{3} - t^2\right). \end{cases}$

10. *а)* $\begin{cases} y = \frac{2}{1+x^2}, \\ y = x^2; \end{cases}$ *б)* $\rho = 2(2 + \cos\varphi);$ *в)* $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \\ x = t, y = 2t. \end{cases}$

11. а) $\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2, \\ y = 3x - \frac{1}{2}x^2; \end{cases}$ б) $\rho = 2(1 + cos\varphi)$; в) $\begin{cases} x = a(t - sint), \\ y = a(a - cost), \\ 0 \le t \le 2\pi). \end{cases}$

12. а) $\begin{cases} y = ch2x, \\ y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = cos\varphi, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{4}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = t^2 - 1, \\ x = t^3 - t. \end{cases}$

13. а) $\begin{cases} 16x^2 + 25y^2 = 100, \\ y = 1, (y > 1); \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = 4cos3\varphi, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{6}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = t^2, \\ x = \frac{1}{3}(3t - t^3). \end{cases}$

14. а) $\begin{cases} y = lnx, \\ y = ln^2x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = 3\varphi, \\ 0 \le \varphi \le \frac{3\pi}{4}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = t^3 - 3t. \end{cases}$

15. а) $\begin{cases} y = x\sqrt{x}, \\ x + y = 2, \\ y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = 2sin2\varphi, \\ \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = \frac{1}{6}t^6, \\ y = 2\frac{1}{4}t^4. \end{cases}$

16. а) $\begin{cases} y = 2 - x^2, \\ y = x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = asin^3\frac{\varphi}{3}, \\ (a > 0) \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = t^2 + 2, \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t. \end{cases}$

17. а) $\begin{cases} y = sinx, \\ y = x, x = 0, x = \frac{\pi}{4}; \end{cases}$ б) $\rho = \sqrt{1 + 2sin\varphi}$; в) $\begin{cases} x = 2t^2, \\ y = t^5(t - 1). \end{cases}$

18. а) $\begin{cases} y = 3 - e^{x+1}, \\ x = 0, x = 1, y = 0; \end{cases}$ б) $\rho = 2(3 + cos\varphi)$; в) $\begin{cases} x = \sqrt{3}t^2, \\ y = t^3 - t. \end{cases}$

19. а) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}\sin(3x + 1), \\ x = 0, x = \frac{\pi}{6}; \end{cases}$ б) $\rho = a^2 sin^2\frac{\varphi}{4}$; в) $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2 - 2. \end{cases}$

20. а) $\begin{cases} y = e^{3+x}, \\ x = 0, y = 0, x = -3; \end{cases}$ б) $\rho = acos^3\varphi$; в) $\begin{cases} y = t^2 - 1, \\ x = 3t - t^3. \end{cases}$

21. а) $\begin{cases} y = lnx + 1, \\ y = 0, x = 1, x = e; \end{cases}$ б) $\rho = a(1 + sin\varphi)$; в) $\begin{cases} x = t^3 - 3t^2, \\ y = 2t - t^2. \end{cases}$

22. $a)\begin{cases} y = e^x + 4, \\ x + y = 6, x = 0, y = 0; \end{cases}$ $б)\rho = 2 + cos\varphi;$ $в)\begin{cases} x = t^3 - 2t^2, \\ y = 2t - t^2. \end{cases}$

23. $a)\begin{cases} y = x^2, \\ y = 4x^3; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho = a\varphi, \\ \varphi = 0, \varphi = 2\pi; \end{cases}$ $в)\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^4 + t^5. \end{cases}$

24. $a)\begin{cases} y = 2 + tgx, \\ x = 0, x = \frac{\pi}{4}; \end{cases}$ $б)\rho = \sqrt{ctg\varphi - 1};$ $в)\begin{cases} x = t^2(t-1)^2, \\ y = t^3. \end{cases}$

25. $a)\begin{cases} y = 2^x, \\ y = 0, x = 0, x = 3; \end{cases}$ $б)\rho = sin3\varphi;$ $в)\begin{cases} x = \frac{2}{3}(t^3 - 3t), \\ y = 2(t^2 + 1). \end{cases}$

26. $a)\begin{cases} y = cos5x, \\ y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{5}; \end{cases}$ $б)\rho = cos^2\varphi;$ $в)\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 4t - t^4. \end{cases}$

27. $a)\begin{cases} y = cos2x, \\ y = x^2, x - 0; \end{cases}$ $б)\rho = 4 - cos\varphi;$ $в)\begin{cases} x = \frac{1}{6}t^6, \\ y = 2 - \frac{1}{4}t^4; \end{cases}$

28. $a)\begin{cases} y = \ln(2x + 3), \\ y = 0, x = 0, x = 1; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho = tg\varphi, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{4}; \end{cases}$ $в)\begin{cases} y = t^2(t-1)^2, \\ x = t^2 - 1. \end{cases}$

29. $a)\begin{cases} y = \sqrt[3]{x} + 2, \\ y = 0, x = 1; \end{cases}$ $б)\rho = 1 - sin\varphi;$ $в)\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3. \end{cases}$

30. $a)\begin{cases} y = cos\frac{\pi x}{2}, \\ x + 1 = 1; \end{cases}$ $б)\rho^2 = 4cos2\varphi;$ $в)\begin{cases} x = t^3 - 3t, \\ y = t^2 - 1. \end{cases}$

31. $a)\begin{cases} y = x^2 + 3x, \\ y = 4 + x; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho = 4\left(1 + sin\frac{\varphi}{2}\right), \\ 0 \le \varphi \le 2\pi; \end{cases}$ $в)\begin{cases} y = t^4, \\ x = t - t^3. \end{cases}$

32. $a)\begin{cases} y = ch3x, \\ y = x^2, \\ x = 0, x = 1; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho = 1 - \varphi, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{4}; \end{cases}$ $в)\begin{cases} x = 6t^2, \\ y = t - t^3. \end{cases}$

33. $a)\begin{cases} y = 3ch2x, \\ y = 5; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho = tg\varphi, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{4}; \end{cases}$ $в)\begin{cases} y = t^2(t-1)^2, \\ x = t^2 - 1. \end{cases}$

34. $a)\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = 2x^2; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho = e^{\varphi}, \\ \varphi = 0, \varphi = \pi; \end{cases}$ $в)\begin{cases} x = t^3 - 3t, \\ y = t^2 - 4. \end{cases}$

35. $a)\begin{cases} y = e^x - 1, \\ y = e^{2x} - 3, \\ x = 0; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho = 2sin\varphi, \\ \varphi = \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ $в)\begin{cases} y = t^3 - 3t, \\ x = t^2 - 2. \end{cases}$

36. $a)\begin{cases} y = arcsinx, \\ x = 0, y = \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ $б)\rho = \sqrt{1 - 2cos^2\varphi};$ $в)\begin{cases} x = t^3 - 3t^2, \\ y = t^2 - 2t. \end{cases}$

37. $a)\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + y = 1, \\ x = 2, y = 2; \end{cases}$ $б)\rho = 2 - 3cos\varphi;$ $в)\begin{cases} x = 2t^2, \\ y = -5(t^4 + t^5). \end{cases}$

38. $a)\begin{cases} y = arccosx, \\ y = \frac{\pi}{2}, y = 0, x = 0; \end{cases}$ $б)\rho = 3 + 3cos\varphi;$ $в)\begin{cases} x = t^2 + 2t, \\ y = t^3 + t. \end{cases}$

39. $a)\begin{cases} y = x^2 - 3x, \\ x + y = 4; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho = \frac{1}{\varphi}, \\ \varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = \pi; \end{cases}$ $в)\begin{cases} x = acos^4t, \\ y = asin^4t, \\ x = 0, y = 0, \\ \left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$

40. $a)\begin{cases} y^2 = x^3, \\ y = 2, y = 0, x = 1; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho = 3 + cos4\varphi, \\ \rho = 2 - cos4\varphi; \end{cases}$ $в)\begin{cases} x = a(2cost - cos2t), \\ y = a(2sint - sin2t). \end{cases}$

41. $a)\begin{cases} y = x^2, \\ y = \sqrt{x}; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho = \frac{1}{\varphi + \frac{\pi}{2}}, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ $в)\begin{cases} x = 8at^3, \\ y = 3a(2t^2 - t^4). \end{cases}$

42. $a)\begin{cases} y = e^x - 2, \\ y = e^{3x} + 1, \\ x = -1, x = 0; \end{cases}$ $б)\rho = 5 + 2cos\varphi;$ $в)\begin{cases} x = t^4, \\ y = t - t^3. \end{cases}$

43. $a)\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2, \\ y = \frac{1}{8}x^3; \end{cases}$ $б)\rho^2 = cos2\varphi;$ $в)\begin{cases} x = \frac{1}{6}t^6, \\ y = 2 - \frac{1}{4}t^4. \end{cases}$

44. $a)\begin{cases} y = cosx, \\ y = sinx, \\ y = 0; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho = \frac{1}{sin\varphi}, \\ \varphi = \frac{\pi}{4}, \varphi = \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ $в)\begin{cases} y = t^3 - 1, \\ x = t^2(t-1)^2. \end{cases}$

45. $a)\begin{cases} y = 2sin3x, \\ x = 0, x = \frac{2\pi}{3}; \end{cases}$ $б)\rho^2 = -sin\varphi;$ $в)\begin{cases} x = 4\sqrt{2}asint, \\ y = asin2t. \end{cases}$

46. $a)\begin{cases} y = \frac{1}{x}, \\ x = 1, x = 4; \end{cases}$ $б)\rho = \sqrt{cos2\varphi};$ $в)\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = t^2(t-1)^2. \end{cases}$

47. $a)\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ y = 0; \end{cases}$ $б)\rho = 1 + cos\varphi;$ $в)\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = \sqrt{t(1-t)}, \\ y = 0. \end{cases}$

48. $a)\begin{cases} y = \frac{1}{x-1}, \\ x = 2, x = 3; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho = 3\varphi, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{3}; \end{cases}$ $в)\begin{cases} y = t^2 + 1, \\ x = \sqrt{t(1-t)}, \\ x = 0. \end{cases}$

49. $a)\begin{cases} y^2 = 2(x-1)^2, \\ y = 1; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho = 2 + 4\sqrt{\varphi}, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{3}; \end{cases}$ $в)\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = t(2 - t^2). \end{cases}$

50. $a)\begin{cases} y = 2e^{-x}, \\ x = -1, x = 2; \end{cases}$ $б)\rho^2 = -cos\varphi;$ $в)\begin{cases} x = t^2(t-1)^2, \\ y = t^2 + 1. \end{cases}$

51. $a)\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ y = -\sqrt{3}x; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho = 2(1 - cos\varphi), \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ $в)\begin{cases} x = cos^3t, \\ y = sin^3t. \end{cases}$

52. $a)\begin{cases} y^2 = (x-1)^3, \\ x = 2; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho = 2(1+cos\varphi), \\ \varphi = 0, \varphi = \pi; \end{cases}$ $в)\begin{cases} x = cos^5 t, \\ y = sin^5 t. \end{cases}$

53. $a)\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ y = 5 - x^2, \\ x = 0, x = 1; \end{cases}$ $б)\rho = \sqrt{1 - 2cos\varphi};$ $в)\begin{cases} y = t^3 - 1, \\ x = t^2(t-1)^2. \end{cases}$

54. $a)\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1, \\ y = x + 1; \end{cases}$ $б)\rho = cos^2\varphi;$ $в)\begin{cases} x = cost, \\ y = tsint, \\ y = 0, (0 \le t \le \pi). \end{cases}$

55. $a)\begin{cases} x^2 + y^2 = 18, \\ 3y = x^2; \end{cases}$ $б)\rho = sin^2\varphi,$ $в)\begin{cases} y = cost, \\ x = tsint, \\ x = 0(0 \le t \le \pi). \end{cases}$

56. $a)\begin{cases} y = e^x - 1, \\ x = 2; \end{cases}$ $б)\rho = \sqrt{sin\varphi},$ $в)\begin{cases} x = cos^2 t, \\ y = tsint, \\ y = 0(0 \le t \le \pi). \end{cases}$

57. $a)\begin{cases} y = sin2x, \\ y = cos2x, \\ x = 0; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho = 2sin\frac{\varphi}{3}, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ $в)\begin{cases} x = tcost, \\ y = sint, \\ y = -(0 \le t \le \pi). \end{cases}$

58. $a)\begin{cases} y = x^2, \\ y = 8x; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho = 2 - cos\varphi, \\ \rho = 1; \end{cases}$ $в)\begin{cases} x = tsint, \\ y = cos^2 t, \\ x = 0(0 \le t \le \pi). \end{cases}$

59. $a)\begin{cases} xy = 20, \\ x^2 + y^2 = 41; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho = 1 + cos\varphi, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ $в)\begin{cases} x = t^2 sint, \\ y = cost, \\ y = 0\left(-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$

60. $a)\begin{cases} y = (x-1)^2, \\ y = 2; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho = \varphi + \varphi^2, \\ \varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = 0. \end{cases}$ $в)\begin{cases} y = t^2 sint, \\ x = cost, \\ x = 0\left(-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$

61. $a)\begin{cases} y=\frac{4}{x}, \\ x=3, x=12; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho=2cos\varphi, \\ \varphi=0, \varphi=\frac{\pi}{4}; \end{cases}$ $в)\begin{cases} x=t^2, \\ y=t(t-1), \\ y=o. \end{cases}$

62. $a)\begin{cases} y=\sqrt{x}, \\ y=x^2; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho=\varphi^2, \\ \varphi=0, \varphi=\frac{\pi}{3}; \end{cases}$ $в)\begin{cases} x=t-sint, \\ y=1-cost, \\ x=0. \end{cases}$

63. $a)\begin{cases} y=tgx, \\ x=0, x=\frac{\pi}{4}; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho=\sqrt{\varphi}, \\ \varphi=0, \varphi=\frac{\pi}{2}; \end{cases}$ $в)\begin{cases} y=t^2-1, \\ x=t^3-t. \end{cases}$

64. $a)\begin{cases} y=ctgx, \\ x=0, x=\frac{\pi}{3}; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho=\varphi^2, \\ \varphi=0, \varphi=\frac{\pi}{2}; \end{cases}$ $в)\begin{cases} x=t^3, \\ y=t^2-2. \end{cases}$

65. $a)\begin{cases} y=arctgx, \\ x=0, x=1; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho=\frac{1}{cos\varphi}, \\ \varphi=0, \varphi=\frac{\pi}{3}; \end{cases}$ $в)\begin{cases} x=t^3-2t^2, \\ y=2t-t^2. \end{cases}$

66. $a)\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ y^2=\frac{2}{3}x; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho=2e^{-\varphi}; \\ \varphi=0, \varphi=2\pi; \end{cases}$ $в)\begin{cases} x=2t-t^2, \\ y=4t-t^3. \end{cases}$

67. $a)\begin{cases} y=2x^2, \\ y=x-\frac{1}{2}x^2; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho=\varphi cos\varphi, \\ \varphi=-\frac{\pi}{2}, \varphi=\frac{\pi}{2}; \end{cases}$ $в)\begin{cases} y=t^5-t^4, \\ x=t^2-1. \end{cases}$

68. $a)\begin{cases} y=x^2, \\ y=-chx; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho=arctg\varphi, \\ \varphi=0, \varphi=\frac{\pi}{4}; \end{cases}$ $в)\begin{cases} x=t^2+2t, \\ y=t^3+t. \end{cases}$

69. $a)\begin{cases} y=sinx, \\ y^2=x^3; \end{cases}$ $б)\rho=4sin^2\varphi;$ $в)\begin{cases} x=2cost-cos2t, \\ y=2sint-sin2t. \end{cases}$

70. $a)\begin{cases} y=e^x+1, \\ y=x^2+4; \end{cases}$ $б)\rho=a(1+sin\varphi);$ $в)\begin{cases} x=2t-t^2, \\ y=2t^2-t^3. \end{cases}$

71. $a)\begin{cases} y=\frac{1}{4}x^2, \\ y=3x-\frac{1}{2}x^2; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho=2cos\varphi, \\ \rho=2sin\varphi, \\ \left(0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right); \end{cases}$ $в)\begin{cases} x=t^2-\pi^2, \\ y=\sin t, \\ y=0(0\le t\le\pi). \end{cases}$

72. $a)\begin{cases} y^2=5(x-1)^3, \\ x=2; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho=ln\varphi, \\ \varphi=\frac{\pi}{4},\varphi=\frac{\pi}{2}; \end{cases}$ $в)\begin{cases} y=t^2-\pi^2, \\ x=\sin t, \\ x=0(0\le t\le\pi). \end{cases}$

73. $a)\begin{cases} y=3ch2x, \\ y=5; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho=tg\varphi, \\ \varphi=0,\varphi=\frac{\pi}{4}; \end{cases}$ $в)\begin{cases} y=t^2(t-1)^2, \\ x=t^2-1. \end{cases}$

74. $a)\begin{cases} y=\ln(2x+3), \\ y=0,x=0,x=1; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho=tg\varphi, \\ \varphi=0,\varphi=\frac{\pi}{4}; \end{cases}$ $в)\begin{cases} y=t^2(t-1)^2, \\ x=t^2-1. \end{cases}$

75. $a)\begin{cases} x^2+4y^2=4, \\ y=x^2; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho=ctg\varphi, \\ \varphi=\frac{\pi}{4},\varphi=\frac{\pi}{2}; \end{cases}$ $в)\begin{cases} x=t^2, \\ y=t^2(t-1)^2; \end{cases}$

76. $a)\begin{cases} y=\sqrt[3]{x}, \\ y=(x+1)^3; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho=2^\varphi, \\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}; \end{cases}$ $в)\begin{cases} y=t^2-1, \\ x=t^2(t-1)^2. \end{cases}$

77. $a)\begin{cases} y=cos2x, \\ y=x^2,x-0; \end{cases}$ $б)\rho=4-cos\varphi;$ $в)\begin{cases} x=\frac{1}{6}t^6, \\ y=2-\frac{1}{4}t^4; \end{cases}$

78. $a)\begin{cases} y=e^{3x}, \\ y=2-x^2; \end{cases}$ $б)\rho=1-cos\varphi;$ $в)\begin{cases} x=8at^3, \\ y=3a(2t^2-t^4). \end{cases}$

79. $a)\begin{cases} y=lnx, \\ y=x^2+3; \end{cases}$ $б)\rho=3+sin\varphi;$ $в)\begin{cases} x=t^3-3t, \\ y=t^2-2. \end{cases}$

80. $a)\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2, \\ 2y=3x-2; \end{cases}$ $б)\begin{matrix} \rho=\frac{3}{2\pi}\varphi, \\ (0\le\varphi\le2\pi); \end{matrix}$ $в)\begin{cases} x=a(cost+tsint), \\ y=a(sint-tcost), \\ (0\le\varphi\le2\pi). \end{cases}$

81. $a)\begin{cases} y=arcsin2x, \\ y=0,x=0,x=\frac{\pi}{6}; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho=1+\sqrt{\varphi}, \\ \varphi=0,\varphi=\frac{\pi}{2}; \end{cases}$ $в)\begin{cases} y=t^2-1; \\ x=t(2-t^2). \end{cases}$

82. $a)\begin{cases} y = ch3x, \\ y = x^2, \\ x = 0, x = 1; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho = 1 - \varphi, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{4}; \end{cases}$ $в)\begin{cases} x = 6t^2, \\ y = t - t^3. \end{cases}$

83. $a)\begin{cases} y^2 = 2(x-1)^2, \\ y = 1; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho = 2 + 4\sqrt{\varphi}, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{3}; \end{cases}$ $в)\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = t(2 - t^2). \end{cases}$

84. $a)\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = chx, \\ x = 0, x = \frac{1}{2}; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho = 3 - \sqrt{\varphi}, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ $в)\begin{cases} y = 6t^2, \\ x = t - t^3. \end{cases}$

85. $a)\begin{cases} y = e^x - 2, \\ y = e^{3x} + 1, \\ x = -1, x = 0; \end{cases}$ $б)\rho = 5 + 2cos\varphi;$ $в)\begin{cases} x = t^4, \\ y = t - t^3. \end{cases}$

86. $a)\begin{cases} y = arccos2x, \\ y = 0, y = \frac{\pi}{4}, \\ x = 0; \end{cases}$ $б)\rho^2 = 3cos2\varphi;$ $в)\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = t^3 + t. \end{cases}$

87. $a)\begin{cases} y = x^2 + 3x, \\ y = 4 + x; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho = 4\left(1 + sin\frac{\varphi}{2}\right), \\ 0 \le \varphi \le 2\pi; \end{cases}$ $в)\begin{cases} y = t^4, \\ x = t - t^3. \end{cases}$

88. $a)\begin{cases} y^2 = 4x^3, \\ y = 2, y = 0, \\ x = 1; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho = 4\left(a + sin^2\frac{\varphi}{2}\right), \\ 0 \le \varphi \le \pi; \end{cases}$ $в)\begin{cases} y = t^2 + 1, \\ x = t^3 + t. \end{cases}$

89. $a)\begin{cases} y = x^2, x = 0, \\ y = \sqrt[3]{x}, x = 2; \end{cases}$ $б)\rho = |2 - cos\varphi|;$ $в)\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^3 + 2t. \end{cases}$

90. $a)\begin{cases} y = 2sin4x, \\ x = o, x = \frac{\pi}{8}; \end{cases}$ $б)\rho = |1 + 2sin\varphi|;$ $в)\begin{cases} y = t^3, \\ x = t^3 + 2t. \end{cases}$

91. $a)\begin{cases} y = 3(x-1)^2, \\ x = 0, x = 2; \end{cases}$ $б)\begin{cases} \rho = |1 - tg\varphi|, \\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}; \end{cases}$ $в)\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2(t-1)^2. \end{cases}$

92. а) $\begin{cases} y = \frac{1}{x}, \\ x = 1, x = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = |ctg\varphi - 1|, \\ \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{3\pi}{4}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = t^2(t-1)^2. \end{cases}$

93. а) $\begin{cases} y = \sqrt[3]{x}, \\ x = 2, x = 4; \end{cases}$ б) $\rho = \sqrt{1 - tg\varphi}$; в) $\begin{cases} y = \sqrt{t}, \\ x = t^2(t-1)^2. \end{cases}$

94. а) $\begin{cases} y = 2 + tgx, \\ x = 0, x = \frac{\pi}{4}; \end{cases}$ б) $\rho = \sqrt{ctg\varphi - 1}$; в) $\begin{cases} x = t^2(t-1)^2, \\ y = t^3. \end{cases}$

95. а) $\begin{cases} y = arctg3x, \\ x = 0, x = \frac{1}{3}; \end{cases}$ б) $\rho = \sqrt{1 + 2cos\varphi}$; в) $\begin{cases} x = t^3 - 1, \\ y = t^2(1-t)^2. \end{cases}$

96. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ y = 5 - x^2, \\ x = 0, x = 1; \end{cases}$ б) $\rho = \sqrt{1 - 2cos\varphi}$; в) $\begin{cases} y = t^3 - 1, \\ x = t^2(t-1)^2. \end{cases}$

97. а) $\begin{cases} y = sinx, \\ y = x, x = 0, x = \frac{\pi}{4}; \end{cases}$ б) $\rho = \sqrt{1 + 2sin\varphi}$; в) $\begin{cases} x = 2t^2, \\ y = t^5(t-1). \end{cases}$

98. а) $\begin{cases} y = 3^x + 1, \\ x = 0, x = 2; \end{cases}$ б) $\rho = \sqrt{1 - 2sin\varphi}$; в) $\begin{cases} x = t^5(t-1), \\ y = 2t^2. \end{cases}$

99. а) $\begin{cases} y = lnx + 5, \\ y = \frac{x}{4}, x = 0, x = 4; \end{cases}$ б) $\rho^2 = 4sin\varphi$; в) $\begin{cases} x = cos^2 t, \\ y = tsint, \\ y = 0. \end{cases}$

100. а) $\begin{cases} y = \frac{1}{x-1}, \\ x = 2, x = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = \sqrt{\frac{\pi}{4} - \varphi}, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{4}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = cos^2 t, \\ x = tsint, \\ x = 0. \end{cases}$

Завдання 14. Геометричні додатки визначених інтегралів. Обчислення об'ємів

Знайти об'єм тіла:

- одержаного обертанням навколо осі Ох фігури, обмеженої лініями (зробити схематичне креслення) (варіанти 1-50);
- обмеженого поверхнями (варіанти 51-100)

1. $\begin{cases} y = 0.5x^2 - 1; \\ y = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} y = e^x - 1; \\ y = e^{2x} - 3, y = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} y = 2 - x^2; \\ y = x, x = 0 (x > 0). \end{cases}$

4. $\begin{cases} y = \sin x; \\ y = 0, x = 0, x = \pi. \end{cases}$

5. $\begin{cases} y = \ln x; \\ x = 1, x = e. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t); \\ y = 2(1 - \cos t); \\ y = 0 \ (0 \le t \le 2\pi). \end{cases}$

7. $\begin{cases} y = 0{,}5\cos 2x; \\ x = 0, x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = 3, x = 0; \\ y = ch2x. \end{cases}$

9. $\begin{cases} y = \cos^2 x; \\ x = 0, x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

10. $\begin{cases} y^2 = x^3; \\ x = 4, x = 8. \end{cases}$

11. $\begin{cases} y = x^2 \\ x = 0, x = 3. \end{cases}$

12. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1;$

13. $\begin{cases} y = \sin^2 x; \\ x = 0, x = \pi. \end{cases}$

14. $\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2; \\ y = 3x - \frac{1}{2}x^2. \end{cases}$

15. $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2; \\ 2x + 2y - 3 = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos^3 t; \\ y = 2\sqrt{2}\sin^3 t. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1; \\ y^2 = \frac{3}{2}x. \end{cases}$

18. $\begin{cases} y = x^2 + 6x + 8; \\ y = x + 4. \end{cases}$

19. $\begin{cases} y = x(x + 2); \\ y = -x. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x = 1 + \sin t; \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = 1 - \cos 2t; \\ y = \sin 2t. \end{cases}$

22. $\begin{cases} y = (x - 1)^2; \\ y = (x^2 + 1)^2, y = 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} y = 2 - x^2; \\ y = x, x = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} y = x, y = 0; \\ xy = 1, \\ x = 2. \end{cases}$

25. $\begin{cases} y = ch3x; \\ x = 1, y = 0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} y = \sqrt{x}; \\ x = 1. \end{cases}$

27. $\begin{cases} y = \sqrt{x-1}; \\ y = 0, x = 2. \end{cases}$

28. $\begin{cases} y = x^3 - 3x; \\ \quad y = 0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} y = \sqrt{1-x}; \\ \quad x = 0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} y = x^3; \\ y = x^2. \end{cases}$

31. $\begin{cases} x + y = 2; \\ y = x^2, x = 0. \end{cases}$

32. $\begin{cases} y = x - x^2; \\ \quad y = 0. \end{cases}$

33. $\begin{cases} y = x^3; \\ y = x. \end{cases}$

34. $\begin{cases} y = arcsinx; \\ y = 0, x = 1. \end{cases}$

35. $\begin{cases} y = arctgx; \\ y = 0, x = 1. \end{cases}$

36. $\begin{cases} y = 2sinx; \\ y = 0\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$

37. $\begin{cases} y = \frac{tg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}; \\ x = 0, x = (\frac{\pi}{4})^2. \end{cases}$

38. $\begin{cases} y = xsinx; \\ y = 0(0 \le x \le \pi). \end{cases}$

39. $\begin{cases} y = x^2; \\ y = 0. \end{cases}$

40. $\begin{cases} y = xcosx; \\ y = 0\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$

41. $\begin{cases} y = xe^x; \\ y = 0(0 \le x \le 1). \end{cases}$

42. $\begin{cases} y = (x-1)e^{-x}; \\ y = 0, x = 1, x = 2. \end{cases}$

43. $\begin{cases} y = tgx; \\ y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

44. $\begin{cases} y = ctgx; \\ y = 0, x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

45. $\begin{cases} y = \sqrt{sin3x}; \\ y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$

46. $\begin{cases} y = (x-1)^2; \\ x = 0, y = 0. \end{cases}$

47. $\begin{cases} y = \sqrt{cosx}; \\ y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

48. $\begin{cases} y = \sqrt{tgx}; \\ y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$

49. $\begin{cases} y = \sqrt{arctgx}; \\ y = 0, x = 0, x = 1. \end{cases}$

50. $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2; \\ x = 2, y = 0. \end{cases}$

51. $\begin{cases} x^2+\frac{y^2}{4}=1; \\ z=3x, z=0. \end{cases}$

52. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+z^2=1.$

53. $\begin{cases} x^2=z^2=4; \\ y^2+z^2=4. \end{cases}$

54. $\begin{cases} z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}; \\ z=1. \end{cases}$

55. $x^2+y^2=2x.$

56. $\begin{cases} x^2+y^2=z^2; \\ z=0, z=1. \end{cases}$

57. $\begin{cases} x^2+y^2=1; \\ y^2+z^2=1. \end{cases}$

58. $\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=z; \\ z=1. \end{cases}$

59. $\begin{cases} x^2+y^2=z; \\ z=1. \end{cases}$

60. $\begin{cases} y^2=z; \\ y=x^2. \end{cases}$

61. $\begin{cases} \frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=z^2; \\ z=1, z=0. \end{cases}$

62. $\begin{cases} z=y^2-y; \\ x=0, x=z, x=1. \end{cases}$

63. $\begin{cases} z=x^2-2x; \\ z=y, y=0, y=1. \end{cases}$

64. $\begin{cases} z^2+x^2=y^2; \\ y=0, y=1. \end{cases}$

65. $\begin{cases} x^2=z^2=y. \\ y=1. \end{cases}$

66. $\begin{cases} z=\sqrt{y}; \\ y=x, x=0, x=1. \end{cases}$

67. $\begin{cases} y=2\sqrt{x}; \\ z=2x, x=1. \end{cases}$

68. $\begin{cases} y=\sqrt{x}; \\ z-x=1. \end{cases}$

69. $\begin{cases} z=y^2; \\ z-x=1. \end{cases}$

70. $\begin{cases} z=y^3, y=0; \\ z=1, x=0, x=1. \end{cases}$

71. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1; \\ z=0 (z>0). \end{cases}$

72. $\begin{cases} z=y^2, z+y=2; \\ z-x=2. \end{cases}$

73. $\begin{cases} z=x^2+y^2; \\ z^2=x^2+y^2. \end{cases}$

74. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1; \\ z=-y, z=y (z>0). \end{cases}$

75. $\begin{cases} x^2+y^2=z; \\ y=0, z=2y, z=1. \end{cases}$

76. $\begin{cases} x^2+y^2=z. \\ x=0, z=2y, z=1. \end{cases}$

77. $\begin{cases} x^2+y^2=z; \\ z=2y, z=1 (y>0). \end{cases}$

78. $\begin{cases} x^2+y^2=z' \\ x=1, x=-y (y>0). \end{cases}$

79. $\begin{cases} x^2+y^2=1; \\ z=y, z=0. \end{cases}$

80. $\begin{cases} x^2+y^2=1; \\ z=y, z=-y, z=1. \end{cases}$

81. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{5}=1.$

82. $\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1; \\ z=x, z=0. \end{cases}$

83. $\begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{4} = 1; \\ z = -x, z = 0. \end{cases}$

84. $\begin{cases} z = y^2; \\ z = x^2. \end{cases}$

85. $\begin{cases} y = \sqrt{x}; \\ z = 1 - x^2. \end{cases}$

86. $\begin{cases} z^2 + y^2 = 1; \\ z = x, x = 0. \end{cases}$

87. $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2; \\ z = y(y > 0). \end{cases}$

88. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4; \\ z = y, z = 0. \end{cases}$

89. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1; \\ z = 2 - x. \end{cases}$

90. $\begin{cases} z = y^2, z = 1; \\ x = 0, x = 1. \end{cases}$

91. $\begin{cases} y = x^2, y = 2; \\ z = 0, z = 1. \end{cases}$

92. $\begin{cases} z = x^2, y = 0, \\ z + x = 1, y = 1. \end{cases}$

93. $\begin{cases} z = y^2, z = 2; \\ x = 0, x = 2. \end{cases}$

94. $\begin{cases} z = \frac{1}{2}, x = 0; \\ z + y = 2, x = 2. \end{cases}$

95. $\begin{cases} z = \sqrt{x}, y = 0; \\ z = 0, x = 1, y = 0. \end{cases}$

96. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1; \\ z = \frac{2}{3}, \left(z > \frac{2}{3}\right). \end{cases}$

97. $\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1; \\ z = 2. \end{cases}$

98. $\begin{cases} z = y^3, y = 0; \\ z = 1, x = 0, x = 1. \end{cases}$

99. $\begin{cases} z = \sqrt{x}, x = 0 \\ z + y = 2, x = 0. \end{cases}$

100. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4; \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0; \\ (z > 0)\text{в середині конуса.} \end{cases}$

Завдання 15. Невластиві інтеграли та їх збіжність

Дослідити збіжність невластивих інтегралів

1. $\int_0^{\infty} \frac{arctg\, x}{1+x^2}\, dx$	$\int_0^{\infty} \frac{x\, dx}{(x+1)^4}$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+\sqrt[4]{x^2+3}}$
3. $\int_2^{\infty} \frac{x\, dx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}$	$\int_0^{\infty} \sqrt{x}\, e^{-2x}\, dx$
4. $\int_0^{\infty} \frac{x\, dx}{\sqrt[3]{(4x^2+1)^2}}$	$\int_0^{\infty} \frac{x\, dx}{\sqrt[4]{(3-2x)^3}+1}$
5. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2-4x+4}$	$\int_0^{\infty} x^3 e^{-2x} dx$
6. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2-4x+5}$	$\int_0^{\infty} \sqrt{x}\, e^{-x} dx$
7. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$	$\int_0^{\infty} x e^{-x^2}\, dx$
8. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4}$	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\, ln^2 x}$
9. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{lnx}}$	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{cos^2 x+x^3+1}$
10. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2xdx}{x^2+1}$	$\int_{-\infty}^{0} \frac{(x-1)\, dx}{x^5-4x^2+3}$
11. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\,(x+1)}$	$\int_1^{\infty} \frac{arctg\, x}{x^2}\, dx$

12. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$	$\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{x^3-4x+3}$
14. $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$	$\int_3^{\infty} \sqrt{\frac{x}{x^5+1}}\,dx$
15. $\int_0^{\infty} x\,e^{-x^2}dx$	$\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{(x+1)^2}$
16. $\int_2^{\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx$	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$
17. $\int_1^{\infty} \frac{x^3+1}{x^4}\,dx$	$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{(1+x)^2}$
18. $\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x\ln(\ln x)}$	$\int_0^{\infty} \frac{x\,arctg x}{\sqrt[3]{1-x^4}}\,dx$
19. $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\,(\ln x)^{\frac{3}{2}}}$	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^3+1)^5}$
20. $\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{x^4+1}$	$\int_0^{\infty} \frac{3^x\,dx}{(3^x+7x)^{\frac{3}{2}}}$
21. $\int_0^{\infty} \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1}$	$\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^5+1}}$
22. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+x)^3}}$	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}$

23. $\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{1-x^4}$	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{2x+\sqrt[5]{x^7}}$
24. $\int_0^{\infty} \frac{2^x dx}{1+2^x}$	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}+5x^7+1}$
25. $\int_0^{\infty} \frac{\sin x\, dx}{\cos^3 x}$	$\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x^2-1)^2}$
26. $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{3} dx}{x^2+9}$	$\int_0^{\infty} \frac{3x\, dx}{\sqrt{x}+2}$
27. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-4x+9}$	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{4-\sqrt[4]{x^3+3}}$
28. $\int_3^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(x^4-10)^3}}$	$\int_0^{\infty} \sqrt{x}\, e^{-3x} dx$
29. $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[5]{(4x^2+1)^3}}$	$\int_0^{\infty} \frac{x\, dx}{\sqrt[4]{(3+2x)^2-1}}$
30. $\int_1^{\infty} \frac{x\, dx}{\sqrt[3]{(x^2+5)^4}}$	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x^2+3)^2-4x}}$
31. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-6x+9}$	$\int_0^{\infty} x^5 e^{-2x} dx$
32. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+4}}$	$\int_0^{\infty} e^{-5x^2} dx$

33. $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\ ln\sqrt{x}}$	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{cos^2x - x^3 + 1}$
34. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^6}$	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x sin^2 2x}$
35. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^3+1}$	$\int_{-\infty}^{0} \frac{(x-1)dx}{x^4-3x^2+1}$
36. $\int_4^{\infty} \frac{dx}{x(x-3)}$	$\int_1^{\infty} \frac{arctg\ 3x}{x^3} dx$
37. $\int_2^{\infty} \frac{x\ dx}{\sqrt{4+x^2}}$	$\int_0^{\infty} \frac{(x+1)dx}{x^3-4\sqrt[3]{x}+2}$
38. $\int_0^{\infty} xcos3x\ dx$	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt{x}}$
39. $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{5x}} dx$	$\int_3^{\infty} \sqrt[5]{\frac{x}{x^5+4x+1}} dx$
40. $\int_0^{\infty} xe^{-3x^2} dx$	$\int_0^{\infty} \frac{x\ dx}{(x+1)^3}$
41. $\int_2^{\infty} \frac{\ln(x+5)}{x+5} dx$	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+x+1}$
42. $\int_1^{\infty} \frac{x^3+x}{x^4} dx$	$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}\,dx}{(1+x^2)^3}$
43. $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln(ln2x)}$	$\int_0^{\infty} \frac{xarctg3x}{\sqrt[3]{x^4+2}}$

44. $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(ln\frac{x}{3})^4}$	$\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^5+1}}$
45. $\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{\frac{x^4}{16}+1}$	$\int_0^{\infty} \frac{2^x dx}{(2^x-3x^3)^{\frac{4}{3}}}$
46. $\int_0^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}\,dx}{1+e^x}$	$\int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^5-3x}}$
47. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{(3+x)^5}}$	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x+\sqrt[5]{x^3+4}}$
48. $\int_0^{\infty} \frac{x^3\,dx}{16+x^4}$	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{3x-\sqrt[5]{x^7}}$
49. $\int_0^{\infty} \frac{2^{\frac{x}{2}}\,dx}{1+2^x}$	$\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x^2-1)^4}$
50. $\int_0^{\infty} \frac{sin2x\,dx}{cos^4 2x}$	$\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x^2-1)^4}$
51. $\int_0^{\infty} \frac{arctg\frac{x}{3}dx}{x^2+9}$	$\int_2^{\infty} \frac{\sqrt[5]{x}\,dx}{e^{5x}-1}$
52. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1-\sqrt[5]{x^2+x}}$

53. $\int_2^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(x^2-3)^2}}$	$\int_0^{\infty} \sqrt{x}\, e^{-\frac{x}{2}} dx$
54. $\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{(4x^2+1)^3}}$	$\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^5+\sqrt{x}}+x}$
55. $\int_1^{\infty} \frac{3x\,dx}{(x^2+25)^2}$	$\int_0^{\infty} \frac{(x-3)\,dx}{\sqrt[4]{x^3+7}+sinx}$
56. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+4}$	$\int_0^{\infty} x^4 e^{-\frac{x}{3}} dx$
57. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{cos^2x-x^4+1}$
58. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{ln2x}}$	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{sin^2x+\sqrt[3]{x}+1}$
59. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^5}$	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x sin^2 5x}$
60. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{x^2+7}$	$\int_{-\infty}^{0} \frac{x\,dx}{x^4-3}$
61. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(x+2)}$	$\int_0^{\infty} \frac{arctg2x}{x^4+3} dx$
62. $\int_2^{\infty} \frac{2x\,dx}{\sqrt[5]{4+x^2}}$	$\int_0^{\infty} \frac{(x-1)\,dx}{x^3+4\sqrt{x}+3}$

63. $\int_0^{\infty} x\sin 2x\,dx$	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2+1}}$
64. $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{3x}}dx$	$\int_0^{\infty} \sqrt[3]{\frac{x}{x^5+1}}\,dx$
65. $\int_0^{\infty} xe^{-2x^2}dx$	$\int_0^{\infty} \frac{3x\,dx}{(1+x)^2+\sqrt{x^3}}$
66. $\int_0^{\infty} \frac{\ln(x+4)}{x+4}dx$	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{5-x^3}$
67. $\int_1^{\infty} \frac{x^3+3}{x^5+1}dx$	$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{(1+x)^2}$
68. $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln 3x)^{\frac{2}{3}}}$	$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt{5x}-4}$
69. $\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x\ln(\ln x)}$	$\int_2^{\infty} \frac{x\,arctg5x}{\sqrt[3]{3+x^4}}dx$
70. $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{x^4+16}$	$\int_0^{\infty} \frac{5^x dx}{x^3+6^x}$
71. $\int_0^{\infty} \frac{e^{2x}dx}{1++e^{4x}}$	$\int_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^5+1}}$
72. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{(x+2)^3}}$	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2-\sqrt[3]{x^4+2}}$
73. $\int_0^{\infty} \frac{arctg\frac{x}{5}}{x^2+25}$	$\int_0^{\infty} \frac{5x\,dx}{\sqrt{x}+x^3-4}$

74. $\int_0^{\infty} \frac{3xdx}{1+3^x}$	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^5+x^{\frac{3}{2}}-1}$
75. $\int_0^{\infty} \frac{x^3dx}{4+x^4}$	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{5x^7+1}+x}$
76. $\int_0^{\infty} \frac{arctg\frac{x}{2}}{x^2+4}dx$	$\int_2^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}dx}{2^{x^2}+3}$
77. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2+x-3}$	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+\sqrt[5]{x^2-1}}$
78. $\int_2^{\infty} \frac{xdx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$	$\int_0^{\infty} \sqrt{3x}\, e^{-3x}dx$
79. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{3x}}$	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{3+\sqrt[3]{x+cosx}}$
80. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{ln3x}}$	$\int_1^{\infty} \frac{e^{-x^2}dx}{x}$
81. $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x(x-1)}$	$\int_2^{\infty} \frac{arcyg4x}{1+x^2+x^{\frac{3}{4}}}dx$
82. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x-1}$	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x^2-\sqrt{x}}}$
83. $\int_3^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt[5]{(x^2-2)^3}}$	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{cos^2x+x^4+3}$

84. $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{9x^2+1}$	$\int_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^3}}$
85. $\int_1^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^2+1}}$	$\int_0^{\infty} \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{x\sqrt{x}+4}}$
86. $\int_0^{\infty} \frac{(arctg3x)^2}{x^2+9}dx$	$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{2^x+3}$
87. $\int_2^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt[3]{4+x^2}}$	$\int_0^{\infty} \frac{(x+3)dx}{x^3+\sqrt[5]{x}+4}$
88. $\int_0^{\infty} xcos5x\,dx$	$\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^4}-\sqrt{x}}$
89. $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{7x}}dx$	$\int_0^{\infty} \sqrt[4]{\frac{x}{x^5+1}}\,dx$
90. $\int_0^{\infty} xe^{-4x^2}dx$	$\int_0^{\infty} \frac{xdx}{(x+1)^5}$
91. $\int_2^{\infty} \frac{\ln(x+6)}{x+6}dx$	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3-3x+1}$
92. $\int_1^{\infty} \frac{x^3+2}{x^4+3}dx$	$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}dx}{(1+2x)^3}$
93. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{xln^2x}$	$\int_0^{\infty} \frac{xarctgx}{\sqrt[3]{2+x+x^4}}dx$
94. $\int_4^{\infty} \frac{dx}{x(lnx)^{\frac{1}{2}}}$	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3+5x-1}$

95. $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{x^4+81}$	$\int_0^{\infty} \frac{4^x dx}{(4^x+2x^4)^{\frac{4}{5}}}$
96. $\int_0^{\infty} \frac{e^{3x} dx}{1+e^{6x}}$	$\int_0^{\infty} \frac{(x+1) dx}{\sqrt[4]{x^5+4}}$
97. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+x)^5}}$	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt[5]{1+x^6}}$
98. $\int_0^{\infty} \frac{x^4 dx}{1+x^5}$	$\int_0^{\infty} \frac{3x\, dx}{x^2-\sqrt{x}+2}$
99. $\int_0^{\infty} \frac{5^x dx}{1+5^x}$	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}-\sqrt{x}}$
100. $\int_0^{\infty} \frac{\sin x\, dx}{\cos^4 x}$	$\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[5]{(x^2-1)^3}}$

ЛІТЕРАТУРА

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – М.: Наука, 1975. – 416 с.

2. Бугров Я. С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров – М.: Наука, 1988. – 432 с.

3. Бугров Я. С. Дифференциальные уравнения, интегралы, ряды, функции комплексного переменного / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М.: Наука, 1989. – 464 с.

4. Бугров Я. С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометри / Я. С. Бугров, С. М. Никольский – М.: Наука, 1988. – 240 с.

5. Валєєв К. Г. Вища математика: Навч. посібник: У 2-х ч. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – К.: КНЕУ, 2001. – Ч. 1. – 546 с.

6. Валєєв К. Г. Вища математика: Навч. посібник: У 2-х ч. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – К.: КНЕУ, 2002. – Ч. 2. – 451 с.

7. Гевко Б.М. Математичне моделювання руху зерна по рухомим поверхням висівних апаратів / Б.М. Гевко, Р.І. Лотоцький, В.М. Пришляк // Сільськогосподарські машини: Зб. наук. ст. – Вип. 26. – Луцьк: РВВ Луцького НТУ, 2013. – С. 27-35.

8. Збірник задач з вищої математики / За ред. Ф.С. Гудименка. – К.: КУ, 1967. – 352 с.

9. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометри / Д. В. Клетеник. – М.: Наука, 1986. – 224 с.

10. Куценко А.Г. Біомеханіка суцільних середовищ: монографія /А.Г. Куценко, С.М. Бондар, В.М. Пришляк. – Київ: НУБіП України, 2014. – 512 с.

11. Мисюркеев Й. В. Сборник задач по методам математической физики / Й. В. Мисюркеев. – М.: Просвещение, 1975. – 220 с.

12. Овчинников П. Ф. Высшая математика / П. Ф. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко. – К.: Вища шк., 1987. – 552 с.

13. Пак В. В. Вища математика / В. В. Пак, Й. Л. Носенко – К.: Либідь, 1996. – 440 с.

14. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – Т. 1, 2 / Н. С. Пискунов. – М.: Наука, 1985. – 580 с., 602 с.

15. Прикладна механіка в прикладах та задачах: підручник / Куценко А.Г., Бондар М.М., Пришляк В.М., Шимко Л.С. – Ніжин: ТОВ «Видавництво «Аспект – Поліграф», 2015. – 804 с.

16. Пришляк В.М. Сільськогосподарські машини: розрахунок, проектування. Методичні вказівки до виконання курсової роботи / В.М. Пришляк, О.М. Погорілець. – Вінниця: ВНАУ, 2015. – 60 с.

17. Стрижак Т. Г. Математический анализ / Т. Г. Стрижак, Н. Р. Коновалова – К.: Либідь, 1995. – 240 с.

18. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, М. О. Перестюк. – К.: Вища шк., 1994. – 454 с.

19. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики / Под ред. Г. И. Кручковича. – М.: Высш, шк., 1970. – 512 с.

20. Kutsenko A. Mechanics of materials: Theory and Problems. Manual / A. Kutsenko, M. Bondar, V. Pryshliak. – Nizhyn : “Vidavnitstvo “Aspekt-Poligraf”, 2016. – 360 p.

ДОДАТКИ

Додаток А

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Означення матриці. Види матриць. Дії над матрицями та їх властивості.
2. Визначники матриць другого порядку та їх властивості.
3. Визначники матриць третього порядку та їх властивості.
4. Обернена матриця. Теорема про структуру оберненої матриці.
5. Матрична форма запису систем лінійних рівнянь. Розв’язування систем матричним способом.
6. Метод Гауса та формули Крамера.
7. Поняття вектора. Види векторів. Лінійні операції над векторами та їх властивості.
8. Лінійна залежність векторів. Теореми про лінійну залежність двох, трьох, чотирьох векторів.
9. Поняття базису на площині і в просторі. Декартів базис. Координати вектора.
10. Означення скалярного добутку векторів та його властивості.
11. Вираження скалярного добутку векторів через декартові координати співмножників. Кут між векторами.
12. Означення векторного добутку векторів та його властивості.

13. Вираження векторного добутку векторів через декартові координати співмножників.
14. Поділ відрізка в даному відношенні.
15. Означення та властивості мішаного добутку векторів.
16. Вираження мішаного добутку векторів через декартові координати співмножників.
17. Пряма на площині. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
18. Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки.
19. Рівняння прямої, що проходить через дану точку паралельно даному вектору.
20. Рівняння прямої, що проходить через дану точку перпендикулярно до даного вектора.
21. Загальне рівняння прямої на площині.
22. Кут між прямими. Умови паралельності і перпендикулярності прямих.
23. Відстань від точки до прямої (на площині).
24. Кут між двома прямими, що задані рівняннями з кутовим коефіцієнтом. Умови паралельності і перпендикулярності прямих.
25. Загальне рівняння площини. Нормальний вектор площини.
26. Рівняння площини у відрізках.
27. Рівняння площини, що проходить через три дані точки.
28. Відстань від точки до площини.
29. Канонічні та параметричні рівняння прямої (у просторі).

30. Кут між двома площинами; умови їх паралельності та перпендикулярності.
31. Кут між прямою і площиною.
32. Криві другого порядку.
33. Послідовність. Границя послідовності. Єдиність границі послідовності.
34. Границя функції в точці. Односторонні границі. Границя функції на нескінченості.
35. Основні теореми про границі. Обмежені і необмежені функції. Нескінченно малі та нескінченно великі функції, їх властивості.
36. Порівняння нескінченно малих. Еквівалентні нескінченно малі. Таблиця еквівалентних нескінченно малих.
37. Перша та друга визначні границі. Їх різні форми запису.
38. Неперервність функції в точці. Точки неперервності та точки розриву функції. Класифікація точок розриву.
39. Похідна. Її фізичний та геометричний зміст. Правила диференціювання.
40. Похідна складної та оберненої функції.
41. Похідні обернених тригонометричних функцій.
42. Таблиця похідних.
43. Похідна функції, заданої неявно. Перша та друга похідна функції, заданої параметрично.
44. Рівняння дотичної та нормалі до кривої.

45. Похідна, як відношення диференціалів.

46. Диференціал функції. Його геометричний зміст та правила знаходження. Інваріантність форми диференціала.

47. Застосування диференціала в наближених обчисленнях.

48. Поняття екстремуму функції. Умови зростання та спадання функції. Критичні точки.

49. Опуклість та вгнутість функції. Точки перегину. Умови опуклості, вгнутості та перегину кривої.

50. Асимптоти кривої (похилі, горизонтальні, вертикальні).

51. Загальна схема дослідження функції та побудова її графіка.

52. Правило Лопіталя. Випадки його застосування.

53. Первісна та невизначений інтеграл. Властивості невизначеного інтеграла.

54. Таблиця основних інтегралів.

55. Правила знаходження невизначених інтегралів. Методи інтегрування.

56. Інтегрування раціональних дробів та найпростіших раціональних дробів.

57. Інтегрування тригонометричних функцій за допомогою універсальної тригонометричної підстановки.

58. Інтегрування тригонометричних функцій за допомогою частинних тригонометричних підстановок (не універсальної).

59. Інтеграли виду $\int \cos mx \cdot \sin kx \, dx$, $\int \cos mx \cdot \cos kx \, dx$, $\int \sin mx \cdot \sin kx \, dx$.

60. Поняття визначеного інтеграла.

61. Властивості визначеного інтеграла.

62. Формула Ньютона-Лейбніца.

63. Інтегрування частинами та методом підстановки у визначеному інтегралі.

64. Застосування визначеного інтеграла.

Додаток Б

Тести

1. За теоремою про розкладання обчислюється:

а) обернена матриця;

<u>б) визначник;</u>

г) елементи матриці.

в) алгебраїчне доповнення;

2. Умовою паралельності прямих $y = k_1 x + b_1$ та $y = k_2 x + b_2$ є рівність:

а) $\dfrac{k_1}{k_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$; б) $k_1 k_2 + b_1 b_2 = 0$; в) $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$;

г) $\underline{k_1 = k_2}$.

3. Кут φ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ обчислюється за формулою:

а) $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$; б) $\sin\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$; в) $\underline{\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}}$;

г) $\cos\varphi = \pi - \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.

4. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$:

а) <u>7</u>; б) 15; в) –7; г) 8.

5. Відстань від точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ обчислюється за формулою:

а) $d=\dfrac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}$; б) $d=\dfrac{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$;

в) $d=\dfrac{\sqrt{A^2+B^2+C^2+D^2}}{\left|x_0^2+y_0^2+z_0^2\right|}$; г) $d=\dfrac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

6. Границя $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{x^2-x}$ дорівнює:

а) ∞; б) 0; в) -2; г) 2.

7. Сума добутків елементів рядка матриці на їхні алгебраїчні доповнення дорівнює:

а) нулеві;

б) оберненій матриці;

в) визначнику матриці;

г) визначнику оберненої матриці.

8. Умовою перпендикулярності прямих $y=k_1x+b_1$ та $y=k_2x+b_2$ є рівність:

а) $k_1\cdot k_2=-1$; б) $k_1\cdot k_2=1$; в) $\dfrac{k_1}{k_2}=-\dfrac{b_1}{b_2}$;

г) $k_1b_2=k_2b_1$.

9. Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2;5)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}=\{-3;8\}$ має вигляд:

а) $2(x+3)+5(y-8)=0$; б) $-3(x-2)+8(y-5)=0$;

в) $2(x-3)+5(y+8)=0$; г) $-3(x+2)+8(y+5)=0$.

10. Площина $-3x-2y+z+4=0$ перпендикулярна до площини:

а) $3x+2y-z+5=0$;　　　　б) $\underline{2x+2y+10z+1=0}$;

в) $2x+3y-z-4=0$;　　　　г) $\frac{x}{-3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{1}=\frac{1}{4}$.

11. Границя: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2}{1-2x^2}$ дорівнює

а) $-\frac{4}{9}$;　　б) $\underline{-\frac{3}{2}}$;　　в) 0;　　г) ∞.

12. Формули Крамера використовуються для:

а) знаходження оберненої матриці;

б) обчислення визначника;

в) знаходження скалярного добутку векторів;

г) <u>розв’язування системи алгебраїчних рівнянь.</u>

13. Мішаний добуток векторів $\vec{a}=\{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2; y_2; z_2\}$,

$\vec{c}=\{x_3; y_3; z_3\}$ дорівнює:

а) $\underline{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}$;　б) $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$;　в) $(\vec{a}\cdot\vec{b})\times\vec{c}$;　г) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$.

14. Вектор $\vec{a}=\{3;-2;1\}$ перпендикулярний до вектора:

а) $\underline{\{0;-1;-2\}}$;　б) $\{1;\ 1;\ 1\}$;　в) $\{-6;\ 4;\ -2\}$;　г) $\{3;\ 1;\ -2\}$.

15. Площина $3x+5y-2z+1=0$ паралельна площині:

а) $-3x-5y-2z-1=0$;　　　　б) $3x-5y+2z=5$;

в) $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{z}{-2}+1=0$;　　　　г) $\underline{-6x-10y+4z+1=0}$.

16. Довжиною вектора $N\{-1;\ 2;\ 2\}$ є :

а) 5; б) 10; в) 1 ; г) <u>3.</u>

17. Границя $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x-8}{\sin(x-4)}$ дорівнює:

а) 0; б) 1; в) <u>2;</u> г) ∞.

18. Нехай φ – кут між векторами $\vec{a}=\{x_1;\ \ y_1;\ \ z_1;\}$ та $\vec{b}=\{x_2;\ \ y_2;\ \ z_2;\}$. Тоді скалярним добутком цих векторів називається число, яке дорівнює:

а); $\sqrt{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}$ б) $|\vec{a}|\cdot Пр_{\vec{a}}\vec{b}$; в) <u>$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$;</u>

г) $x_1x_2+z_1y_2+y_1z_2$.

19. Квадратна матриця А не має оберненої, якщо:

а) $A\cdot A^{-1}\neq E$; *б)* $\det A\neq 0$; *в)* $\det A=\det A^{-1}$; *г)* <u>$\det A=0$.</u>

20. Проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ дорівнює:

а) $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$; *б)* $|\vec{b}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$; *в)* $|\vec{a}|\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$; *г)* <u>$|\vec{a}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$.</u>

21. Вектор $\vec{a}=\{2;\ -1;\ 3\}$ паралельний вектору:

а) $\{2;\ 1;\ -3\}$; *б)* <u>$\{-2;\ 1;\ -3\}$;</u> *в)* $\{-2;\ -1;\ 3\}$; *г)* $\{2;\ -1;\ -3\}$.

22. Прямі $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{z+5}{2}$ та $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{z+5}{-2}$:

а) паралельні; б) перпендикулярні ; в) мимобіжні;

г) <u>збігаються.</u>

23. Нормальний вектор площини $2x=y$ має вигляд:

а) $\{2;\ 1;\ 1\}$; б) $\{2;\ -1;\ 1\}$; в) <u>$\{2;\ -1;\ 0\}$;</u> г) $\{2;\ 0;\ 1\}$.

24. Границя $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^{x-2}}{x-1}$ дорівнює:

а) 0; б) $\underline{1}$; в) e^4; г) ∞.

25. Перетином прямих $2x-y=1$ та $x+y=5$ є точка:

а) $A(3;\ 2)$; б) $B(2;\ -1)$; в) $\underline{C(2;\ 3);}$ г) $D(0;\ -1)$.

26. Рівняння прямої $2x+3y-6=0$ з кутовим коефіцієнтом має вигляд:

а) $\underline{y=-\dfrac{2}{3}x+2;}$ б) $3x+2y=1$; в) $\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{-6}=1$;

г) $3(x-1)+2(y-1)=1$.

27. Прямі $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-5}{4}=\dfrac{z+7}{-10}$ та $\dfrac{x-2}{-6}=\dfrac{y-5}{-8}=\dfrac{z+7}{20}$:

а) паралельні; б) <u>збігаються;</u> в) мимобіжні;

г) перпендикулярні.

28. Направляючий вектор прямої $\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-4}{1}$ паралельний вектору:

а) $\{-5;1;-4\}$; б) $\{5;-1;4\}$; в) $\{6;-4;-1\}$;

г) $\underline{\{-6;\ 4;\ -2\}.}$

29. Границя $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{2-x}$ дорівнює:

а) ∞; б) 4; в) $\underline{-4}$; г) 0.

30. Для того, щоб вектори були колінеарні, необхідно, щоб :

а) їх скалярний добуток дорівнював нулеві;

б) їхній мішаний добуток дорівнював нулеві;

в) <u>їх координати були пропорційні;</u>

г) сума добутків їх відповідних координат дорівнювала нулеві.

31. Відстань від точки $M_0(x_0;\ y_0)$ до прямої $Ax+By+C=0$ дорівнює:

а) $|Ax_0+By_0+C|$; б) $\underline{\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$; в) $\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$;

г) $\sqrt{Ax_0+By_0+C}$.

32. Пряма проходить через точку: $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+5}{4}$

а) $M_1(3;\ 4)$; б) $M_2(-2;\ 5)$; в) $M_3(-3;\ -4)$; г) $\underline{M_4(2;\ -5)}$.

33. Площина $3x-2y+z-5=0$ містить точку:

а) $M_1(-1;2;-6)$; б) $M_2(2;-1;6)$;

в) $M_3(0;0;2)$; г) $\underline{M_4(1;-1,0)}$.

34. Відстань від початку координат до точки, в якій площина $3x-2y-5z+15=0$ перетинає вісь Oz дорівнює:

а) <u>3;</u> б) 2; в) 5; г) 15.

35. Границя $\lim\limits_{x\to 0} 3\dfrac{x}{\sin 3x}$ дорівнює:

а) 0; б) $\dfrac{1}{3}$; в) $\dfrac{1}{9}$; г) <u>1</u>.

36. Векторний добуток вектора $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ на вектор $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$ обчислюється за формулою:

а) $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$;   б) $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$;   в) $\sqrt{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}$;   г) $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$.

37. Для того, щоб вектори $\vec{a}=\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ та $\vec{b}=\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ були перпендикулярні, необхідно, щоб:

а) $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$;   б) $\underline{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0}$;   в) $Пр_{\vec{b}}\vec{a}=0$;

г) $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi=0$.

38. Відносно прямої $3x-4y+1=0$ вектор $\vec{s}=\{3;\ -4\}$ є:

а) паралельним;   б) <u>перпендикулярним;</u>

в) належить прямій;   г) утворює з нею тупий кут.

39. Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(4;\ -3)$ паралельно вектору $\vec{s}=\{-5;\ 2\}$ має вигляд:

а) $\underline{\frac{x-4}{-5}=\frac{y+3}{2}}$;   б) $\frac{x+4}{-5}=\frac{y-3}{2}$;   в) $\frac{x-5}{4}=\frac{y+2}{-3}$;

г) $\frac{x+5}{4}=\frac{y-2}{-3}$.

40. Довжина нормального вектора площини $(x-2)+3(y+2)-3(z+3)=0$ дорівнює:

а) $\sqrt{17}$;   б) $\underline{\sqrt{19}}$;   в) $\sqrt{7}$;   г) $2\sqrt{3}+1$.

41. На прямій $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{-4}=\frac{z+5}{6}$ лежить точка:

а) $\underline{A_1(2;\ 0;\ -5)}$;   б) $A_2(2;\ 1;\ -5)$;   в) $A_3(3;\ -4;\ 6)$;

г) $A_4(-3;\ 4;\ -6)$.

42. Кут між прямими $2x - y + 5 = 0$ та $-3x - 6y + 1 = 0$ дорівнює:

а) $\underline{90^0;}$ б) 0^0; в) 45^0; г) 60^0.

43. Який з векторів має одиничну довжину:

а) $\{1;1;1\}$; б) $\{0;1;1\}$; в) $\underline{\left\{\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}};\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}}$; г) $\left\{\frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right\}$.

44. На перетині двох площин $2(x-1)-5(y+6)+3(z-4)=0$ та $x-y+z-12=0$ лежить точка:

а) $M_1(1;\ -6;\ 4)$; б) $M_2(2;\ -5;\ 3)$; в) $\underline{M_3(2;\ -5;\ 5)}$;

г) $M_4(-1;\ 6;\ -4)$.

45. Відстань від точки $M_0(2;\ 3;\ -5)$ до площини Oxy дорівнює:

а) $\sqrt{2^2+3^2+(-5)^2}$; б) $|2+3-5|$; в) $\sqrt{2^2+3^2}$; г) $\underline{5.}$

46. Границя $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$ дорівнює:

а) 0; б) ∞; в) $\underline{3}$; г) 1.

47. Модуль векторного добутку $\vec{a}\times\vec{b}$ дорівнює:

а) $|\vec{a}|\times|\vec{b}|$; б) <u>площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$</u>; в) $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$; г) $np_{\vec{b}}\vec{a}$.

48. Рівняння прямої що проходить через точки $A(5;\ -2)$ та $B(1;\ 1)$ має вигляд:

а) $5(x-1)-2(y-1)=0$; б) $\frac{x-1}{5}=\frac{y-1}{-2}$; в) $\underline{\frac{x-5}{-4}=\frac{y+2}{3}}$;

г) $1\cdot(x-5)+1(y+2)=0$.

49. Вектор $\vec{a} = \{4;\ -6\}$ вдвічі довший за вектор:

а) $\{4;\ 4\}$; б) $\{-2;\ 3\}$; в) $\{2;\ -3\}$; г) $\{16;\ -24\}$.

50. Дано точки $A(2;\ 1;\ -3)$, $B(4;\ 2;\ -2)$ та площину $2x + y + z - 8 = 0$.

Вектор $\vec{AB}$: а) перпендикулярний до площини;

б) паралельний площині; в) його початок належить площині;

г) його кінець належить площині.

51. Площина $2x - 3y + 6z + 30 = 0$ перетинає вісь Oy в точці:

а) $A_1(2;\ 0;\ 6)$; б) $A_2(0;\ -10;\ 0)$; в) $A_3(2;\ -3;\ 6)$;

г) $A_4(0;\ 10;\ 0)$.

52. Границя $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\,3x}{5x}$ дорівнює:

а) $\dfrac{9}{5}$; б) 0; в) $\dfrac{3}{5}$; г) $\dfrac{1}{15}$.

53. Для того, щоб три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ були компланарні необхідно, щоб:

а) їх координати компланарні;

б) вони лежали на одній прямій;

в) їх скалярний добуток дорівнював нулеві;

г) їх мішаний добуток дорівнював нулеві.

54. Вектор $\vec{s} = \{2;\ -7\}$ паралельний прямій:

а) $\dfrac{x+4}{7} = \dfrac{y-5}{-2}$; б) $\dfrac{x+4}{2} = \dfrac{y-5}{-7}$; в) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+7}{-1}$;

г) $\dfrac{x-2}{-7} = \dfrac{y+7}{2}$.

55. Дві прямі $\frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{-1}$ та $\frac{x-5}{4}=\frac{y+8}{-1}$:

а) паралельні; б) перпендикулярні; в) збігаються;

г) мимобіжні.

56. Два вектори $\vec{a}\{3;\ 4;\ 0\}$ $\vec{b}\{-4;\ 3;\ -2\}$:

а) не паралельні; б) паралельні;

в) перпендикулярні; г) однакової довжини.

57. Дано точки $A(2;\ 1;\ -4)$, $B(3;\ 2;\ -2)$. Вектор $\overrightarrow{AB}$

перпендикулярний до площини:

а) $x+y+2z+3=0$; б) $2x+y-4z+3=0$;

в) $3x+2y-2z+3=0$; г) $x+y-2z+3=0$.

58. Границя $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2+1}{2x^2-1}$ дорівнює:

а) $\frac{3}{2}$; б) ∞; в) 4; г) 2.

59. Відстань від точки $M_0(4;\ 3;\ 0)$ до початку координат $O(0;\ 0;\ 0)$

дорівнює:

а) 7; б) 4; в) 3; г) 5.

60. Скалярний добуток векторів $\vec{a}\{3;\ 1\}$, $\vec{b}\{5;\ -2\}$ дорівнює:

а) 13; б) 10; в) 7; г) -1.

61. Модуль векторного добутку векторів $\vec{a}\{3;\ 1\}$, $\vec{b}\{5;\ -2\}$ дорівнює:

а) 3; б) 5; в) 7; г) 11.

62. Відстань від осі OX до прямої $y=2$ дорівнює:

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

63. Одиничним називається вектор:

а) <u>його довжина рівна 1</u>; б) усі координати рівні 1;

в) усі координати рівні 0; г) одна координата рівна 1, а друга рівна –1.

64. Границя $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,6x}{2x}$ дорівнює:

а) 6; б) 2; в) <u>3</u>; г) 1.

65. Границя $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{x}$ дорівнює:

а) 0; б) 1; в) -1; г) <u>∞</u>.

66. Відстань між точками $A(1;1)$ і $B(4;5)$ дорівнює:

а) 1; б) 3; в) <u>5</u>; г) 7.

67. Відстань між паралельними площинами $z=0$ і $z=4$ дорівнює:

а) 2; б) <u>4</u>; в) 16; г) 64.

68. Мимобіжними називаються прямі:

а) паралельні; б) перпендикулярні; в) <u>не паралельні і не перетинаються</u>; г) не паралельні і перетинаються.

69. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$:

а) <u>26</u>; б) 16; в) 5; г) –4.

70**.** При додаванні відповідних чисел двох довільних рядків визначника його значення:

а) збільшиться; б) зменшиться; в) <u>не зміниться</u> ; г) подвоїться.

71. Довжина векторного добутку векторів $\vec{a}=\{1;1;1\}$ та $\vec{b}=\{-2;-2;-2\}$ дорівнює:

а) <u>0</u>; б) 1; в) 2; г) 4.

72. Границя константи дорівнює:

а) 0; б); ∞ в) <u>константі</u>; г) не існує.

73. Якщо вектор $\vec{a} = \{1;-2;2\}$, тоді вектор $2\vec{a}$ буде:

а); $\{2;-2;2\}$ б) $\{1;1;1\}$; в) $\{-2;4;-4\}$; г) $\underline{\{2;-4;4\}}$.

74. Векторний добуток $\vec{i} \times \vec{j}$ дорівнює:

а) 0; б) 1; в) ∞; г) . $\underline{\vec{k}}$

75. Скалярний добуток $(\vec{i}, \vec{j})$ дорівнює:

а) <u>0</u>; б) 1; в) ∞; г) . 2

76. Яка точка належить прямій $2x + 3y - 6 = 0$

а) $M_1(2;\ 3)$; б) $\underline{M_2(0;\ 2)}$; в) $M_3(0;\ 3)$; г) $M_4(6;\ 0)$.

77. Яка точка належить площині $x + y + z - 3 = 0$

а) $\underline{M_1(1;\ 1;1)}$; б) $M_2(-1;1;1)$; в) $M_3(0;\ 1;-1)$; г) $M_4(2;\ 5;1)$.

78. Визначник $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$ дорівнює:

а) 3; б) 15; в) <u>0</u>; г) –7.

79. Рівність $tg\, x \approx x$ діє, коли:

а) $x \to 1$; б) $\underline{x \to 0}$; в) $x \to -1$;

г) $x \to \infty$.

80. Три вектори компланарні, якщо;

а) взаємноперпендикулярні; б) усі три одиничні;

в) <u>усі лежать в одній площині</u>; г) утворюють базис.

81. Похідна функції $y = \cos^3 x$ дорівнює:

а) $\underline{-3\cos^2 x \cdot \sin x}$; б) $3\sin^2 \cos x$; в) $\frac{\cos^4 x}{4}$; г) $\frac{\cos^2 x}{3}$.

82. Інтеграл $\int \frac{1}{\sin^2(3x+1)} dx$ дорівнює:

а) $ctg(3x+1) + C$; б) $tg(3x+1) + C$; в) $-3ctg(3x+1) + C$; г) $\underline{-\frac{1}{3} ctg(3x+1) + C}$.

83.Похідна функції $y = tg^5 x$ дорівнює:

а) $5tg^4 x$; б) $\frac{tg^6 x}{6}$; в) $\frac{tg^4 x}{4}$; г) $\underline{5tg^4 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}$.

84. Інтеграл $\int \sqrt{1+x} dx$ дорівнює:

а) $\frac{1}{2\sqrt{1+x}} + C$; б) $\underline{\frac{(1+x)^{3/2}}{3/2} + C}$; в) $\frac{1}{2}\sqrt{1+x} + C$;

г) $\frac{(1+x)^{2/3}}{2/3} + C$.

85. Похідна функції $y = e^{-3x}$ дорівнює:

а) $\frac{e^{-3x+1}}{-3x+1}$; б) $\frac{e^{-3x-1}}{-3x-1}$; в) $\underline{-3e^{-3x}}$; г) $\frac{e^{-3x}}{-3}$.

86. Інтеграл $\int \sin^4 x \cdot \cos x dx$ дорівнює:

а) $\underline{\frac{\sin^5 x}{5} + C}$; б) $\frac{\cos^5 x}{5} + C$; в) $4\sin^3 x + C$; г) $4\cos^3 x + C$.

87. Похідна функції $y = \arcsin 3x$ дорівнює:

а) $3\arccos x$; б) $\underline{\dfrac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}}$; в) $3\arcsin x$; г) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

88. Інтеграл $\int \sin^4 x \cdot \cos x dx$ дорівнює:

а) $\underline{\dfrac{\sin^5 x}{5}+C}$; б) $\dfrac{arctg^3 x}{3}$; в) $\dfrac{2}{1+x^2}$; г) $2\, arctg\, x$.

89. Похідна функції $y = arctg^2 x$ дорівнює:

а) $\underline{\dfrac{2arctg\ x}{1+x^2}}$; б) $\dfrac{arctg^3 x}{3}$; в) $\dfrac{2}{1+x^2}$; г) $2\, arctg\, x$.

90. Інтеграл $\int tg^3 x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} dx$ дорівнює:

а) $\underline{\dfrac{tg^4 x}{4}+C}$; б) $3tg^2 x + C$; в) $\dfrac{1}{3} tg^4 x + C$; г) $\dfrac{tg^2 x}{2}+C$.

91. Інтеграл $\int \dfrac{1}{x^2} dx$ дорівнює:

а) $\underline{-\dfrac{1}{x}+C}$; б) $\dfrac{x^{-3}}{-3}+C$; в) $\ln^2 x + C$; г) $\dfrac{x^3}{3}+C$.

92. Інтеграл $\int \cos(1-2x) dx$ дорівнює:

а) $2\sin(1-x)+C$; б) $-4\sin(1-2x)+C$; в) $\underline{-\dfrac{1}{2}\sin(1-2x)+C}$;

г) $\dfrac{1}{4}\sin(1-2x)+C$.

93. Похідна функції $y = \ln(5x+1)$ дорівнює:

а) $\dfrac{1}{x+1}$; б) $\dfrac{5}{x+1}$; в) $\underline{\dfrac{5}{5x+1}}$; г) $\dfrac{5\ln^2(5x+1)}{2}$.

94. Інтеграл $\int \sin(2x-3) dx$ дорівнює:

а) $\underline{-\frac{1}{2}\cos(2x-3)+C}$; б) $2\cos(2x-3)+C$; в) $\frac{1}{4}\sin^2(2x-3)+C$;

г) $2\cos(x-3)+C$.

95. Похідна функції $y=ctg(4x+1)$ дорівнює:

а) $\underline{-\frac{4}{\sin^2(4x+1)}}$; б) $-\frac{4}{\cos^2(4x+1)}$; в) $\frac{1}{\sin^2(4x+1)}$; г) $-\frac{4}{\sin^2(x+1)}$.

96. Інтеграл $\int\frac{1}{3x+5}dx$ дорівнює:

а) $\frac{(3x+5)^{-2}}{-2}+C$; б) $\underline{\frac{1}{3}\ln(3x+5)+C}$; в) $3\ln(3x+5)+C$;

г) $arctg\frac{5}{3}x+C$.

97. Похідна функції $y=\cos(\ln x)$ дорівнює:

а) $\frac{\cos^2(\ln x)}{2}$; б) $\underline{-\frac{\sin(\ln x)}{x}}$; в) $\sin(\ln x)$; г) $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

98. Похідна функції $y=\ln(\sin x)$ дорівнює:

а) $tg\,x$; б) $\underline{ctg\,x}$; в) $\frac{1}{\sin x}$; г) $\frac{1}{\cos x}$.

99. Інтеграл $\int e^{-5x}dx$ дорівнює:

а) $\underline{-\frac{e^{-5x}}{5}+C}$; б) $\frac{e^{-5x+1}}{-5x+1}+C$; в) $\frac{e^{-5x-1}}{-5x-1}+C$; г) $-5e^{-5x}+C$.

100. Точка $x_1=1$ для функції $y=x^2-2x$ є точкою:

а) максимуму; б) <u>мінімуму;</u> в) перегину; г) розриву.

Примітка: В усіх тестах серед варіантів відповідей підкреслено правильну відповідь до даного тесту

Додаток В

Криві другого порядку

Еліпс

Канонічне рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a \geq b)$$

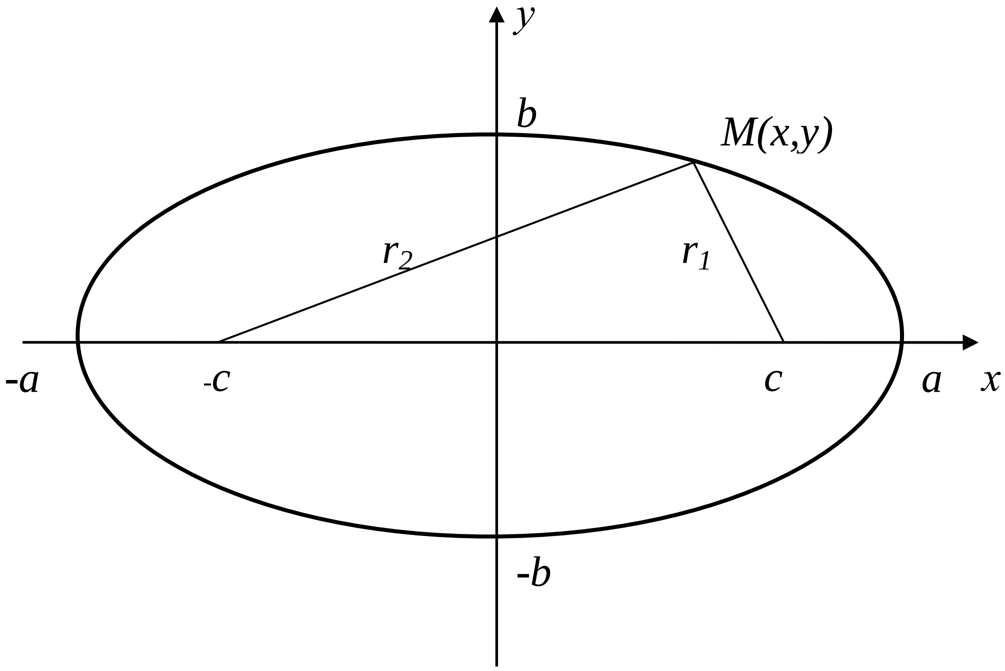


Рис. 1. Еліпс

Введемо параметр c, який визначає координати фокусів еліпса

$$c=\sqrt{a^2-b^2}$$

Ексцентриситет еліпса: $e=\dfrac{c}{a}(0 \leq e < 1) \to (0 \leq e < 1)$

Якщо $e=0 \Rightarrow a=b \Rightarrow$ маємо коло

$$x^2+y^2=a^2$$

Характеристична ознака еліпса:

$$\boldsymbol{r_1+r_2=2a}$$

Гіпербола

Канонічне рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

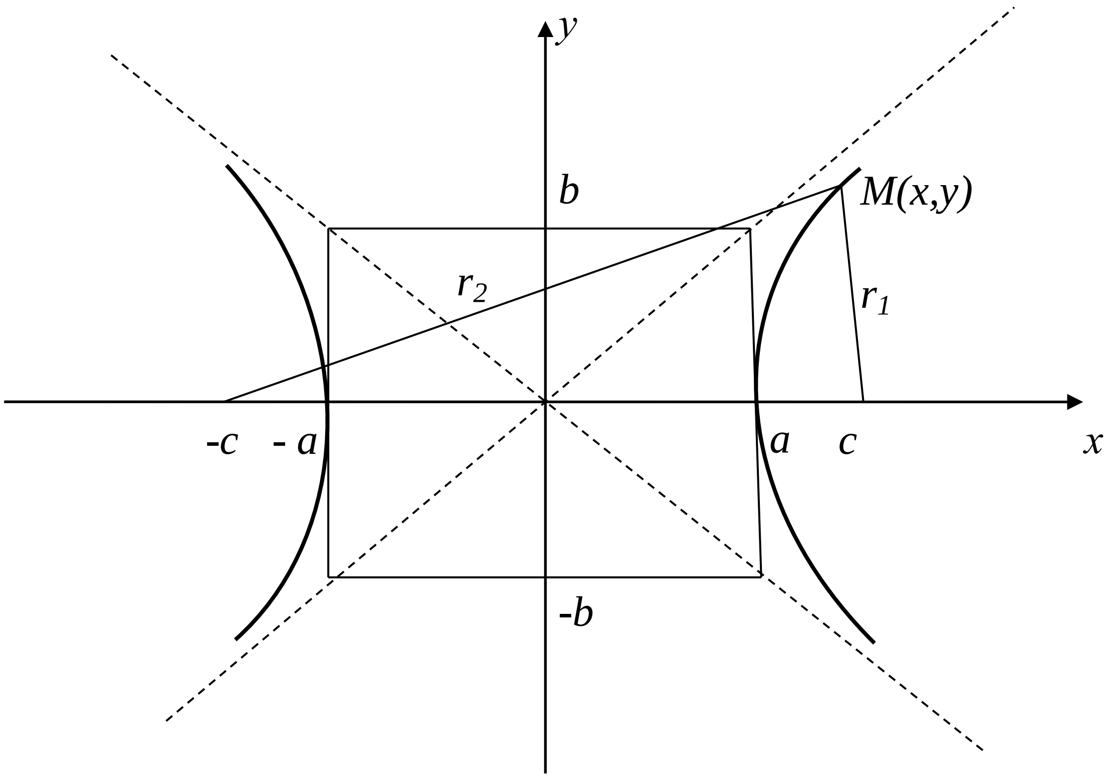


Рис. 2. Гіпербола

Введемо параметр *c*, який визначає координати фокусів гіперболи

$$c=\sqrt{a^2+b^2};$$

$$y=\pm\frac{b}{a}x$$ *– асимптоти гіперболи,*

$$e=\frac{c}{a}\ (e>1)$$ *– ексцентриситет гіперболи.*

Характеристична ознака гіперболи

$$\boldsymbol{|r_1-r_2|=2a}$$

Парабола

Канонічне рівняння:

$$y^2 = 2px,$$

де p – параметр параболи, $p > 0$

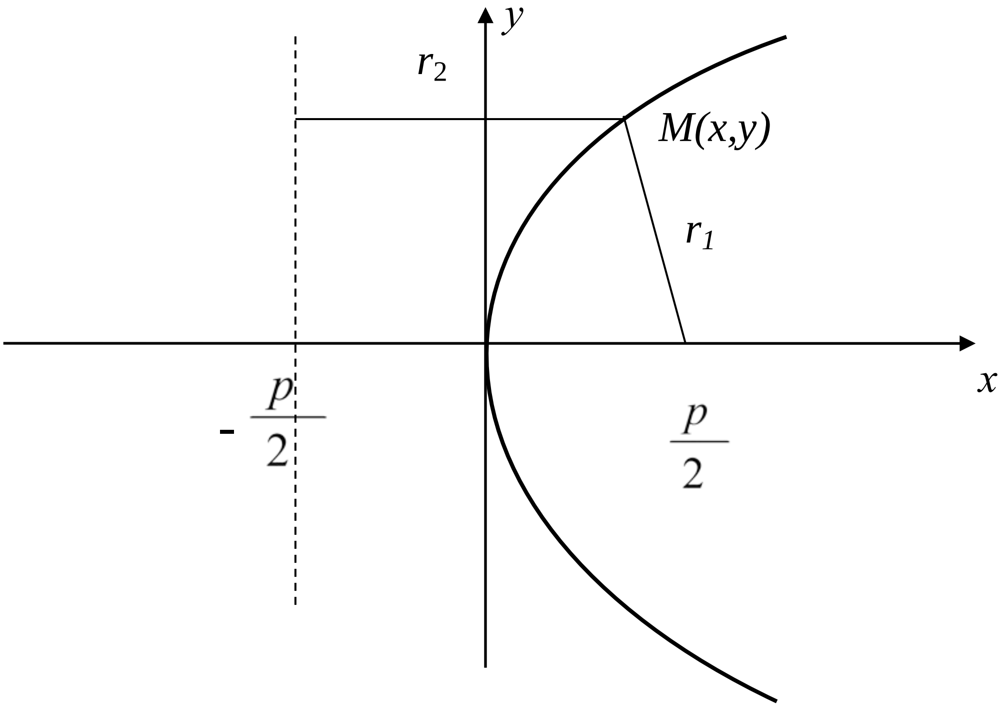


Рис. 3. Парабола

$$x = -\frac{p}{2} - \text{ *директриса параболи.*}$$

Характеристична ознака параболи:

$$\boldsymbol{r_1 = r_2}$$

Додаток Г

УКРАЇНСЬКО-АНГЛІЙСЬКИЙ СЛОВНИК КЛЮЧОВИХ СЛІВ, ТЕРМІНІВ І ВИСЛОВІВ

Вища математика − higher mathematics.

Відрізок − segment, (closed) interval; відрізок, що відсікається на осі (прямий лінії) − intercept (of a straight line).

Вектор – vector.

Границя – limit; границя множини – frontier of set;

границя послідовності – limit of sequence.

Задача – problem, task; задача Коши – Cauchy problem.

Інформація − information theory; блок інформації – message.

Канонічний – canonical, classical, accepted; канонічний базис – canonical basis; канонічний вид – canonical form.

Кут − angle, corner; під кутом в – at an angle (of); під прямим кутом – at right angles.

Методи розв’язування − methods of solving.

Об’єм – volume, size, extent, extension.

Рівняння – equation.

Піраміда − pyramid; пірамідальний – pyramidal.

Площина – flat, plane.

Похідна – derivative; fluxion.

Проінтегрувати − integrate; проінтегрувати по − integrate over.

Пряма – straight (right) line.

Провести пряму лінію – to draw a right (straight) line.

Система рівнянь − a system of equations; an equation system.

Система алгебраїчних рівнянь − a system of algebraic equations.

Система лінійних алгебраїчних рівнянь − the system of linear algebraic equations.

Формула – formula.

Навчальне видання

Дубчак Віктор Миколайович
Пришляк Віктор Миколайович
Новицька Людмила Іванівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА В ПРИКЛАДАХ ТА ЗАДАЧАХ

Навчальний посібник

Підписано до друку _._.2018. Формат 30х42/4.
Папір офсетний. Ризографія. Авт. арк. 10.4
Обл.-вид. арк. 10.4. Тираж 300 прим. Зам.____.

Підготовлено до друку та надруковано
у вищому навчальному закладі
«Вінницький національний аграрний університет».

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842.
21000, м. Вінниця, вул. Сонячна, 3.