Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2016, т. 13, № 2, 1–13

УДК 517.51

*Д. А. Найко*

*(Вінницький національний аграрний університет)*

# Про деякі апроксимаційні властивості $q$–параметричних многочленів Бернштейна

**dmnaiko@ukr.net**

In 1997 Phillips [1] introduced generalized Bernstein polynomials $B_n(f,q;x)$ based on the $q$–integers and $q$–binomial coefficients for any $q>0$. For $q=1$, generalized Bernstein polynomials $B_n(f,q;x)$ coincide with the classical ones $B_n(f;x)$. For $q\neq 1$, one gets a new class of polynomials having many interesting properties. In this paper we obtain the asymptotic formulae on the approximation of function $f(t)=t^i \ \ (i\in Z)$ by the generalized Bernstein polynomials $B_n(f,q;x)$ in the case $q$ is fixed as $n\to +\infty$.

В 1997 році Філіпс (Fhillips) ввів узагальнені поліноми Бернштейна $B_n(f,q;x)$, побудовані на $q$–біноміальних коефіцієнтах ($q>0$). При $q=1$ поліноми $B_n(f,q;x)$ збігаються з класичними многочленами Бернштейна $B_n(f;x)$, але у випадку $q\neq 1$ — це новий клас поліномів, що мають цілий ряд цікавих властивостей. Ми встановлюємо асимптотичну формулу наближення $q$–поліномами Бернштейна степеневої функції при фіксованому $q$.

Наведемо означення $q$–поліномів Бернштейна, введених Філіпсом [1], та деякі їхні властивості, пов'язані в тій чи іншій мірі з нашим дослідженням. Деякі результати досліджень цих операторів можна знайти, зокрема, в роботах [1–10].

Нехай $q > 0$. Для будь–якого $n = 0, 1, 2, ...$ у вигляді

$$[n]_q := 1 + q + ... + q^{n-1} \quad (n \in N), \quad [0]_q := 0,$$

визначається $q$–число $[n]_q$. Вводимо $q$–факторіал $[n]_q!$ за допомогою рівності

$$[n]_q! = [1]_q [2]_q ... [n]_q \quad (n \in N), \quad [0]_q! := 0.$$

$q$–біноміальними коефіцієнтами називаються числа

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n-k]_q!}, \ 0 \leq k \leq n.$$

**Означення.** *Нехай $f \in C[0, 1]$. Узагальненим поліномом Бернштейна, побудованим на $q$–числах, називається поліном*

$$B_n(f, q; x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-1-k} (1 - q^s x), \tag{1}$$

$n = 1, 2, \ldots$. (Вважаємо, що порожній добуток дорівнює одиниці). Ці поліноми ввів Філіпс [1] у 1997 році.

Оскільки параметр $q$ вводиться в номери членів послідовності $\{B_n(f, q; x)\}$, то зміна параметра $q$ призводить до зміни швидкості збіжності цієї послідовності. Якщо $q = 1$, то $B_n(f, q; x) = B_n(f; x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k (1-x)^{n-k}$ — класичний многочлен Бернштейна.

З (1) випливає, що $B_n(f, q; 0) = f(0)$, $B_n(f, q; 1) = f(1)$ при всіх $q > 0$ та $n \in N$.

В [1] показано, що

$$B_n(at + b, q; x) = ax + b \tag{2}$$

для всіх $q > 0$ та $n \in N$ і доведено таку теорему (див. також [2]).

**Теорема 1.** *Нехай послідовність* $\{q_n\}$ *така, що* $0 < q_n < 1$ *і* $q_n \to 1$ *при* $n \to \infty$. *Тоді для будь–якої функції* $f \in C[0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f, q_n; x) = f(x) \text{ рівномірно відносно } x \in [0,1].$$

Позначимо через $p_{nk}(q;x) := \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-1-k} (1 - q^s x), \quad n \in N.$

Очевидно, що $p_{nk}(q;x) \geq 0$ при $q \in (0,1)$ та $x \in [0,1]$. З (2) при $a = 0$, $b = 1$ одержуємо, що $\sum_{k=0}^{n} p_{nk}(q;x) = 1 \quad \forall n \in N$. Легко бачити, що $\lim_{n\to\infty} \frac{[k]_q}{[n]_q} = 1 - q^k$.

Позначимо через

$$p_{\infty k}(q;x) := \lim_{n\to\infty} p_{nk}(q;x) = \frac{x^k}{(1-q)^k [k]_q!} \prod_{s=0}^{\infty} (1 - q^s x).$$

Очевидно, що $p_{\infty k}(q;x) \geq 0$ для $x \in [0,1]$, крім того (див. [11]) $\sum_{k=0}^{\infty} p_{\infty k}(q;x) = 1$.

Нехай

$$B_\infty(f, q; x) := \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} f(1 - q^k) p_{\infty k}(q;x), & x \in [0,1); \\ f(1), & x = 1. \end{cases} \tag{3}$$

О. Ільїнським та С. Островською [2] встановлено такі результати.

**Теорема 2.** *Для будь–якої функції* $f \in C[0,1]$

$$\lim_{q\to 1-o} B_\infty(f, q; x) = f(x) \text{ рівномірно по } x \in [0,1].$$

**Теорема 3.** *Якщо* $f$ *— многочлен, то* $B_\infty(f,q;x)$ *теж многочлен, причому*

$$\deg B_\infty(f,q;x) = \deg f.$$

**Теорема 4.** *Нехай* $f$ *є многочлен. У такому разі* $B_\infty(f,q;x) = 0$ *тоді і тільки тоді, коли* $f = 0$.

**Теорема 5.** *Нехай* $f \in C[0,1]$, *фіксоване* $q \in (0,1)$. *То* $B_\infty(f,q;x) = f(x) \quad \forall x \in [0,1]$ *тоді і тільки тоді, коли* $f(x) = ax+b, \ a,b \in R$.

З (1) випливає, що при $0 < q \le 1 \ \ B_n(f,q;x)$ є лінійним додатним оператором на $[0,1]$.

У випадку $q \ge 1$ Філіпс [1] показав, що

$$B_n(t^2,q;x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{[n]_q}. \tag{4}$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} B_n(t^2,q;x) = x^2$ тоді і тільки тоді, коли $q \ge 1$.

Дослідження операторів $B_n(f,q;x)$ у випадку $q \ge 1$ можна знайти, наприклад, в [3].

**Теорема 6.** *Нехай* $q \ge 1$ *— фіксоване дійсне число. Тоді для будь–якого многочлена* $p(x)$

$$\lim_{n\to\infty} B_n(p,q;x) = p(x).$$

**Теорема 7.** *Нехай* $q \in (1,\infty)$, *а функція* $f$ *— аналітична в деякому* $\varepsilon$*–околі з відрізка* $[0,1]$. *Тоді для будь–якої компактної множини* $K \subset D_\varepsilon := \{z : |z| < \varepsilon\}$

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f,q;z) = f(z), \ \ \forall z \in K.$$

Наступна теорема описує поведінку оператора $B_n(f,q;x)$ при $q \to +\infty$ та достатній гладкості функції $f$.

**Теорема 8.** *Нехай* $f \in C^{n-1}[0,1]$. *Тоді для будь–якої компактної множини* $K \subset C$

$$\lim_{q\to+\infty} B_n(f,q;z) = B_n(f,\infty;x) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} +$$

$$+ z^n \left\{ f(1) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right\}$$

*рівномірно по* $z \in K$.

**Наслідок 1.** *Якщо $f$ аналітична в крузі $D_R$, $R > 1$, то*

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f,\infty;z) = f(z), \quad |z| \le 1, \text{ рівномірно по } z.$$

Отже, взявши $q$ нескінченно великим, ми отримуємо послідовність $\{B_n(f,q;x)\}$ з хорошими аппроксимаційними властивостями.

**Наслідок 2.** *Якщо $p$ — многочлен степеня $\le n$, то $B_n(p,\infty;z) = p(z)$.*

Встановимо теорему про асимптотичне подання $B_n(t^i,q;x)$, $i = 0,1,2,\ldots$, за степенями $[n]_q$.

В [5] показано, що

$$B_n(t^i,q;x) = \sum_{j=0}^{i} \alpha_j(q,n)[n]_q^{j-i} S_q(i,j)x^j, \tag{5}$$

де

$$\alpha_j = \alpha_j(q,n) = \prod_{r=0}^{j-1}\left(1 - \frac{[r]_q}{[n]_q}\right) \tag{6}$$

(вважаємо, що порожній добуток дорівнює 1); функції $S_q(i,j)$ задовольняють рекурентне співвідношення

$$S_q(i+1,j) = S_q(i,j-1) + [j]_q S_q(i,j),$$

де $S_q(0,0) := 1$, $S_q(i,0) := 0$ при $i > 0$, $S_q(i,j) := 0$ при $i < j$.

**Теорема 9.** *При фіксованому $i$ $q$–поліном Бернштейна $B_n(t^i,q;x)$ має таке асимптотичне подання*

$$\begin{aligned} B_n(t^i,q;x) = \sum_{m=0}^{i} \frac{1}{[n]_q^m} \sum_{p=i-m}^{i} (-1)^{p+m-i} x^p S_q(i,p)\times \\ \times \sum_{(s_1,\ldots,s_{p+m-i})}^{p-1} [s_1]_q \ldots [s_{p+m-i}]_q, \end{aligned} \tag{7}$$

*де сума* $\sum\limits_{(s_1,\ldots,s_r)}^{k} [s_1]_q \ldots [s_r]_q$ *береться за всіма можливими комбінаціями* $(s_1,\ldots,s_r)$ *з перших* $k$ *чисел послідовності* $1,2,\ldots,$ $i-1$ *по* $r$ *чисел; крім того,* $\sum\limits_{(s_1,\ldots,s_0)}^{k} [s_1]_q \ldots [s_0]_q := 1$ *коли* $k = -1,0,1,2,\ldots;$ $\sum\limits_{(s_1,\ldots,s_r)}^{k} [s_1]_q \ldots [s_r]_q := 0,$ *коли* $r > k$.

**Доведення.** Спочатку знайдемо асимптотичне подання за степенями $[n]_q$ чисел $\alpha_j$ з (6). А саме, покажемо, що

$$\alpha_j(q,n) = \sum_{r=0}^{j-1} (-1)^r \frac{1}{[n]_q^r} \sum_{(s_1,\ldots,s_r)}^{j-1} [s_1]_q \ldots [s_r]_q. \tag{8}$$

Доведення цього факту проведемо індукцією по $j$. Справді, з (6) маємо

$$\alpha_1(q,n) = 1, \;\; \alpha_2(q,n) = \alpha_1(q,n)\left(1 - \frac{[1]_q}{[n]_q}\right) = 1 - \frac{[1]_q}{[n]_q},$$

$$\alpha_3(q,n) = \alpha_2(q,n)\left(1 - \frac{[2]_q}{[n]_q}\right) = \left(1 - \frac{[1]_q + [2]_q}{[n]_q} + \frac{[1]_q[2]_q}{[n]_q^2}\right),$$

$$\alpha_4(q,n) = \alpha_3(q,n)\left(1 - \frac{[3]_q}{[n]_q}\right) = \left(1 - \frac{[1]_q + [2]_q + [3]_q}{[n]_q} + \right.$$

$$\left. + \frac{[1]_q[2]_q + [1]_q[3]_q + [2]_q[3]_q}{[n]_q^2} - \frac{[1]_q[2]_q[3]_q}{[n]_q^3}\right).$$

Припустимо, що рівність (8) виконується для $j \in N$ і доведемо її виконання для $j+1$. Справді,

$$\alpha_{j+1}(q,n) = \alpha_j(q,n)\left(1-\frac{[j]_q}{[n]_q}\right) = \sum_{r=0}^{j-1}(-1)^r\frac{1}{[n]_q^r}\times$$

$$\times\sum_{(s_1,\dots,s_r)}^{j-1}[s_1]_q\dots[s_r]_q + \sum_{r=0}^{j-1}(-1)^{r+1}\frac{1}{[n]_q^{r+1}}\sum_{(s_1,\dots,s_r)}^{j-1}[s_1]_q\dots[s_r]_q[j]_q =$$

$$=\sum_{r=0}^{j-1}(-1)^r\frac{1}{[n]_q^r}\sum_{(s_1,\dots,s_r)}^{j-1}[s_1]_q\dots[s_r]_q + \sum_{m=0}^{j}(-1)^m\frac{1}{[n]_q^m}\times$$

$$\times\sum_{(s_1,\dots,s_m)}^{j}[s_1]_q\dots[s_m]_q = (-1)^0\frac{1}{[n]_q^0}\sum_{(s_1,\dots,s_0)}^{j-1}[s_1]_q\dots[s_0]_q+$$

$$+\sum_{r=1}^{j-1}(-1)^r\frac{1}{[n]_q^r}\sum_{(s_1,\dots,s_r)}^{j-1}[s_1]_q\dots[s_r]_q + \sum_{m=1}^{j-1}(-1)^m\frac{1}{[n]_q^m}\times$$

$$\times\sum_{(s_1,\dots,s_m)}^{j}[s_1]_q\dots[s_m]_q+(-1)^j\frac{1}{[n]_q^j}\sum_{(s_1,\dots,s_j)}^{j}[s_1]_q\dots[s_j]_q =(-1)^0\frac{1}{[n]_q^0}\times$$

$$\times\sum_{(s_1,\dots,s_0)}^{j}[s_1]_q\dots[s_0]_q+\sum_{r=1}^{j-1}(-1)^r\frac{1}{[n]_q^r}\left(\sum_{(s_1,\dots,s_r)}^{j-1}[s_1]_q\dots[s_r]_q+\right.$$

$$\left.+\sum_{(s_1,\dots,s_r)}^{j}[s_1]_q\dots[s_r]_q\right) + (-1)^j\frac{1}{[n]_q^j}\sum_{(s_1,\dots,s_j)}^{j}[s_1]_q\dots[s_j]_q =$$

.

$$= (-1)^0 \frac{1}{[n]_q^0} \sum_{(s_1,\dots,s_0)}^{j} [s_1]_q \dots [s_0]_q + \sum_{r=1}^{j-1} (-1)^r \frac{1}{[n]_q^r} \sum_{(s_1,\dots,s_r)}^{j} [s_1]_q \dots [s_r]_q +$$

$$+ (-1)^j \frac{1}{[n]_q^j} \sum_{(s_1,\dots,s_j)}^{j} [s_1]_q \dots [s_j]_q = \sum_{r=0}^{j} (-1)^r \frac{1}{[n]_q^r} \sum_{(s_1,\dots,s_r)}^{j} [s_1]_q \dots [s_r]_q .$$

Рівність (8) доведено.

З (5) та (8) маємо

$$B_n(t^i, q; x) = \sum_{j=0}^{i} x^j S_q(i,j) \sum_{r=0}^{j} (-1)^r \frac{1}{[n]_q^{i+r-j}} \times \\ \times \sum_{(s_1,\dots,s_r)}^{j-1} [s_1]_q \dots [s_r]_q . \tag{9}$$

Міняючи в (9), де потрібно, порядок сум, одержимо

$$B_n(t^i, q; x) = x^0 S_q(i,0) \{ (-1)^0 \frac{1}{[n]_q^i} \sum_{(s_1,\dots,s_0)}^{-1} [s_1]_q \dots [s_0]_q \} +$$

$$+ x^1 S_q(i,1) \{ (-1)^0 \frac{1}{[n]_q^{i-1}} \sum_{(s_1,\dots,s_0)}^{0} [s_1]_q \dots [s_0]_q + (-1)^1 \frac{1}{[n]_q^i} \times$$

$$\times \sum_{(s_1,\dots,s_1)}^{0} [s_1]_q \dots [s_1]_q \} + x^2 S_q(i,2) \{ (-1)^0 \frac{1}{[n]_q^{i-2}} \sum_{(s_1,\dots,s_0)}^{1} [s_1]_q \dots [s_0]_q +$$

$$+ (-1)^1 \frac{1}{[n]_q^{i-1}} \sum_{(s_1,\dots,s_1)}^{1} [s_1]_q \dots [s_1]_q + (-1)^2 \frac{1}{[n]_q^i} \sum_{(s_1,\dots,s_2)}^{1} [s_1]_q \dots [s_2]_q \} +$$

$$+x^3 S_q(i,3)\{(-1)^0 \frac{1}{[n]_q^{i-3}} \sum_{(s_1,\ldots,s_0)}^{2} [s_1]_q ... [s_0]_q + (-1)^1 \frac{1}{[n]_q^{i-2}} \times$$

$$\times \sum_{(s_1,\ldots,s_1)}^{2} [s_1]_q ... [s_1]_q + (-1)^2 \frac{1}{[n]_q^{i-1}} \sum_{(s_1,\ldots,s_2)}^{2} [s_1]_q ... [s_2]_q +$$

$$+(-1)^3 \frac{1}{[n]_q^{i}} \sum_{(s_1,\ldots,s_3)}^{2} [s_1]_q ... [s_3]_q\} + \ldots + x^i S_q(i,i)\{(-1)^0 \frac{1}{[n]_q^0} \times$$

$$\times \sum_{(s_1,\ldots,s_0)}^{i-1} [s_1]_q ... [s_0]_q + (-1)^1 \frac{1}{[n]_q} \sum_{(s_1,\ldots,s_1)}^{i-1} [s_1]_q ... [s_1]_q + (-1)^2 \frac{1}{[n]_q^2} \times$$

$$\times \sum_{(s_1,\ldots,s_2)}^{i-1} [s_1]_q ... [s_2]_q + ... + (-1)^i \frac{1}{[n]_q^i} \sum_{(s_1,\ldots,s_i)}^{i-1} [s_1]_q ... [s_i]_q\} =$$

$$= \frac{1}{[n]_q^0}\{(-1)^0 x^i S_q(i,i) \sum_{(s_1,\ldots,s_0)}^{i-1} [s_1]_q ... [s_0]_q\} + \frac{1}{[n]_q}\{(-1)^0 x^{i-1} \times$$

$$\times S_q(i,i-1) \sum_{(s_1,\ldots,s_0)}^{i-2} [s_1]_q ... [s_0]_q + (-1)^1 x^i S_q(i,i) \sum_{(s_1,\ldots,s_1)}^{i-1} [s_1]_q ... [s_1]_q\} +$$

$$+ \frac{1}{[n]_q^2}\{(-1)^0 x^{i-2} S_q(i,i-2) \sum_{(s_1,\ldots,s_0)}^{i-3} [s_1]_q ... [s_0]_q +$$

$$+(-1)^1 x^{i-1} S_q(i,i-1) \sum_{(s_1,\ldots,s_1)}^{i-2} [s_1]_q ... [s_1]_q + (-1)^2 x^i S_q(i,i) \times$$

$$\times\sum_{(s_1,\dots,s_2)}^{i-1}[s_1]_q\dots[s_2]_q\}+\dots+\frac{1}{[n]_q^i}\{(-1)^0x^0S_q(i,0)\sum_{(s_1,\dots,s_0)}^{-1}[s_1]_q\dots[s_0]_q+$$

$$+(-1)^1x^1S_q(i,1)\sum_{(s_1,\dots,s_1)}^{0}[s_1]_q\dots[s_1]_q+(-1)^2x^2S_q(i,2)\times$$

$$\times\sum_{(s_1,\dots,s_2)}^{1}[s_1]_q\dots[s_2]_q+\dots+(-1)^ix^iS_q(i,i)\sum_{(s_1,\dots,s_i)}^{i-1}[s_1]_q\dots[s_i]_q\}=$$

$$=\sum_{m=0}^{i}\frac{1}{[n]_q^m}\sum_{k=0}^{m}(-1)^kx^{i-m+k}S_q(i,i-m+k)\sum_{(s_1,\dots,s_k)}^{i-m+k-1}[s_1]_q\dots[s_k]_q=$$

$$=\{p:=i-m+k\Rightarrow k=p+m-i;\quad k=0\Rightarrow p=i-m;$$

$$k=m\Rightarrow p=i\}=$$

$$=\sum_{m=0}^{i}\frac{1}{[n]_q^m}\sum_{p=i-m}^{i}(-1)^{p+m-i}x^pS_q(i,p)\sum_{(s_1,\dots,s_{p+m-i})}^{p-1}[s_1]_q\dots[s_{p+m-i}]_q.$$

Теорему доведено.

Оскільки $S_q(i,i)=1$, $\sum\limits_{(s_1,\dots,s_0)}^{i-1}[s_1]_q\dots[s_0]_q=1$, то

$$B_n(t^i,q;x)=x^i+\sum_{m=1}^{i}\frac{1}{[n]_q^m}\sum_{p=i-m}^{i}(-1)^{p+m-i}x^pS_q(i,p)\times$$
$$\times\sum_{(s_1,\dots,s_{p+m-i})}^{p-1}[s_1]_q\dots[s_{p+m-i}]_q. \tag{10}$$

Позначимо

$$A_m(i,q,x) := \sum_{p=i-m}^{i} (-1)^{p+m-i} x^p S_q(i,p) \sum_{(s_1,\ldots,s_{p+m-i})}^{p-1} [s_1]_q \ldots [s_{p+m-i}]_q.$$

Тоді рівність (10) набуває вигляду

$$B_n(t^i,q;x) = x^i + \sum_{m=1}^{i} \frac{A_m(i,q,x)}{[n]_q^m}, \tag{11}$$

де $A_m(i,q,x)$ не залежать від $n$.

**Наслідок 1.** *При $i = 2$ з (10) та (11) одержуємо рівність (4).*

**Наслідок 2.** *Оскільки при фіксованому $q \geq 1$ з умови $n \to \infty$ випливає умова $[n]_q \to \infty$, то з (11) одержуємо теорему 6.*

**Наслідок 3.** *Якщо $\varphi(x)$ — многочлен, то при фіксованих $n$ та $q$ з (11) одержуємо, що*

$$\deg B_n(\varphi(t),q;x) = \deg \varphi(x),$$

*бо $A_m(i,q,x)$ є многочленом степеня $i-1$ відносно $x$.*

**Зауваження.** Рівність (11) може бути використана для встановлення асимптотичних формул для центральних моментів операторів $B_n(\cdot,q;x)$, як це робилось автором [16–18] у випадку лінійних додатних операторів класу Волкова [12–15] та їх комбінацій.

## Список літератури

[1] *Phillips G. M.* Bernstein polynomials based on the $q$–integers // Ann. Numer. Math. — 1997. — **4**. — P. 258–264.

[2] *Il'inskii A. and Ostrovska S.* Convergence of generalized Bernstein polynomials // J. Approx. Theory. — 2002. — **116**. — P. 100–112.

[3] *Ostrovska S.* $q$–Bernstein polynomials and their iterates // J. Approx. Theory. — 2003. — **123**, № 2. — P. 232–255.

[4] *Ostrovska S.* On the improvement of analytic properties under the limit $q$–Bernstein operator // J. Approx. Theory. — 2006. — **138**. — P. 37–53.

[5] *Goodman T. N. T., Oruc H. and Phillips G. M.* Convexity and generalized Bernstein polynomials // Proc. Edinburgh Math. Soc. — 1999. — **42**, № 1. — P. 179–190.

[6] *Heping Wong and Meng Fanjun* The rate of convergence of $q$–Bernstein polynomials for $0 < q < 1$ // J. Approx. Theory. — 2005. — **136**. — P. 151–158.

[7] *Heping Wong* Korovkin-type theorem and application // J. Approx. Theory. — 2005. — **132**, № 2. — P. 133–165.

[8] *Oruc H. and Phillips G. M.* A generalization of Bernstein polynomials // Proc. Edinburgh Math. Soc. — 1999. — **42**, № 2. — P. 403–413.

[9] *Oruc H. and Tuncer N.* On the convergence and iterates of $q$–Bernstein polynomials // J. Approx. Theory. — 2002. — **117**. — P. 301–313.

[10] *Tiberiu Trif* Meyer-König and Zeller operators based on the $q$–integers // Rev. Anal. Numer. Theory Approx. — 2000. — **29**, № 2. — P. 221–229.

[11] *Andrews G. E.* The theory of partitions. — Addison-Wesley: Reading, **MA**, 1976.

[12] *Волков Ю. И.* Об аппроксимационных операторах, порожденных нетрицательными мерами // ДАН СССР. — 1982. — **263**, № 2. — С. 280–282.

[13] *Волков Ю. И.* Многомерные аппроксимационные операторы, порожденные мерами Лебега-Стилтьеса // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1983. — **47**, № 3. — С. 435–454.

[14] *Волков Ю. И.* Новые примеры аппроксимационных линейных положительных операторов // Методы теории приближения и их приложения. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1982. — С. 10–19.

[15] *Волков Ю. И.* О некоторых линейных положительных операторах // Мат. заметки. — 1978. — **23**, № 5. — С. 659–669.

[16] *Найко Д.А.* О приближении производных некоторыми комбинациями операторов класса $B$ // Укр. мат. журн. — 1987. — **39**, № 5. — С. 583–587.

[17] *Найко Д.А.* Прямые и обратные теоремы приближения функций комбинациями операторов класса $B$. — Киев, 1987. — 52 с. — (Препринт / АН УССР. Ин–т математики; 87. 19).

[18] *Найко Д.А.* Улучшение сходимости многомерных операторов типа $B$ // Приближение функций многих переменных операторами типа $B$. — Киев, 1987. — С. 36–56. — (Препринт /АН УССР. Ин–т математики, 87. 28).