3(55)

РЕГІОНАЛЬНА БІЗНЕС-ЕКОНОМІКА ТА УПРАВЛІННЯ

2017

РЕГІОНАЛЬНА БІЗНЕС-ЕКОНОМІКА ТА УПРАВЛІННЯ

науковий, виробничо-практичний журнал
Свідоцтво про державну реєстрацію:
серія КВ № 9838 від 17.05.2005р.

Журнал внесений до Переліку наукових фахових видань України
(Додаток 5 до наказу Міністерства освіти і науки України від 15.04.2014 р. № 455)

Засновник і видавець: Вінницький фінансово-економічний університет

Адреса редакції: вул. Пирогова 71а, кім. 301
м. Вінниця, 21037, Україна
Телефон/факс: 8 (0432) 53–47–27, 50–55–51

Рекомендовано до друку Вченою радою
Вінницького фінансово-економічного університету
Протокол № 11 від 30 серпня 2017 року

Формат 70х100х 1/16 Папір офсетний. Друк різографічний.
Ум. друк. Арк. 9,66. Наклад 35 прим.
Замовлення № 633

Віддруковано в друкарні ФОП Корзун Д.Ю.
м. Вінниця, вул. 600-річчя, 21а.
Тел.: (0432) 69-67-69, 52-82-78
e-mail: tvory2009@gmail.com

Видавець ТОВ «Нілан-ЛТД»
Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи до
Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції серія DK № 4299 від 11.04.2012 р.

Вінницький фінансово-економічний університет

Регіональна бізнес-економіка та управління

Науковий виробничо-практичний журнал **№ 3(55), Вересень, 2017 рік**

Зміст

7. Пастухова В.В. Аналіз системи стратегічного управління підприємством: методологічний аспект // Фінанси України. – 2000. – №10. – С. 70.
8. Редченко К.І. Стратегічний аналіз у бізнесі: Навчальний посібник. – Л.: «Новий Світ-2000», «Альтаїр-2002», 2003. – 272 с.
9. Шершньова З.Є. Стратегічне управління: Підручник. – 2-ге вид., перероб. і доп. – К.: КНЕУ, 2004. – 699 с.

УДК 681.518.3

Підгурський О.І.,
кандидат технічних наук, доцент
Вінницький національний аграрний університет

МОДЕЛЮВАННЯ СУПЕРПОЗИЦІЇ НЕОДНОРІДНИХ ПОТОКІВ ТРАНЗАКЦІЙ

В статті досліджується суперпозиція двох неоднорідних стохастичних потоків транзакцій. Перший з них є пуассонівським, а другий має довільний закон розподілу ймовірностей тривалості інтервалів часу між транзакціями. Результатом досліджень є математична модель сумарного гібридного потоку транзакцій, що представлена у вигляді перетворення Лапласа функції щільності розподілу та перших двох початкових моментів розподілу ймовірностей.

Ключові слова: *потоки транзакцій, суперпозиція потоків, гібридні потоки, математичні моделі, закони розподілу ймовірностей*.

In this paper, the superposition of two inhomogeneous stochastic flows of transactions has been investigated. The first one is Poisson, and the second has an arbitrary probability distribution of time intervals between transactions. The result of the investigation includes the mathematical model of the total hybrid transaction flow that is represented in the form of the Laplace density function distribution and the first two initial moments.

Key words: *transaction flows, superposition of flows, hybrid flows, mathematical models, laws of distribution of probabilities.*

Постановка проблеми у загальному вигляді. В сучасній логістичній системі ефективне управління матеріальними, інформаційними, фінансовими та людськими потоками (потоками транзакцій) викликає необхідність їх ретельного дослідження. Універсальним інструментом дослідження потоків є їх математичне та імітаційне моделювання. Імітаційне моделювання потоків здійснюється на основі послідовності псевдовипадкових чисел, які генеруються комп'ютерними програмами, що створені на основі математичних моделей потоків. Такі моделі розробляються у вигляді функцій розподілу ймовірностей тривалості випадкових інтервалів часу між двома суміжними транзакціями. Від математичних моделей в значній мірі залежить продуктивність підсистем імітаційного моделювання потоків транзакцій. Тому питання розробки ефективних методів генерації псевдовипадкових чисел на основі математичних моделей потоків транзакцій є актуальними та перспективними.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Потоки випадкових подій досліджувались такими відомими вченими як Хінчін О.Я. [1], Тихонов В.І., Миронов М.А. [2], Клейнрок Л. [3], Сааті Т.Л. [4], Гнеденко Б.В., Коваленко Н.Н. [5] та інші. Ці вчені в своїх роботах докладно і системно розглянули найпростіший (пуассонівський) потік випадкових подій, для якого властиві стаціонарність, ординарність та відсутність післядії. Для цього потоку була створена чітка математична модель, що характеризувалась своєю простотою. Це дозволило широко застосовувати її при аналізі ймовірнісних процесів функціонування різноманітних стохастичних систем. З тих пір з урахуванням різних особливостей потоків випадкових подій було створено чимало математичних моделей, в основі яких була покладена модель пуассонівського потоку. Тому значна частина науковців намагається обґрунтувати пуассонівську природу потоків в досліджуваних системах з метою запозичення досить відомих і простих моделей. Але не завжди припущення про пуассонівську природу потоків подій дає адекватні результати моделювання стохастичних систем. Тому сучасні вчені займаються дослідженнями альтернативних (непуассонівських) потоків, що мають ознаки обмеженої післядії, нестаціонарності, неоднорідності та гібридності.

Так в роботі [6] розглянута математична модель вузла комп'ютерної мережі із неоднорідним вхідним потоком транзакцій. Задача вирішена для випадків, коли на вхід системи подається суперпозиція потоків з різними інтенсивностями.

В роботі [7] досліджуються нестаціонарні в часі потоки однорідних подій і стверджується, що побудова однозначної оцінки нестаціонарних потоків є неможливою, коли інтенсивність залежить від множини параметрів, а є можливою лиш на окремих інтервалах нестаціонарного потоку, на яких потік є стаціонарним.

В роботі [8] вивчаються потоки неоднорідних подій, узагальнюються моделі Пуассона з нескінченною кількістю джерел транзакцій і визначаються умови, за яких кожне таке джерело нетривіальним чином впливає на сумарний потік.

Отримані в згаданих та в інших сучасних публікаціях результати поповнили арсенал моделей потоків випадкових подій і надають нові можливості в подальших дослідженнях. Але слід зауважити, що аналізу гібридних потоків транзакцій, які утворюються в результаті суперпозиції неоднорідних потоків, в сучасних публікаціях приділяється не достатньо уваги. Тому проблема розробки математичних моделей гібридних потоків є актуальною.

Формулювання мети статті. Сумарний потік транзакцій від множини незалежних джерел згідно граничної теореми наближається до пуассонівського коли [1]:

- кожен з потоків за інтенсивністю не має значної переваги над іншими;
- інтенсивності потоків не є зникаюче малими;
- кожен потік має властивість обмеження на післядію.

Це означає, що сумарний потік пуассонівським не стане коли хоча б один з потоків не відповідає цим умовам. Тоді сумарний потік можна розглядати як гібрид пуассонівського та непуассонівського потоків, що виник в результаті їхньої суперпозиції. Формалізуємо постановку задачі.

1. Гібридний потік утворюють два потоки транзакцій:

a) пуассонівський потік S_1 з параметром $\boldsymbol{\lambda}$;

b) потік S_2 з довільною безперервною функцією щільності розподілу тривалості інтервалів часу між транзакціями $Q(x)$, для якої існує перетворення Лапласа у вигляді $Q^*(s)$;

2. Суперпозиція цих потоків утворює гібридний потік S_c з безперервною функцією щільності розподілу $f_c(t)$, що має перетворення Лапласа $f_c^*(s)$.

Необхідно визначити функцію $f_c^*(s)$, як математичну модель потоку S_c.

Виклад основного матеріалу дослідження. Суперпозицію потоків S_1 та S_2 графічно можна показати таким чином (Рис.1). На часовому інтервалі точками позначені моменти виникнення випадкових подій (транзакцій) потоків S_1 та S_2, а також гібридного потоку S_c.

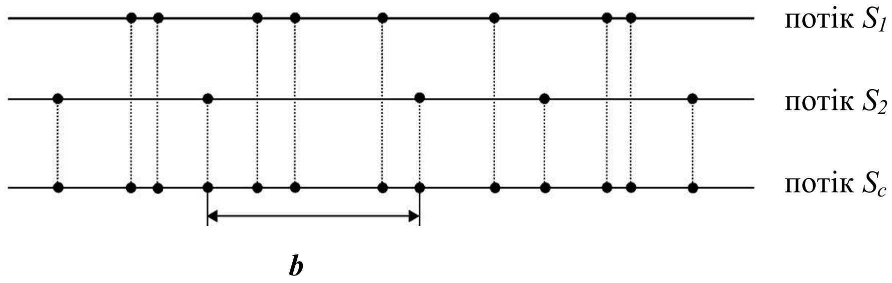

Рис 1. Модель сумарного потоку S_c

Для визначення функції $f_c^*(s)$ скористаємось властивістю відсутності післядії пуассонівського потоку S_1. Ця властивість говорить про те, що ймовірність надходжень *j* *(j=0,1...)* транзакцій потоку S_1 за довільно обраний відрізок часу *x* не залежить від кількості транзакцій, що надійшли до початку цього відрізку.

Приймемо за відрізок *x* інтервал часу між транзакціями потоку S_2. Це дає можливість представити сумарний потік S_c як послідовність інтервалів часу *x* між транзакціями потоку S_2.

Завдяки властивості відсутності післядії потоку S_1 інтервали *x* можна розглядати незалежно один від одного. Тому розв’яжемо спочатку поставлену задачу для одного з таких інтервалів, прийнявши його за базовий з фіксованою довжиною *b* (рис.1). Назвемо цю задачу локальною, а результат її розв’язання – локальним розв’язком, який потім потрібно буде узагальнити для усієї множини припустимих значень тривалості інтервалів часу між транзакціями потоку S_2. Отриманий таким чином результат і стане загальним розв’язком поставленої задачі.

Локальним розв’язком поставленої задачі є перетворення Лапласа умовної функції щільності розподілу тривалості інтервалів часу між транзакціями потоку S_c за умови, що тривалість базового інтервалу потоку S_c є сталою *b*.

Позначимо цю функцію *f(t/b)*. Для знаходження локального розв'язку розглянемо потік S_c на базовому інтервалі *b*. Очевидно, що кількість та тривалість часових відрізків між транзакціями потоку S_c визначається кількістю транзакцій потоку S_1, на інтервалі *b*. Кількість таких транзакцій є дискретною випадковою величиною *j* з пуассонівським розподілом ймовірностей [1]

$$P_j(b) = \frac{(\lambda b)^j}{j!} e^{-\lambda b}, \qquad \text{k=0,1,2,3…} \tag{1}$$

де λ – параметр пуассонівського потоку S_1.

Зрозуміло, що для будь-якого j на інтервалі b розміщується $j+1$ інтервал часу між транзакціями потоку S_c. Тривалість цих інтервалів є випадковою величиною, закон розподілу якої залежить від значення j. Позначимо через $\gamma_j(t/b)$ умовну функцію щільності розподілу проміжків часу між транзакціями потоку S_c за умови, що за час b відбулося j транзакцій потоку S_1. Таким чином з ймовірністю $P_j(b)$ базовий інтервал b потоку S_2 містить $j+1$ інтервал часу з умовним законом розподілу $\gamma_j(t/b)$. Тому локальний розв'язок $f(t/b)$ будемо шукати у вигляді

$$f(t/b) = \frac{\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\gamma_j(t/b)P_j(b)}{\sum_{k=0}^{\infty}(j+1)P_j(b)} = \frac{R(t/b)}{\overline{m}(b)}, \qquad (2)$$

де $R(t/b)$ – вагова функція умовних щільностей розподілу $\gamma_j(t/x)$;

$\overline{m}(b)$ – математичне сподівання кількості інтервалів потоку S_c, що містяться в базовому інтервалі b.

Це означає, що для розв'язання локальної задачі розробки математичної моделі потоку S_c потрібно визначити залежності для сімейства функцій $\gamma_j(t/x)$, які зручніше отримати у вигляді перетворення Лапласа $H_j^*(s)$. Тоді вираз (2) набуде вигляду

$$f^*(s/x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty}(j+1)H_j(s)P_j(b)}{\sum_{j=0}^{\infty}(k+1)P_j(b)} = \frac{R^*(s/b)}{\overline{m}(b)}, \qquad (3)$$

де $f^*(s/b)$ та $R^*(s/b)$ – перетворення Лапласа функцій $f(t/b)$ та $R(t/b)$.

При $j=0$ інтервали між транзакціями потоку S_c будуть сталими і становитимуть b. Тому для цього випадку закон розподілу тривалості інтервалів буде мати вигляд

$$H_0^*(s) = e^{-sb} \qquad (4)$$

При $j=1$ базовий інтервал b буде містити два випадкові інтервали потоку S_c, які породжуються пуассонівським процесом випадкового розміщення точки на детермінованому інтервалі b. Згідно з теорією відновлення [3] ці інтервали визначаються як прямий та зворотній час повернення, а закон розподілу їх тривалості $H_1^*(s)$ знаходимо як

$$H_1^*(s) = \frac{1 - H_0^*(s)}{s \cdot \overline{h}_0} = \frac{1 - e^{-sb}}{sb} \tag{5}$$

де $\overline{h}_0$ – перший момент розподілу закону $H_0^*(s)$.

Вираз (5) свідчить, що при $j=1$ тривалість обох випадкових інтервалів характеризується рівномірним законом розподілу.

При $j=2$ базовий інтервал b буде містити вже три інтервали потоку S_c, а процес їх утворення аналогічний процесу для випадку $j=1$. Отже

$$H_2^*(s) = \frac{1 - H_1^*(s)}{s \cdot \overline{h}_1} \tag{6}$$

де $\overline{h}_1$ – перший момент розподілу закону $H_1^*(s)$.

Застосовуючи далі метод математичної індукції отримаємо рекурентний вираз для функцій $H_j^*(s)$ при довільному j.

$$H_j^*(s) = \frac{1 - H_{j-1}^*(s)}{s \cdot \overline{h}_{j-1}} \tag{7}$$

де $\overline{h}_{j-1}$ – $(j-1)$-й момент розподілу закону $H_{j-1}^*(s)$.

На основі залежності (7) і з урахуванням (4) визначимо загальний вираз для сімейства функцій $H_j^*(s)$

$$H_j^*(s) = j!\left[(-sb)^{-j} \cdot e^{-sb} - \sum_{n=0}^{j} \frac{(-sb)^{n-j}}{n!}\right] + 1 \tag{8}$$

Тепер для локального розв'язку $f^*(s/b)$ необхідно знайти вирази $R^*(s/b)$ та $\overline{m}(b)$. Отримаємо їх з урахуванням формул (1), (3) та (8).

$$R^*(s/b) = \frac{\lambda \cdot (1 + \lambda b)}{\lambda + s} + \frac{\lambda + s \cdot e^{-(\lambda + s)b}}{(\lambda + s)^2} \cdot s \tag{9}$$

$$\overline{m}(b) = 1 + \lambda b \tag{10}$$

Підставивши вирази (9) та (10) в формулу (3) отримаємо локальний розв'язок $f^*(s/b)$.

$$f^*(s/b) = \frac{\lambda}{\lambda + s} + \frac{\lambda + s \cdot e^{-(\lambda + s)b}}{(1 + \lambda b) \cdot (\lambda + s)^2} \cdot s \tag{11}$$

Вираз (11) є математичною моделлю гібридного потоку S_c на базовому інтервалі b і дозволяє отримати загальний розв'язок поставленої задачі. Для цього необхідно проінтеґрувати вираз (11) по усій області G припустимих значень тривалості інтервалів потоку S_2, замінивши при цьому константу b на змінну x. В результаті отримаємо математичну модель гібридного потоку S_c у вигляді перетворення Лапласа функції щільності розподілу тривалості інтервалів часу між транзакціями $f_c^*(s)$

$$f_c^*(s) = \int\limits_{(G)} f^*(s/x)Q(x)dx \tag{12}$$

Проінтегрувавши вираз (12), отримаємо

$$f_c^*(s) = \frac{\lambda}{(\lambda+s)} + \frac{\lambda + s \cdot \int\limits_{(G)} e^{-(\lambda+s)x} Q(x)dx}{(1+\lambda\overline{v}) \cdot (\lambda+s)^2} \cdot s \tag{13}$$

де $\overline{q}$ – перший момент закону розподілу *Q(x)*.

Інтеграл у виразі (13) є перетворенням Лапласа функції *Q(x)* для комплексної змінної $s+\lambda$. Тому отримаємо остаточний вираз для функції $f_c^*(s)$ у вигляді

$$f_c^*(s) = \frac{\lambda}{p} + \frac{\lambda + s \cdot Q^*(p)}{(1+\lambda\overline{q}) \cdot p^2} \cdot s \tag{14}$$

де $Q^*(p)$ – перетворення Лапласа функції *Q(x)* в області комплексної змінної $p=s+\lambda$.

Продиференціюємо вираз (14) по змінній s і отримаємо перші два початкові моменти для закону розподілу $f_c^*(s)$

$$\overline{\alpha}_c = \frac{df_c^*(s)}{ds}\Big|_{s=0} = \frac{\overline{q}}{1+\lambda\overline{q}} \tag{15}$$

$$\overline{\alpha}_c^{(2)} = \frac{d^2 f_c^*(s)}{ds^2}\Big|_{s=0} = 2\frac{Q^*(\lambda) + \lambda\overline{q} - 1}{\lambda^2(1+\lambda\overline{q})} \tag{16}$$

Вирази (14)-(16) є математичною моделлю гібридного потоку S_c, що є результатом суперпозиції пуассонівського та довільного потоків транзакцій. Слід зауважити, що локальний розв'язок $f^*(s/b)$, отриманий у вигляді (11), є законом розподілу тривалості інтервалів часу для гібриду пуассонівського та регулярного потоків.

Застосувавши до виразу (11) зворотне перетворення Лапласа отримаємо в явному вигляді локальний розв'язок *f(t/b)*.

$$f(t/b)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}+\dfrac{1-\lambda t}{1+\lambda b}\cdot\lambda e^{-\lambda t}, & 0\le t<b\\[2mm] \dfrac{\delta(t-b)}{1+\lambda b}\cdot e^{-\lambda b}, & t=b\end{cases}\qquad(17)$$

Локальний розв'язок поставленої задачі можна отримати також у вигляді умовної функції розподілу тривалості інтервалів часу потоку S_c на базовому інтервалі *b*.

$$F(t/b)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1-e^{-\lambda t}+\dfrac{\lambda te^{-\lambda t}+H(t-b)e^{-\lambda b}}{(1+\lambda b)}, & 0\le t\le b,\\ 1, & t>b\end{cases}\qquad(18)$$

де *H(t – b)* – одинична функція Гевісайда.

Крім цього для закону *f(t/b)* отримаємо перші два моменти розподілу ймовірностей та дисперсію

$$\overline{\alpha}=\int_0^b t\cdot f(t/b)dt=\frac{b}{1+\lambda b}\qquad(19)$$

$$\overline{\alpha}^{(2)}=\int_0^b t^2\cdot f(t/b)dt=2\frac{\lambda b-(1-e^{-\lambda b})}{\lambda^2(1+\lambda b)}\qquad(20)$$

$$D_b=\overline{\alpha}^{(2)}-(\overline{\alpha})^2=\frac{(\lambda b)^2+2\lambda be^{-\lambda b}-2(1-e^{-\lambda b})}{[\lambda(1+\lambda b)]^2}\qquad(21)$$

Формули (19) та (20) можна отримати також і з виразів (15) та (16).

Вирази (17)-(21) описують математичну модель гібриду пуассонівського та регулярного потоків транзакцій.

Тепер з метою первинної перевірки адекватності виразів (14)-(16) розглянемо приклад суперпозиції двох пуассонівських потоків з параметрами λ та μ. Для цього визначимо спочатку для нашого прикладу функцію $Q^*(p)$ і величину $\overline{q}$, що входять до складу виразу (14). Оскільки в даному випадку функція $Q^*(p)$ описує пуассонівський потік з параметром μ, то, з урахуванням того що $p=s+\lambda$, отримаємо

$$Q^*(p)=\frac{\mu}{\mu+p}=\frac{\mu}{\mu+\lambda+s} \qquad (22)$$

$$\bar{q}=\frac{1}{\mu} \qquad (23)$$

Підставивши формули (22) та (23) до виразу (14) отримаємо для нашого прикладу перетворення Лапласа функції щільності розподілу тривалості інтервалів часу між транзакціями сумарного потоку

$$f_c^*(s)=\frac{\lambda}{\lambda+s}+\frac{\lambda+s\cdot\frac{\mu}{\mu+\lambda+s}}{(1+\lambda/\mu)\cdot(\lambda+s)^2}\cdot s=\frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu+s}$$

(24)

Перші два початкові моменти при цьому знайдемо з виразів (15) та (16).

$$\bar{\alpha}_c=\frac{\bar{q}}{1+\lambda\bar{q}}=\frac{1/\mu}{1+\lambda/\mu}=\frac{1}{\lambda+\mu} \qquad (25)$$

$$\bar{\alpha}_c^{(2)}=2\frac{Q^*(\lambda)+\lambda\bar{q}-1}{\lambda^2(1+\lambda\bar{q})}=\frac{2}{(\lambda+\mu)^2} \qquad (26)$$

де

$$Q^*(\lambda)=\frac{\mu}{\mu+\lambda}$$

Вирази (24)-(26) характеризують математичну модель суперпозиції двох пуассонівських потоків з параметрами λ та μ і повністю відповідають відомим рішенням [2]. Це дозволяє зробити припущення про відсутність суперечностей і протиріч між отриманими математичними залежностями (14)-(16) і фізичною природою такого сумарного потоку транзакцій.

Висновки. Залежності (17)-(21), будучи локальним розв'язком поставленої задачі, є математичною моделлю гібридного потоку, який є результатом суперпозиції пуассонівського та регулярного потоків транзакцій.

Загальний розв'язок у вигляді (14)-(16) дозволяє отримати математичну модель суперпозиції пуассонівського потоку та довільного потоку транзакцій, який характеризується перетворенням Лапласа функції щільності розподілу тривалості інтервалів часу між транзакціями $Q^*(s)$.

Практичне значення розробленої математичної моделі полягає у можливості створення на її основі генератора псевдовипадкових чисел для імітаційного моделювання гібридних потоків транзакцій в логістичних та системах. Такий генератор зможе замінити два або більше генераторів, що призведе до спрощення імітаційної моделі та підвищення продуктивності її функціонування.

В подальшому на базі отриманих результатів планується провести дослідження суперпозиції пуассонівського та рівномірного потоків транзакцій.

Список використаних джерел та літератури:

1. Хинчин А.Я. Математические методы теории массового обслуживания // Тр. МИАН СССР. – М.: Изд-во АН СССР, 1955 – Т.49. – с. 3-122.
2. Тихонов В.И., Миронов М. А. Марковские процессы. – М.: «Сов. радио», 1977. – 488 с.
3. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания: Пер с ан. А.И. Грушко / Под ред. В.И. Неймана. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.
4. Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. 2-е изд. – М.: Советское радио, 1971. – 520 с.
5. Гнеденко Б.В., Коваленко Н.Н. Введение в теорию массового обслуживания. 2-е изд. – М.: Наука, 1987. – 336 с.
6. Пустовойтов П.Е. Одноканальная компьютерная сеть с неоднородным входным потоком заявок без приоритетов [Текст] / П.Е. Пустовойтов // Системи обробки інформації. – Харків: ХУПС, 2011. – Вип. 4(94). – с. 205-207.
7. Маєвський О.В. Пуассонівські періодичні кусково-стаціонарні потоки та оцінка їх інтенсивності / О.В. Маєвський, О.В. Мацюк, М.В. Приймак, О.М. Приймак // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, 2016. с. 87-99.
8. Сидорова О.И. Пуассоновская модель трафика с бесконечным числом неоднородных источников //Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. – № 1. – с. 47-66.