УДК 378.053

ОКРЕМІ МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ В ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ КУРСУ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Дубчак В.М., к.т.н., доцент
Вінницький національний аграрний університет
Новицька Л.І., к.п.н., доцент
Вінницький національний аграрний університет

У статті розглянуто різні способи розв'язування однієї задачі в контексті удосконалення процесу навчання вищої математики, раціонального використання навчального часу та наукової організації пізнавальної діяльності студентів аграрних ВНЗ.

Ключові слова: вища математика, методика навчання, розв'язування задач.

Постановка проблеми. На сучасному етапі розвитку суспільства посилюється роль математики в сучасній науці і техніці. Якісна математична освіта, математичний стиль мислення, вміння міркувати точно, в логічній послідовності, необхідні не тільки тим, хто буде займатися науковими дослідженнями, але й економістам, інженерам, біологам, юристам, аграріям та ін.. Тому курс вищої математики в аграрних ВНЗ відіграє важливу роль у підготовці фахівців.

Сьогодні кількість годин на вивчення курсу вищої математики значно зменшилась в аграрних університетах на всіх факультетах. Але курс вищої математики повинен озброїти студентів математичними знаннями та вміннями, необхідними для вивчення інших фундаментальних і спеціальних дисциплін. Тому виникає потреба у пошуку шляхів розв'язання проблеми.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. На нашу думку, актуальними в цих умовах є раціональне використання навчального часу та наукова організація пізнавальної діяльності студентів.

Реалізація на практиці теоретичних положень вищої математики відбувається під час розв'язування задач. Саме розв'язування задач різними способами створює великі можливості для удосконалення методики навчання математики, оптимізації навчального процесу. Розв'язування однієї задачі різними способами ефективніше, ніж розв'язування кількох задач одним способом, оскільки сприяє більш глибокому та широкому розумінню й засвоєнню навчального матеріалу. Питанню доцільності знаходження різних способів розв'язань однієї задачі приділяється увага багатьох науковців, методистів, практиків [1, 4, 6, 8]. Пошук різних розв'язань однієї задачі дає позитивний результат в плані розумового розвитку, прояву мотивації та більшої активності у навчанні.

Мета статті – на прикладі однієї задачі проілюструвати розмаїття застосувань відомих положень елементарної та вищої математики в процесі пошуку різних способів її розв'язування.

Виклад основного матеріалу. Трикутник є однією з головних геометричних фігур, а обчислення його площі – актуальною задачею в математиці. Розглянемо на конкретній задачі застосування різних способів обчислення площі трикутника та порівняємо їх.

Задача. Нехай задано трикутник з вершинами: $A(-2;\,3)$, $B(4;\,4)$, $C(2;\,-1)$ (рис. 1). Знайти його площу.

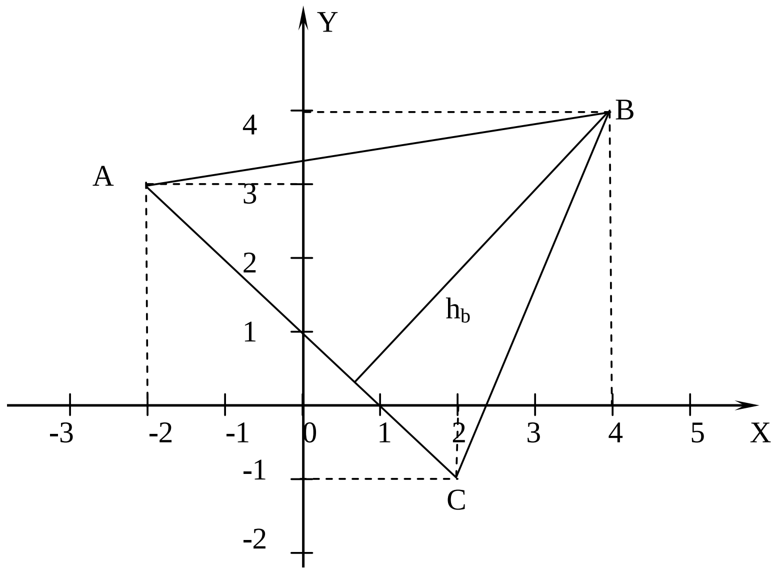

Рис. 1

Розв'язання 1. Скористаємось найбільш відомою й уживаною формулою площі трикутника за допомогою основи та висоти трикутника:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot h_{в}$$

Оскільки $AC = \left|\vec{AC}\right| = 4\sqrt{2}$, рівняння сторони AC: $x + y - 1 = 0$, тоді $h_b = \frac{|4+4-1|}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}}$, тому $S_{ABC} = \frac{1}{2} 4\sqrt{2} \cdot \frac{7}{\sqrt{2}} = 14$ (кв.од.).

Розв'язання 2. Відома формула Герона, в даному випадку є досить громіздкою. Нехай $AC = b = 4\sqrt{2}$, $BC = a = \sqrt{29}$, $AB = c = \sqrt{37}$, тоді

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{\sqrt{32}+\sqrt{29}+\sqrt{37}}{2},$$

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2}} =$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{\left((a+b)^2 - c\right)^2\left(c^2 - (a+b)^2\right)} = \frac{1}{4}\sqrt{\left(2\sqrt{29}\sqrt{32}+24\right)\left(2\sqrt{29}\sqrt{32}-24\right)} =$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{4 \cdot 29 \cdot 32 - 24^2} = \frac{1}{4}\sqrt{3136} = 14 \ (кв.од.).$$

Розв'язання 3. Ефективним є обчислення площі трикутника через застосування векторного добутку. Знайдемо необхідні вектори $\vec{AB}$ та $\vec{AC}$. Маємо $\vec{AB} = (6;\,1)$ $\vec{AC} = (4;\,-4)$. Отже,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{matrix}\right\| = 2\left|-7\vec{k}\right| = 14 \ \textit{(кв.од.)}.$$

Розв'язання 4. Ця ж площа може бути знайдена із застосуванням скалярного добутку, а саме:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\left|\vec{AB}\right| \cdot \left|\vec{AC}\right|}\right)^2} = 2\sqrt{2}\sqrt{37}\sqrt{1 - \left(\frac{24-4}{\sqrt{37}\sqrt{32}}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{37 \cdot 32 - 400} = 14 \ \textit{(кв.од.)}.$$

Площа даного трикутника може бути також знайдена за допомогою інтегрального числення, через додатки означеного, кратного та криволінійного інтегралів.

Розв'язання 5. За допомогою означеного інтеграла площа трикутника ABC знаходиться як:

$$S_{ABC} = S_{APMB} + S_{PMC}$$

Оскільки $P(1;\ 0)$, $M\left(\frac{5}{12};\ 0\right)$, а рівняння сторони AB буде визначатись як

$y=\frac{x}{6}+\frac{10}{3}$, тоді

$$S_{ABC}=\int_{-2}^{4}\left(\frac{x}{6}+\frac{10}{3}\right)dx-\frac{1}{2}(2+1)\cdot 3-\frac{1}{2}\left(4-\frac{12}{5}\right)\cdot 4+\frac{1}{2}\left(\frac{12}{5}-1\right)\cdot 1=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{x^2}{2}+20x\right)\Big|_{-2}^{4}-\frac{9}{2}-\frac{16}{5}+\frac{7}{10}=\frac{126}{6}-\frac{70}{10}=14\ (кв.од.).$$

Розв'язання 6. Обчислимо площу трикутника ABC за допомогою подвійного інтеграла, тобто за формулою

$$S_{ABC}=\iint_{D_{ABC}}dxdy.$$

Для цього ще раз задамо сторони трикутника його рівняннями:

$AC: x+y-1=0$ або $y=1-x$.

$AB: x-6y+20=0$ або $y=\frac{x}{6}+\frac{10}{3}$,

$BC: 5x-2y-12=0$ або $y=\frac{5}{2}x-6$.

Тоді

$$S_{ABC}=\int_{-2}^{2}dx\int_{-x+1}^{\frac{x}{6}+\frac{10}{3}}dy+\int_{2}^{4}dx\int_{\frac{5}{2}x-6}^{\frac{x}{6}+\frac{10}{3}}dy=\int_{-2}^{2}\left(\frac{x}{6}+\frac{10}{3}-1\right)dx+\int_{2}^{4}\left(\frac{x}{6}+\frac{10}{3}-\frac{5}{2}x+6\right)dx=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{7}{2}x^2+14x\right)\Bigg|_{-2}^{2}+\frac{1}{3}\left(28x-\frac{7}{2}x^2\right)\Bigg|_{2}^{4}=\frac{28}{3}+\frac{14}{3}=14\ (кв.од.).$$

Розв'язання 7. За допомогою формули Гріна площа даного трикутника через криволінійний інтеграл може бути знайдена наступним чином:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\oint_{ACB}xdy-ydx.$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\oint_{ACB}xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_{AC}xdy-ydx+\frac{1}{2}\int_{CB}xdy-ydx+\frac{1}{2}\int_{BA}xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left(x(-dx)-(1-x)dx\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{2}^{4}\left(x\cdot\frac{5}{2}dx-\left(\frac{5}{2}x-6\right)dx\right)+\frac{1}{2}\int_{4}^{-2}\left(x\frac{1}{6}dx-\left(\frac{x}{6}+\frac{10}{3}\right)dx\right)=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(-dx)+\frac{1}{2}\int_{2}^{4}6dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-2}^{4}\frac{10}{3}dx=-\frac{1}{2}x\Big|_{-2}^{2}+3x\Big|_{2}^{4}+\frac{5}{3}x\Big|_{-2}^{4}=-1-1+12-6+\frac{20}{3}+\frac{10}{3}=14\ (кв.од.).$$

З усіх приведених вище різних способів знаходження площі трикутника [2, 3, 5, 7] в загальному випадку, коли сторони або висоти трикутника не паралельні координатним осям, одні способи потребують застосування означених, навіть кратних чи криволінійних інтегралів, інші способи хоч і є шкільними, наприклад, формула Герона, але потребують громіздких алгебраїчних перетворень. Досить часто обчислення з ірраціональними виразами є складними, особливо для учнів школи або студентів ВНЗ. Найбільш простим, на наш погляд, є використання відомої шкільної формули обчислення площі трикутника вигляду $S_{\Delta}=\frac{a\cdot h}{2}$. Якщо при цьому основа a чи висота h паралельні одній із координатних осей, тоді, очевидно, h чи a буде перпендикулярною іншій координатній осі. При цьому довжини відрізків, що паралельні тій чи іншій координатній осі, легко знаходяться, оскільки вдовж кожного такого напрямку або $x=const$, або $y=const$. В зв'язку з цим для приведеного в даній роботі трикутника запропонуємо більш оптимальний спосіб знаходження його площі, оснований виключно на вищезгаданій шкільній формулі $S_{\Delta}=\frac{a\cdot h}{2}$. Для цього навколо даного трикутника, якщо це довільний трикутник, опишемо прямокутник, сторони якого паралельні відповідним координатним осям, при цьому вершини трикутника лежать на сторонах цього прямокутника.

Розв'язання 8. Задамо ще раз вершини трикутника: $A(-2;3)$, $B(4;4)$, $C(2;-1)$, де ΔABC – трикутник (рис.2), площу якого необхідно встановити.

Нехай $PMBF$ – добудований відповідним чином прямокутник, описаний навколо даного трикутника, сторони якого задаються відповідними рівняннями

$$PM:\ x=C_1 \quad\rightarrow\quad PF:\ y=C_3$$

$$FB:\ x=C_2 \quad\rightarrow\quad MB:\ y=C_4.$$

Тут C_i – це відповідні константи, значення яких встановлюються, виходячи із значень координат вершин A, B, C початкового трикутника, а саме:

$$C_1=\min(x_a,x_в,x_c)=\min(-2,4,2)=-2,\ \text{отже}\ C_1=-2;$$

$$C_2=\max(x_a,x_в,x_c)=\max(-2,4,2)=4,,\ \text{отже}\ C_2=4;$$

Таким чином, $PF=MB=|C_2-C_1|=|4-(-2)|=6.$

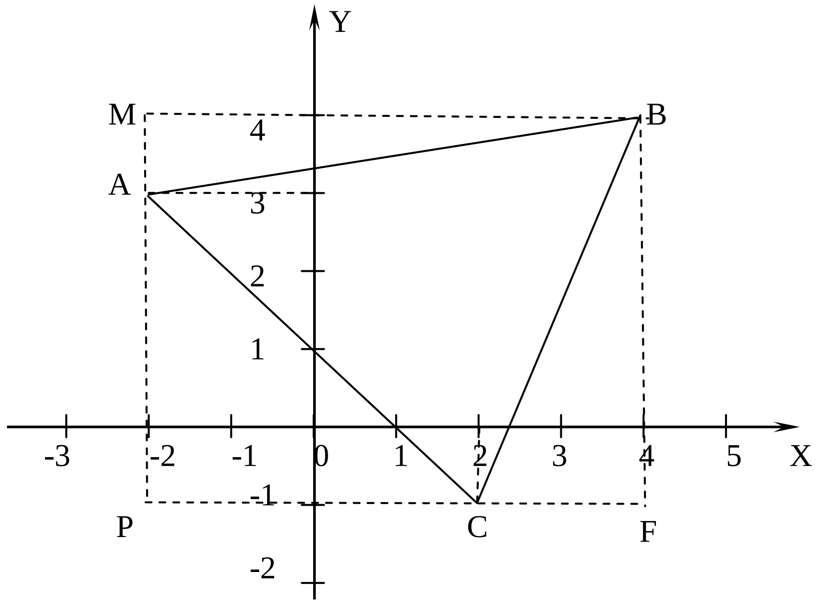

Рис. 2.

$$C_3 = \min(y_a, y_в, y_c) = \min(3,4,-1) = -1, \text{ отже } C_3 = -1;$$

$$C_4 = \max(y_a, y_в, y_c) = \max(3,4,-1) = 4, \text{ отже } C_4 = 4.$$

Тоді $MP = BF = |C_4 - C_3| = |4 - (-1)| = 5.$

Тепер легко знайти площу прямокутника $PMBF$: $S = PF \cdot PM = 6 \cdot 5 = 30$.

Далі, очевидно, $S_{\Delta ABC} = S_{PMBF} - S_{\Delta APC} - S_{\Delta AMB} - S_{\Delta CBF}$

Площі трьох останніх трикутників легко знаходяться, оскільки всі вони прямокутні, і їх катети паралельні (перпендикулярні) відповідним координатним осям. Знайдемо ці катети використовуючи значення знайдених констант C_1, C_2, C_3, C_4.

$P(C_1, C_3) = P(-2,-1)$, $M(C_1, C_4) = M(-2,4)$, $B(4;\ 4)$, $F(C_2, C_3) = F(6,-1)$

Тоді $AP = y_a - y_p = 3 - (-1) = 4$, $AM = PM - AP = 5 - 4 = 1$, $PC = x_c - x_p = 2 - (-2) = 4$, $CF = PF - PC = 6 - 4 = 2$.

Отже площі допоміжних трикутників можуть бути встановлені наступним чином:

$$S_{\Delta APC} = \frac{1}{2} AP \cdot PC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8;$$

$$S_{\Delta AMB} = \frac{1}{2} AM \cdot MB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 = 3;$$

$$S_{\Delta CBF} = \frac{1}{2}CF \cdot FB = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 = 5;$$

Остаточно маємо $S_{\Delta ABC} = 30-(8+3+5)=14$ (*кв.од.*).

Висновки і пропозиції. Розв'язування задач різними способами допомагає подивитись на задачу з різних сторін. Це пошуковий процес, який не копіює і не повторює того, що було раніше, а спонукає студентів до логічного та нестандартного мислення, творчої самостійності, дослідницької діяльності, привчає до вибору оптимального варіанту рішення, отже, створює великі можливості для удосконалення процесу навчання математики, його оптимізації й наукової організації. Доцільно такий підхід систематично включати в систему роботи викладача, особливо в процесі систематизації та узагальнення знань.

Література

1. Бевз Г.П. Методика викладання математики. Навч. посіб./ Г.П. Бевз – К. Вища школа. 1987. – 367 с.
2. Вересова Е.Е. Практикум по решению математических задач: Учебное пособие для институтов / Е.Е. Вересова, Н.С. Денисова, Т.Н. Полякова. – М.: Просвещение, 1979. – 240 с.
3. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. / М.Я. Выгодский . – М.: АСТ: Астрель, 2006. – 509 с.
4. Клейман Я.М. Решение задач различными способами предоставляет большие возможности для усовершенствования обучения математики / Я.М. Клейман // Математика в школе. – 1987. – №6. – С. 23–28.
5. Пискунов Н.С. Дифферинциальное и интегральное исчесления для втузов / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1978. – 576 с.
6. Наконечный М.Н. Различные способы решения задач способствуют эффективности обучения / М.Н. Наконечный // Математика в школе. – 1980. – № 4. – С.45–47.
7. Рывкин А.А. Математика. Справочное пособие. / А.А. Рывкин, А.З. Рывкин – М.: ООО «Издательство «Мир и образование»,2003. –560 с.
8. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: підручник / З.І. Слєпкань. – 2-ге вид., доп. і перероб. – К.: Вища школа, 2006. – 582 с.