



**Основні закони і тотожності  
алгебри логіки**

**Карти Карно**

# Основні закони і тотожності алгебри логіки

*Для виконання перетворень функцій в алгебрі логіки використовується ряд законів та тотожностей, основні з яких наведені нижче:*

**Закон перестановки (комутативний):**

$$X_1 \vee X_2 = X_2 \vee X_1, \quad X \cdot X_2 = X_2 \cdot X_1;$$

**Закон сполучення (асоціативний):**

$$(X_1 \vee X_2) \vee X_3 = X_1 \vee (X_2 \vee X_3), \quad (X_1 \cdot X_2) \cdot X_3 = X_1 \cdot (X_2 \cdot X_3);$$

**Закон розподілу (дистрибутивний):**

$$X_1 \cdot (X_2 \vee X_3) = X_1 \cdot X_2 \vee X_1 \cdot X_3, \quad X_1 \vee X_2 \cdot X_3 = (X_1 \vee X_2) \cdot (X_1 \vee X_3);$$

**Закон повторення:**

$$X_1 \vee X_1 \vee \dots \vee X_1 = X_1, \quad X_1 \cdot X_1 \cdot \dots \cdot X_1 = X_1;$$

**Закон інверсії:**

$$\overline{\overline{X_1 \vee X_2}} = \overline{X_1} \cdot \overline{X_2}, \quad \overline{\overline{X_1 \cdot X_2}} = \overline{X_1} \vee \overline{X_2};$$

**Закон заперечення:**

$$X \vee \overline{X} = 1; \quad X \cdot \overline{X} = 0;$$

# Основні закони і тотожності алгебри логіки

**Закон поглинання:**

$$X1 \vee X1 \cdot X2 = X1; \quad X1 \cdot (X1 \vee X2) = X1;$$

**Закон склеювання:**

$$X1 \cdot X2 \vee X1 \cdot \overline{X2} = X1;$$

**Правила операцій з константами:**

$$\bar{0} = 1, \quad \bar{1} = 0, \quad X \cdot 0 = 0, \quad X \cdot 1 = X, \quad X \vee 0 = X, \quad X \vee 1 = 1;$$

**Додаткові тотожності:**

$$X1 \vee \overline{X1} \cdot X2 = X1 \vee X2, \quad X1 \cdot (\overline{X1} \vee X2) = X1 \cdot X2$$

Операція НЕ

$$\bar{\bar{1}} = 0$$

$$\bar{\bar{0}} = 1$$

$$\overline{\overline{X}} = X$$

Операція І

$$X \cdot 1 = X$$

$$X \cdot 0 = 0$$

$$X \cdot X = X$$

$$X \cdot \overline{X} = 0$$

Операція АБО

$$X + 1 = 1$$

$$X + 0 = X$$

$$X + X = X$$

$$X + \overline{X} = 1$$

## Способи задавання функцій алгебри логіки

Розрізняють декілька способів задавання функцій алгебри логіки, основними з яких є: *табличний, аналітичний, координатний.*

При **табличному способі** ФАЛ задається таблицею істинності (станів), в якій вказується, який із двох можливих значень «0» або «1» приймає функція на кожному з наборів аргументів. Приклад задавання ФАЛ табличним способом наведений на рис. 1.

Номер набору	$a$	$b$	$y_1$
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	1
3	1	1	1

Номер набору	$a$	$b$	$c$	$y_2$
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

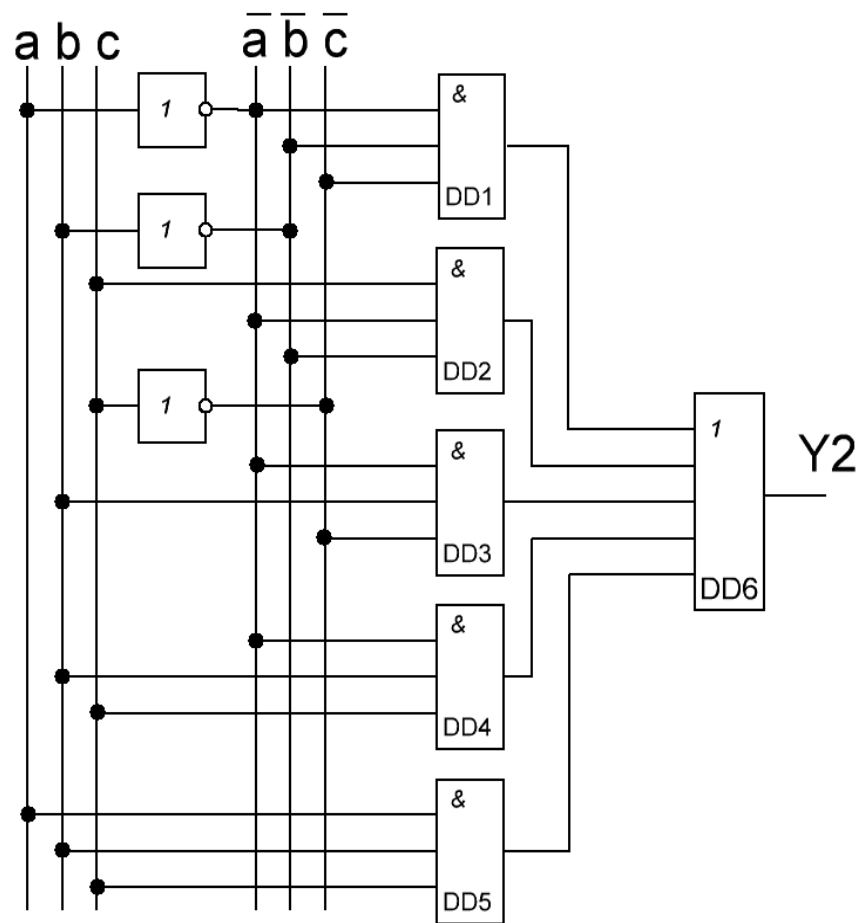
Рисунок 1 – Табличний спосіб задавання функцій алгебри логіки

# Способи задавання функцій алгебри логіки

**Аналітичний** спосіб передбачає задавання функції у виді формалізованого виразу, що складений з використанням математичного апарату алгебри логіки, наприклад:

Номер набору	$a$	$b$	$c$	$Y_2$
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

$$Y_2 = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}bc + abc$$



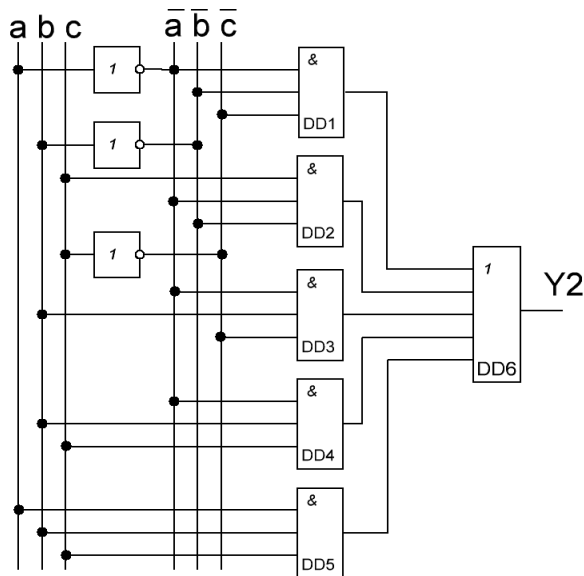
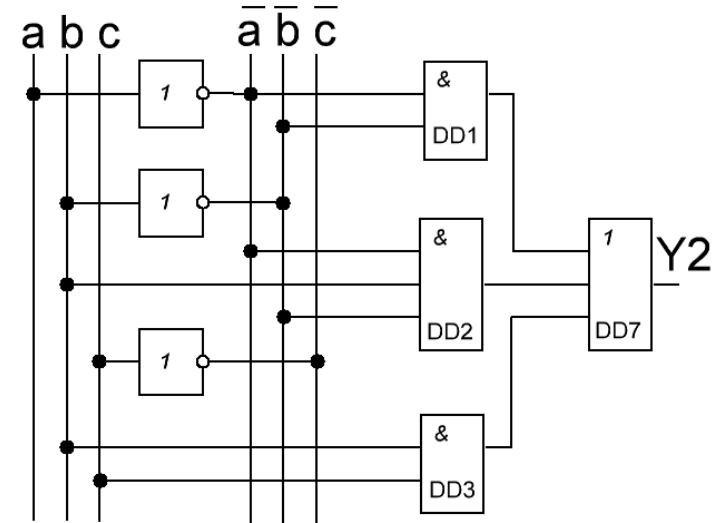
# Способи задавання функцій алгебри логіки

Застосуємо закони та тотожності алгебри логіки до (1) та спростимо ФАЛ

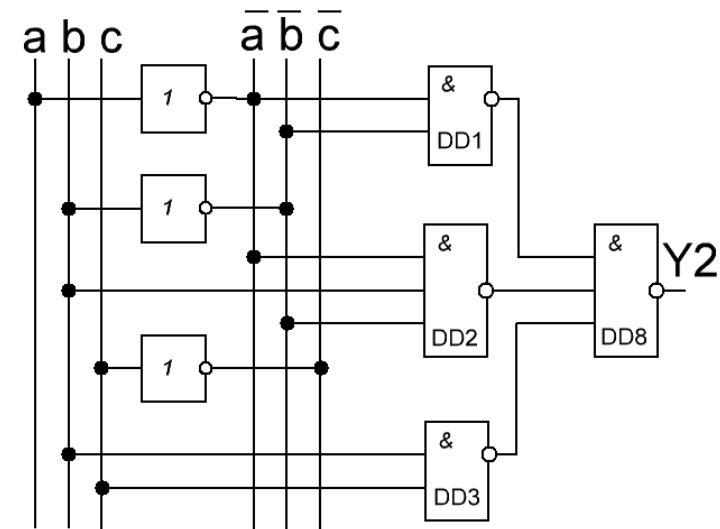
$$Y_2 = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}bc + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}bc + abc$$

$$Y_2 = \bar{a}\bar{b} \cdot (\bar{c} + c) + \bar{a}bc + bc \cdot (\bar{a} + a) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}bc + bc$$

Номер набору	a	b	c	Y <sub>2</sub>
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

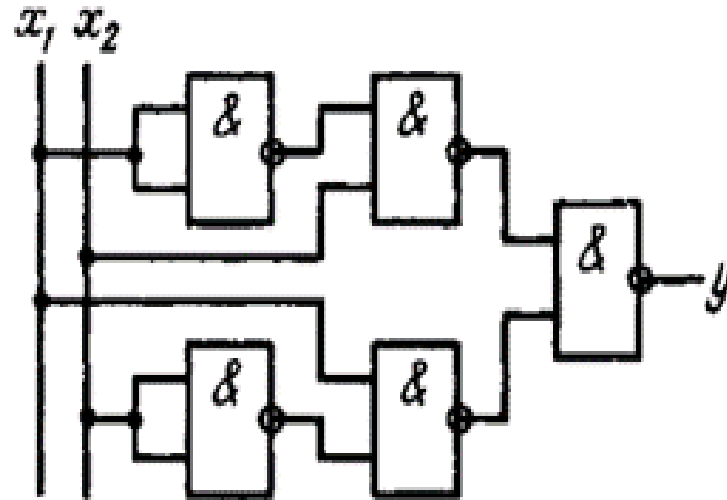


$$Y_2 = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}bc + bc = \overline{\bar{a}\bar{b}} \cdot \overline{\bar{a}bc} \cdot \overline{bc}$$



# Завдання 1

Записати логічну формулу до схеми, що наведена на рис.



## Способи задавання функцій алгебри логіки. Карти Карно

**Координатний** спосіб передбачає задавання ФАЛ у виді координатних карт станів, які називаються картами Карно. При наявності  $n$  змінних карта Карно складається з  $2^n$  полів, куди записують значення функції при відповідному наборі аргументів. При складанні карти Карно необхідно, щоб набори аргументів в сусідніх полях (клітинках) відрізнялись тільки значенням однієї змінної.

$X_3 \backslash X_1 X_2$	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	1	1	1	0

**Метод карт Карно** заснований на використанні карт мінтермів. Карта Карно є прямокутною таблицею, розділеною горизонтальними і вертикальними лініями на комірки (клітки), загальне число яких збігається з числом мінтермів даного числа аргументів. Кількість кліток карти Карно  $k = 2^n$ , де  $n$  число змінних. У кожену комірку таблиці заносяться значення одного мінтерма. Їх розміщення здійснюється так, щоб два суміжні мінтерми знаходилися в сусідніх комірках (суміжні – розрізняються формою входження не більш, ніж одного аргументу). Карта Карно для чотирьох змінних  $A, B, C, D$  (число мінтермів дорівнює  $k = 2^n = 2^4 = 16$ ):



# Карти Карно

	<u>A</u>				
	0	1	3	2	
C	4	5	7	6	
	<u>B</u>				

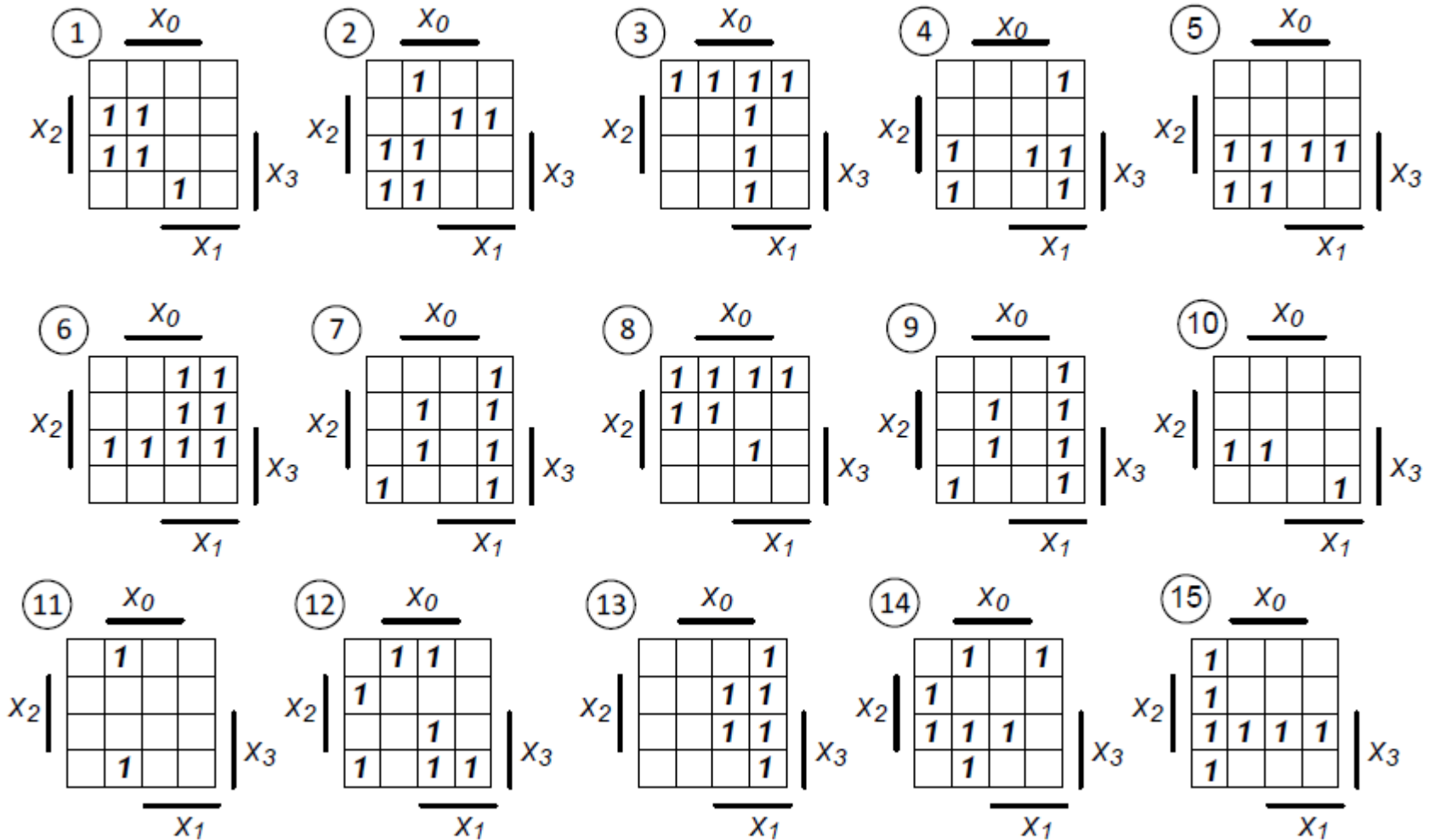
	<u>A</u>				
	0	1	3	2	
C	4	5	7	6	
	12	13	15	14	D
	8	9	11	10	
	<u>B</u>				

Карти Карно для 8 та 16 мінтермів (3 та 4 вхідних змінних)

## Правила групування мінтермів

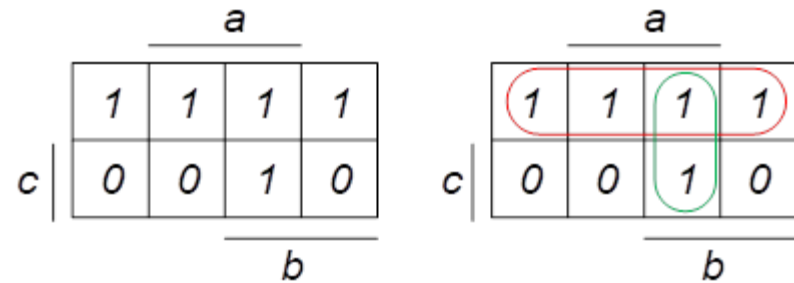
1. Групуються дві клітки, що стоять поруч, в стовпці, або ряду. Кожна з групованих кліток відрізняється від будь-якої сусідньої лише одною змінною, яка при цьому і виключається; число групованих кліток має бути парним; можна групувати крайні клітки між собою, оскільки карта – по суті тор.
2. Групуються клітки, що є повними квадратами з 4, 16 кліток.
3. Групуються клітки, що є повними горизонтальними рядами, або вертикальними стовпцями.
4. Групуються клітки, що представляють два поруч розташованих стовпця, або рядка.
5. Клітка може входити в декілька об'єднань.

# Карти Карно



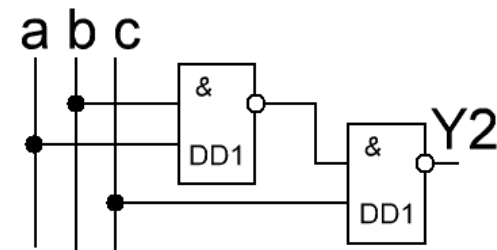
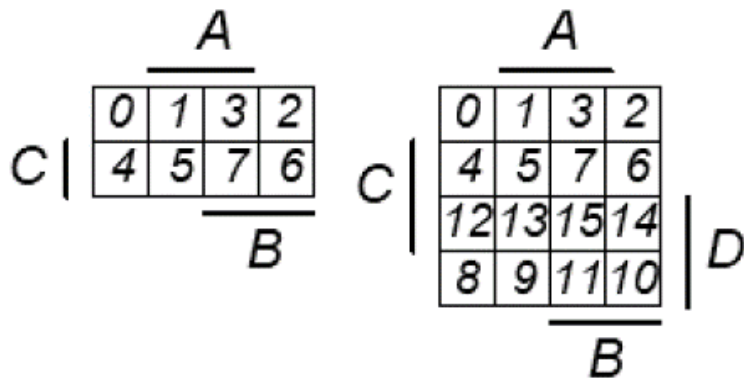
# Карти Карно

Номер набору	$a$	$b$	$c$	$Y_2$
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1



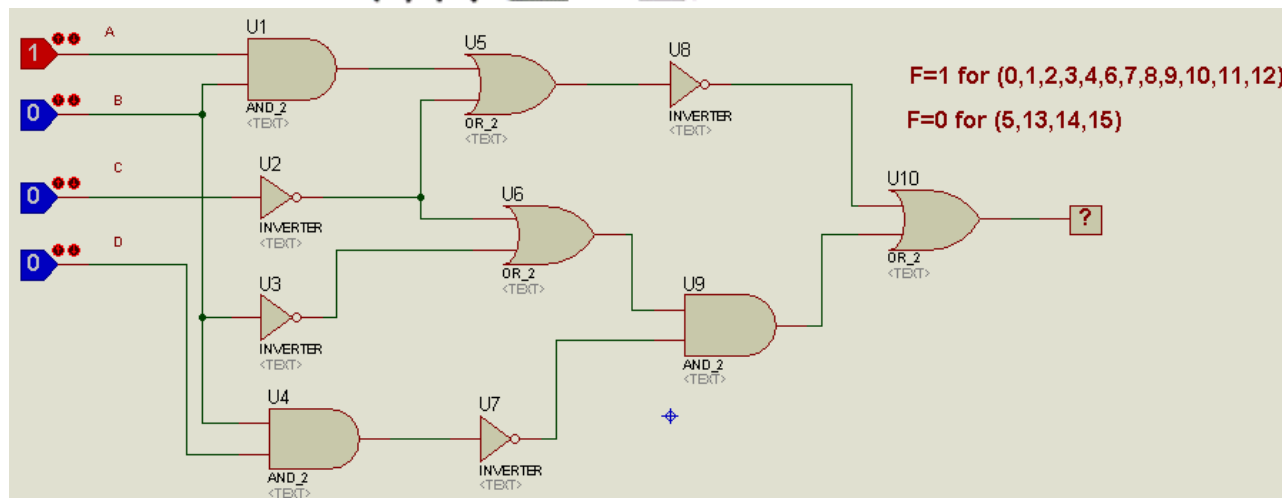
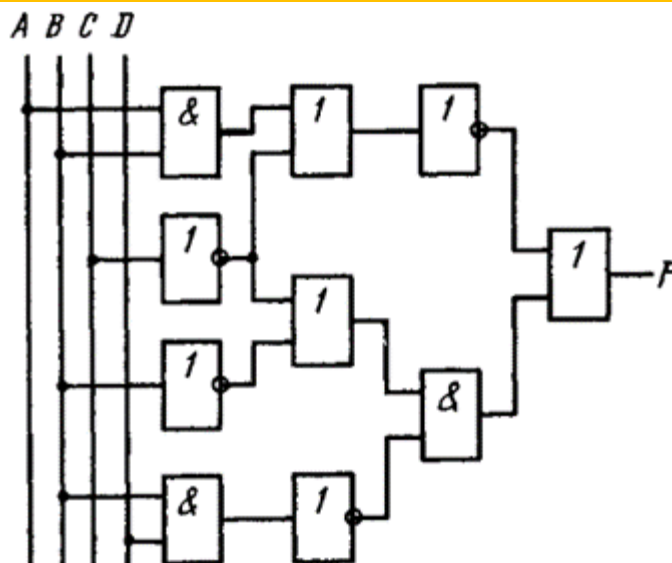
Карти Карно з групуванням мінтермів для табличної функції

$$Y_2 = \bar{c} + ab = \overline{\bar{c}} \cdot \overline{ab} = \overline{c \cdot ab}$$

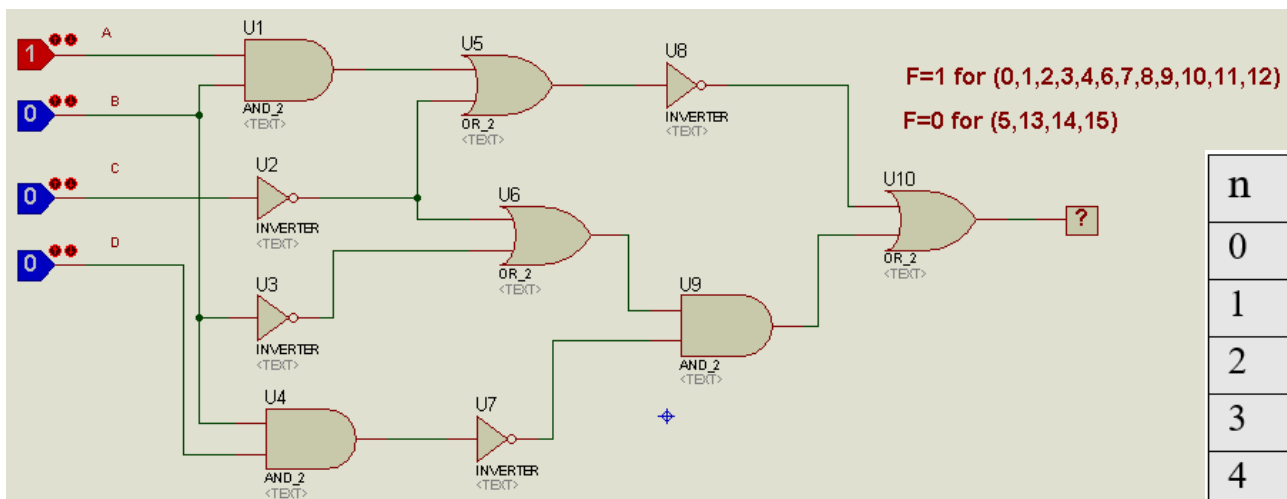


## Завдання 2

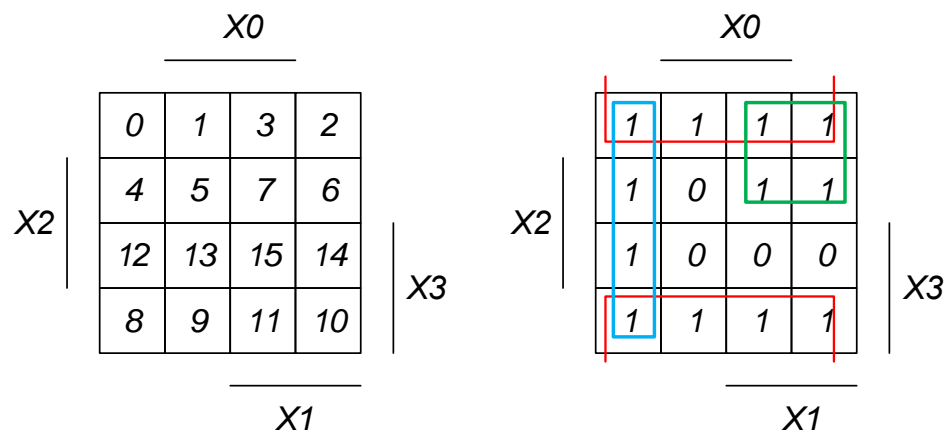
Записати структурну формулу, яка реалізує комбінаційна схема. Спростити отриману структурну формулу і побудувати нову схему на елементах І, АБО та НЕ.



# Завдання 2

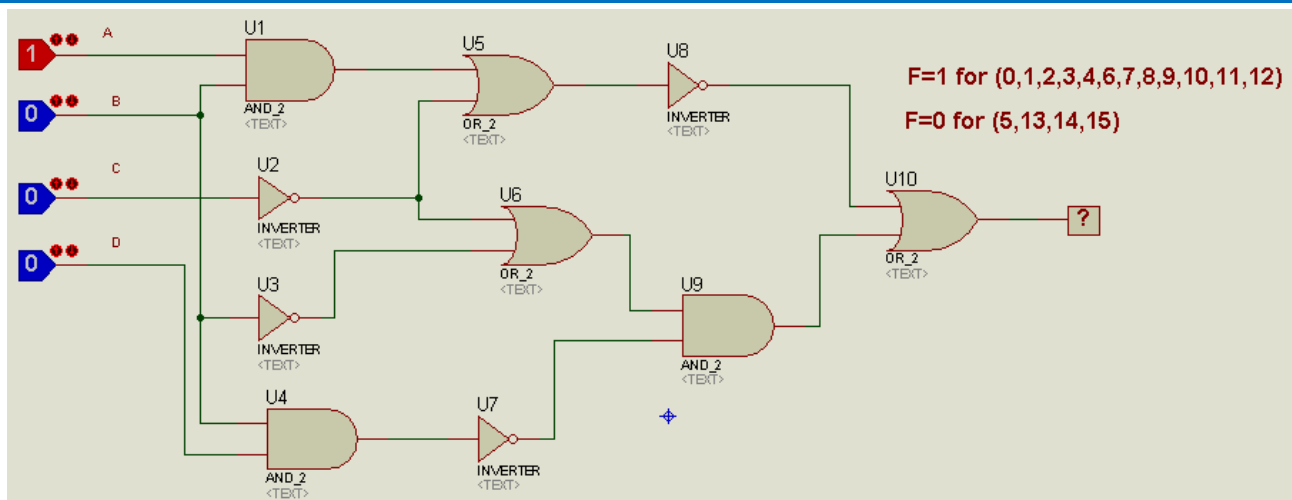


n	A	B	C	D	Y
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0

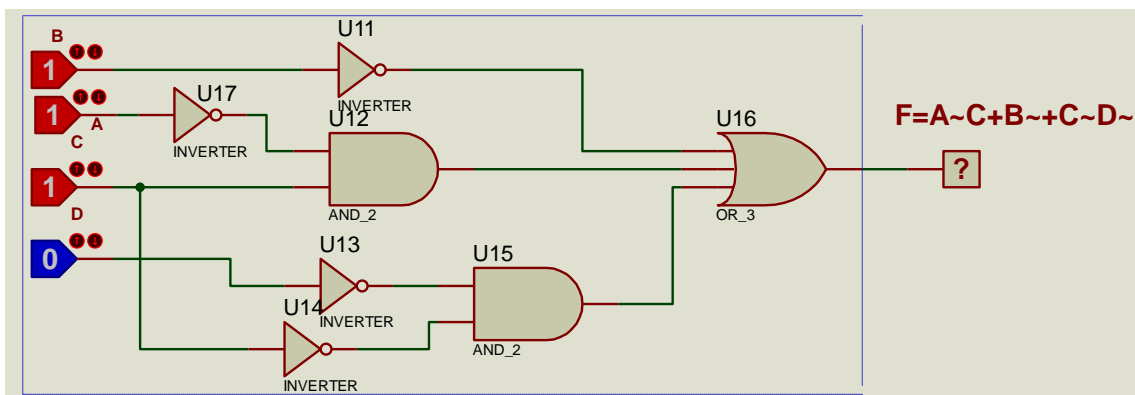


$$\text{Результат } Y = \overline{x_2} \times \overline{x_1} \overline{x_3} \times \overline{x_0} x_1$$

# Завдання 2

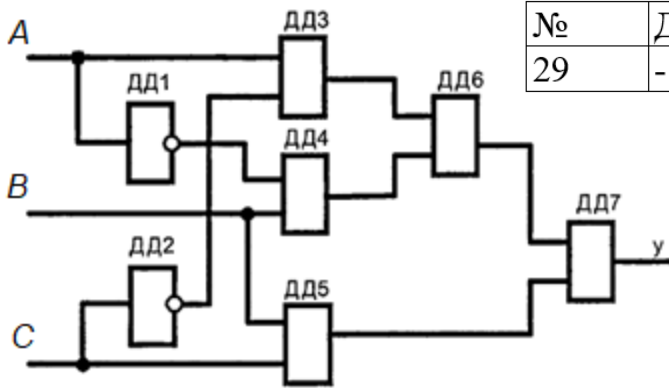


Результат  $Y = x_2 \times \overline{x_1 \overline{x_3}} \times \overline{\overline{x_0} x_1}$

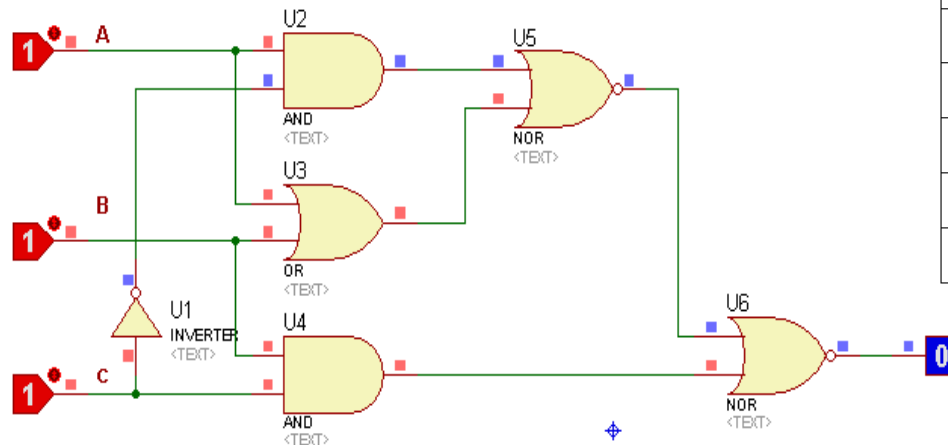


# Завдання 3

За структурною схемою провести аналіз та встановити функціональну залежність у вигляді формул алгебри логіки та таблиці істинності. Для цього скласти схему (за своїм варіантом) у середовищі Proteus VSM та експериментально визначити таблицю істинності роботи схеми. За таблицею істинності скласти карти Карно, мінімізувати логічну функцію. Синтезувати схему цифрового пристрою у базисі І-НЕ.



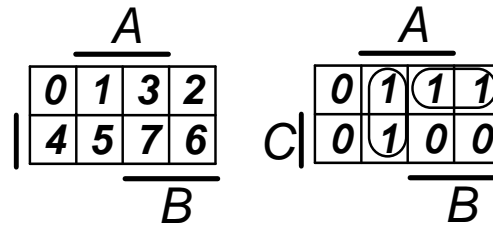
№	ДД1	ДД2	ДД3	ДД4	ДД5	ДД6	ДД7
29	-	+	I	АБО	I	АБО-НЕ	АБО-НЕ



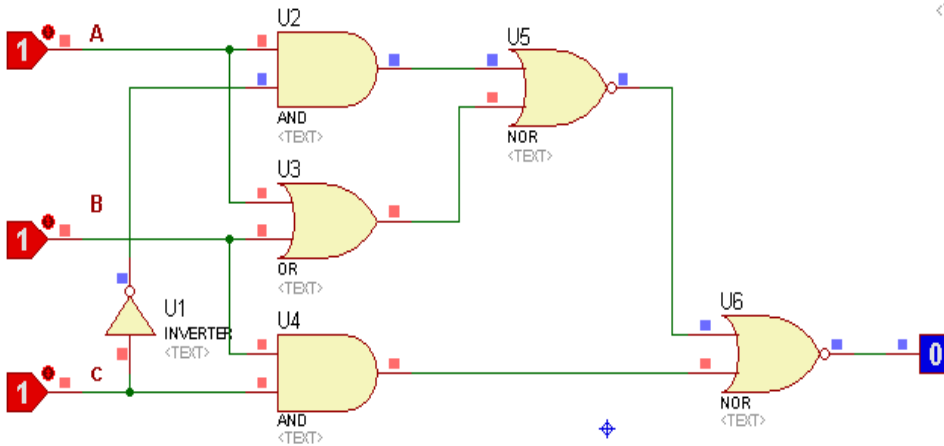
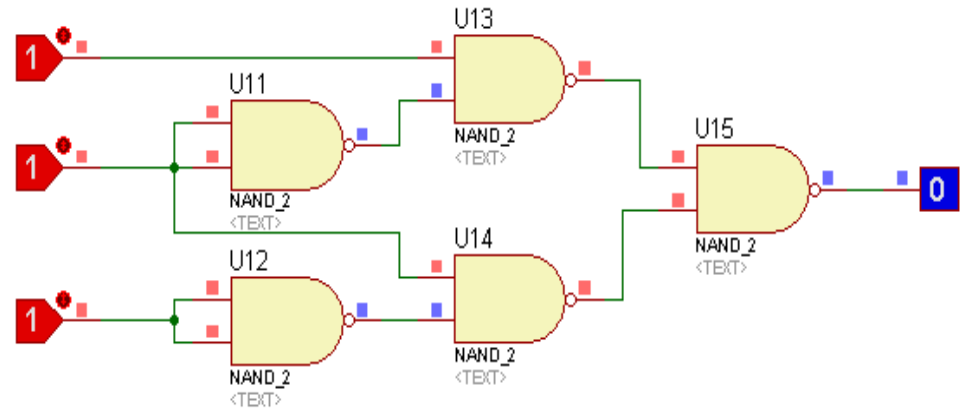
№	C	B	A	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

# Завдання 3

№	C	B	A	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0



$$F = A\bar{B} + B\bar{C} = \overline{\overline{A\bar{B}} \overline{B\bar{C}}}$$





## Домашнє завдання

1. Переведіть із двійкової системи в десяткову числа:

a) **11101010** b) 10101010 c) 11110000

2. Переведіть із двійкової системи в шістнадцяткову числа:

a) **11110101** b) 10110011 c) 10101111

3. Переведіть із десяткової системи у двійкову числа:

a) **311** b) 172 c) 21

4. Переведіть із шістнадцяткової системи у двійкову числа:

a) **1C** b) 44 c) F0

5. Переведіть із шістнадцяткової системи в десяткову числа:

a) **AB** b) 82 c) 1E

6. Переведіть числа з вісімкової системи у двійкову:

a) **151** b) 74 c) 203