МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ВІННИЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

В. А. Матвійчук, В. Ф. Граняк

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ

Навчальний посібник

Вінниця, ВНАУ, 2023 р.

УДК 621.3.01
Б24

Рекомендовано вченою радою як навчальний посібник для студентів спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» (Протокол № від .03.2023 р.)

Рецензенти:

Кутін В. М. – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри електромеханічних систем автоматизації в промисловості і на транспорті (Вінницький національний технічний університет);

Червінський Л. С. доктор технічних наук, професор, професор кафедри електроенергетики, електротехніки та електромеханіки (Білоцерківський національний аграрний університет);

Цуркан О. В. д.т.н., професор, директор Відокремленого структурного підрозділу «Ладижинський фаховий коледж ВНАУ», спеціаліст вищої категорії.

Матвійчук В. А. Теоретичні основи електротехніки. Навч. посіб. / В. А. Матвійчук, В. Ф. Граняк. – Вінниця: ВНАУ, 2023. – 211 с.

ISBN XXX-XXXX-XX-X

Навчальний посібник відповідає програмі навчальної дисципліни «Теоретичні основи електротехніки» і призначений для студентів спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» вищих навчальних закладів усіх форм навчання та може бути використаний студентами під час виконання курсових, бакалаврських і магістерських кваліфікаційних робіт.

Матеріал посібника охоплює вивчення особливостей та процесів, що відбуваються у колах постійного та гармонічного змінного струму в усталених режимах роботи. Зокрема, у межах посібника розглядаються такі теми, як базові поняття та основні закони електротехніки, кола постійного струму та методи їх розрахунку, поняття змінного синусоїдального струму, комплексний символічний метод розрахунку кіл змінного синусоїдального струму, резонансні явища в електричних колах, кола із взаємоіндуктивністю, чотириполюсники та їх основні властивості, а також електричні кола трифазного змінного струму.

Значна увага приділена розрахункам електричних кіл та розв'язанню практичних задач, що дозволяє сформувати базові навички аналізу електричних кіл.

Послідовність викладення матеріалу сприяє використанню посібника студентами як для самостійного вивчення окремих тем навчальної дисципліни, так і для виконання практичних завдань.

УДК 621.3.01

© В. А. Матвійчук, В. Ф. Граняк
© ВНАУ, 2023

ISBN XXX-XXXX-XX-X

ЗМІСТ

ВСТУП 5
1. БАЗОВІ ПОНЯТТЯ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ 6
1.1. Основні визначення та поняття 6
1.2. Електричні схеми та їх топологічні елементи 7
1.3.Джерела електромагнітної енергії 8
1.4. Пасивні елементи електричного кола 10
Контрольні запитання до розділу 1 13
2. ОСНОВОПОЛОЖНІ ЗАКОНИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ 15
2.1. Закон Ома 15
2.2. Розподіл потенціалів вздовж замкненого електричного кола. 17
2.3. Закони Кірхгофа 18
Контрольні запитання до розділу 2 19
3. КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ. МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ СКЛАДНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ. 20
3.1. Еквівалентні перетворення пасивних елементів електричного кола 20
3.2. Еквівалентні перетворення віток з активними елементами 23
3.3. Метод рівнянь Кірхгофа 25
3.4. Метод контурних струмів 27
3.4.1. Суть та основні підходи 27
3.4.2. Особливості методу контурних струмів при наявності у колі джерел струму 31
3.5. Метод вузлових потенціалів 33
3.5.1. Суть та основні підходи 33
3.5.2. Особливості методу вузлових потенціалів при наявності ідеальних джерел напруги і струму 37
3.6. Метод еквівалентного генератора (активного двополюсника) 40
3.6.1. Основні визначення 40
3.6.2. Теорема про активний двополюсник 41
Контрольні запитання до розділу 3 43
4. ПОНЯТТЯ ЗМІННОГО СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ 45
4.1. Основні поняття і співвідношення 45
4.2. Діюче значення змінного струму 46
4.3. Зображення синусоїдних функцій векторними величинами 47
4.4. Синусоїдний струм в пасивних елементах електричного кола 49
4.5. Послідовне з’єднання елементів r, L, C при синусоїдному струмі 53
4.6. Потужність в колах синусоїдного струму 54
Контрольні запитання до розділу 4 55
5. КОМПЛЕКСНИЙ СИМВОЛІЧНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ КІЛ ЗМІННОГО СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ 57
5.1. Елементи алгебри комплексних чисел 57
5.2. Комплексні зображення електротехнічних параметрів 58
5.3. Баланс потужності в комплексній формі 59

5.4. Особливості розрахунку складних електричних кіл у колах змінного гармонічного струму 59
5.4.1. Еквівалентні перетворенням пасивної частини електричного кола 60
5.4.2. Розрахунок електричних кіл з еквівалентним перетворенням активної частини електричного кола 63
5.4.3. Метод контурних струмів 66
5.4.4. Метод вузлових потенціалів 68
5.4.5. Метод законів Кірхгофа 69
5.4.6. Метод еквівалентного генератора 72
Контрольні запитання до розділу 5 73
6. РЕЗОНАНСНІ ЯВИЩА В ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ 75
6.1. Резонанс в послідовному контурі. Резонанс напруг 75
6.2. Резонанс в паралельному контурі. Резонанс струмів 77
Контрольні запитання до розділу 6 79
7. КОЛА ІЗ ВЗАЄМНОЮ ІНДУКТИВНІСТЮ 80
7.1. Взаємоіндуктивність. Електрорушійна сила взаємоіндуктивності 80
7.2. Послідовне з'єднання двух індуктивно зв'язаних котушок 82
7.3. Особливості складання рівнянь для складного кола із взаємоіндуктивністю 84
Контрольні запитання до розділу 7 87
8. ЧОТИРИПОЛЮСНИКИ ТА ЇХНІ ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ 88
8.1. Основні рівняння чотириполюсника 88
8.2. Визначення параметрів чотириполюсників 89
8.3. Найпростіші чотириполюсники 90
8.4. Характеристичні параметри чотириполюсників 92
Контрольні запитання до розділу 8 93
9. ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ТРИФАЗНОГО ЗМІННОГО СТРУМУ 94
9.1. Основні поняття та співвідношення 94
9.2. Розрахунок трифазних кіл 98
9.3. Розрахунок несиметричних трифазних кіл 99
9.4. Потужність у трифазних електричних колах 101
Контрольні запитання до розділу 9 102
10. ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПЕРІОДИЧНОГО НЕСИНУСОЇДНОГО СТРУМУ .103
10.1. Подання періодичних несинусоїдних функцій рядами Фур'є 103
10.2. Особливості розкладання в ряд Фур'є періодичних функцій зі специфічними властивостями 104
10.3. Наближені методи визначення коефіцієнтів ряду Фур'є 108
10.4. Діючі значення несинусоїдних струмів і напруг 109
10.5. Розрахунок електричних кіл при несинусоїдних напругах 110
10.6. Потужності в колах несинусоїдного струму 111
10.5. Коефіцієнти, які характеризують відмінність кривої від синусоїди .. 112
Контрольні запитання до розділу 10 113
11. ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ 114
11.1. Причини виникнення перехідних процесів. Закони комутації 114
11.2. Перехідні процеси у простих нерозгалужених електричних колах 115

11.2.1 Вмикання кола rL на постійну напругу 115
11.2.2 Вмикання кола rC на постійну напругу 118
11.3. Незалежні і залежні початкові умови 120
11.4. Класичний метод розрахунку перехідних процесів 120
11.4.1 Вмикання кола rLC на постійну напругу 120
11.4.2 Формування характеристичного рівняння методом вхідного опору 124
11.4.3 Аналіз складного кола другого порядку 124
11.5. Операторний метод розрахунку перехідних процесів 129
11.5.1 Суть та деякі властивості перетворення Лапласа 129
11.5.2 Операторні зображення електротехнічних параметрів та операторні схеми заміщення 133
11.5.3 Закони Кірхгофа в операторній формі 136
11.5.4 Перехід від зображення до оригіналу 137
11.6. Перехідні процеси при довільному вхідному сигналі 140
11.6.1 Основи теорії сигналів 140
11.6.2 Розрахунок перехідних процесів при довільних вхідних сигналах з використанням перехідної характеристики 145
11.6.3 Розрахунок перехідних процесів при довільних діяннях з використанням імпульсної функції 150
Контрольні запитання до розділу 11 153
12. НЕЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА 154
12.1. Основні поняття та означення 154
12.2. Аналітичне подання характеристик нелінійних елементів 158
12.3. Графічний метод розрахунку нелінійних електричних кіл постійного струму 162
12.3.1 Найпростіші схеми з’єднання нелінійних опорів 162
12.3.2 Метод еквівалентного генератора 167
12.3.3 Метод двох вузлів 168
12.4. Графоаналітичний метод розрахунку нелінійних електричних кіл постійного струму 170
12.5. Аналітичний метод розрахунку нелінійних електричних кіл постійного струму 173
Контрольні запитання до розділу 12 174
ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ 176
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ 203
СЛОВНИК ІНШОМОВНИХ ТЕРМІНІВ 205

ВСТУП

Курс «Теоретичні основи електротехніки» (ТОЕ) є одним із нормативних курсів, які вивчаються студентами вищих навчальних закладів спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка».

Метою вивчення дисципліни є формування знань, умінь та навичок розрахунку електричних кіл різного роду у різних режимах їх роботи, що застосовують під час виробництва сільськогосподарської продукції.

Предметом курсу ТОЕ є функціонування лінійних і нелінійних електричних кіл в усталених і перехідних режимах під впливом дії сигналів різної форми.

Таким чином, матеріал дисципліни ТОЕ є теоретичною базою для вивчення і засвоєння спеціальних дисциплін, таких, як «Електричні машини», «Основи електропривода», «Основи виробництва, розподілу та споживання електроенергії», «Електричні апарати», «Теорія автоматичного керування» тощо.

В свою чергу, курс ТОЕ потребує при його вивченні знання основних розділів фізики і математики, зокрема, операцій з комплексними числами, диференціальних рівнянь, рядів Фур'є, перетворень Лапласа, векторного аналізу тощо.

Курс ТОЕ викладається протягом трьох семестрів і складається з трьох частин. Перша частина курсу включає у себе вивчення особливостей функціонування електричних кіл у стаціонарних режимах роботи.

Для полегшення розуміння та засвоєння курсу основні положення теорії ілюструються числовими прикладами з детальними розв'язаннями. При розв'язанні цих прикладів широко застосовується (у випадках, коли це доцільно) комп'ютерний програмний комплекс MathCAD.

1. БАЗОВІ ПОНЯТТЯ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ

1.1. Основні визначення та поняття

Електричним колом (electric circuit) називається сукупність пристроїв, призначених для тривалого проходження електричного струму [1].

Електричне коло складається з:

- *джерел електромагнітної енергії* – пристроїв, які перетворюють енергію інших видів (механічну, теплову, світлову, хімічну тощо) в електромагнітну;
- *пристроїв для передавання електромагнітної енергії і сигналів* (лінії передачі, лінії зв'язку);
- *споживачів електромагнітної енергії* – пристроїв, які перетворюють електромагнітну енергію в інші види: механічну (електричні двигуни); теплову (нагрівачі); світлову (освітлювальні пристрої).

Електричний *струм*, що протікає в колі, є впорядкованим рухом електричних зарядів. Чисельно величина струму визначається як кількість електричного заряду q, який проходить через поперечний переріз провідника за одиницю часу:

$$i = \frac{dq}{dt}. \tag{1.1}$$

В Міжнародній системі одиниць (СІ) заряд вимірюється в *кулонах* (Кл), час – у *секундах* (с), а струм – в *амперах* (А).

Струм є скалярною алгебраїчною величиною, тобто може приймати додатні або від'ємні значення. За додатний напрямок струму прийнято вважати напрямок руху додатних зарядів, які під дією сил електричного поля рухаються від точок вищого потенціалу до точок нижчого. При аналізі електричних кіл заздалегідь, як правило, додатний напрямок струму невідомий, тому при розрахунках кіл на їх окремих ділянках довільно задаються додатним напрямком струму та позначають його стрілкою [1, 2].

Напруга на ділянці електричного кола (наприклад, між точками 1 та 2, рис. 1.1) чисельно дорівнює кількості енергії, яка витрачається на переміщення одиниці заряду із точки 1 в точку 2:

$$u = \frac{dw}{dq}. \tag{1.2}$$

Вимірюється напруга у *вольтах* (В). Це теж скалярна алгебраїчна величина, додатний напрямок якої приймають таким, що збігається з додатним напрямком струму. Якщо струм тече від точки 1 до точки 2, то потенціал точки 1 (φ_1) вищий за потенціал точки 2 (φ_2) і напруга між цими точками $u = \varphi_1 - \varphi_2$.

Кожна група пристроїв електричного кола – це безліч різних конкретних приладів, які відрізняються за принципом дії, конструкцією тощо. Всю різно-

манітність складових частин електричного кола доцільно охарактеризувати певними ознаками, основними властивостями з електротехнічної точки зору і провести класифікацію *елементів* електричного кола за цими ознаками.

Під елементами електричного кола зазвичай розуміють не фізично існуючі частини електротехнічних пристроїв, а їх ідеалізовані моделі.

1.2. Електричні схеми та їх топологічні елементи

Графічне зображення електричного кола називають *електричною схемою,* приклад якої наведено на рис. 1.1.

Основними поняттями, які характеризують геометричну структуру електричного кола, є *вітка*, *вузол* і *контур*.

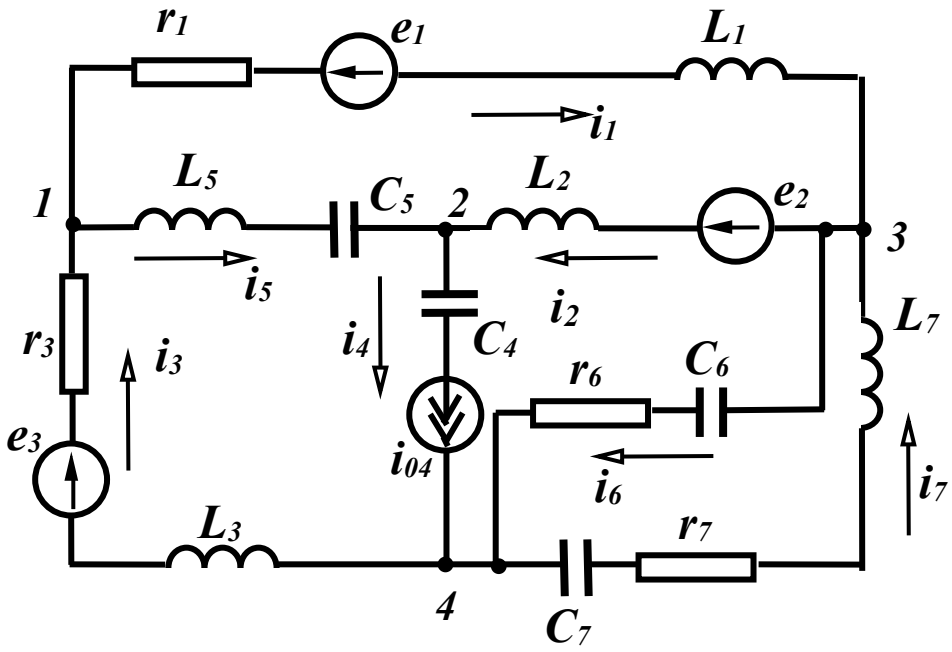


Рисунок 1.1. Приклад електричної схеми

Вітка – це ділянка кола, вздовж якої струм в будь-який момент часу має одне і те саме значення.

Зазвичай всі елементи, що входять до однієї вітки, одержують однакові індекси, і тоді вітки зручно нумерувати. Так, точки 1 та 3 (рис. 1.1) з'єднуються віткою 1, точки 1 та 2 – віткою 5 тощо. Якщо вітка містить декілька елементів, то ці елементи з'єднані *послідовно*. Наприклад, у вітці 3 елементи r_3, e_3, L_3 з'єднані послідовно.

Вузол – це точка кола, де з'єднуються три або більше вітки [3].

В колі (рис.1.1) є чотири вузли, які позначаються відповідними цифрами. Дві або більше віток, приєднані до одних і тих самих двох вузлів, називають *паралельними* вітками, а таке з'єднання – *паралельним*. Вітки 6 і 7 з'єднані паралельно, оскільки вони з'єднані з одними і тими ж вузлами 3 та 4.

Контуром називають довільну замкнену послідовність віток [1].

Загальна кількість контурів у колі визначається всіма можливими комбінаціями таких замкнених послідовностей віток.

Зазвичай задані конфігурація кола, параметри елементів і джерел. Задача аналізу кола в цьому випадку полягає у визначенні струмів усіх віток (зазначимо, що струми у вітках, які містять джерела струму, відомі, оскільки дорівнюють струму джерела.

1.3. Джерела електромагнітної енергії

Незалежно від конкретного виконання джерел електромагнітної енергії їх об'єднує одна загальна властивість – здатність перетворювати в електромагнітну енергію інші види енергії. Джерела є причиною виникнення струмів і напруг в електричних колах.

Розрізняють *незалежні* і *залежні* (*керовані*) джерела. Параметри (напруга та струм) незалежних джерел не залежать від зовнішнього діяння і визначаються тільки їх внутрішніми властивостями.

Струм і напруга залежних джерел можуть залежати від напруги або струму будь-якої вітки чи будь-якої ділянки кола. Залежні джерела – це, як правило, результат ідеалізації властивостей реальних електронних схем, що працюють в лінійному режимі.

Для аналізу кіл зручно вводити ідеалізовані незалежні джерела двох видів: *напруги* та *струму*.

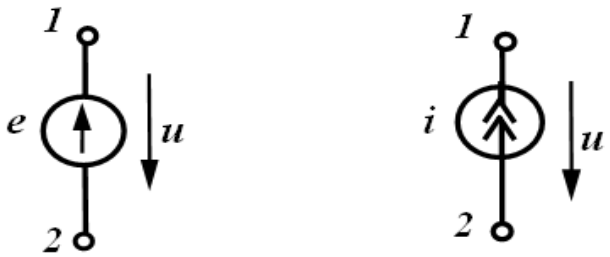
Під *джерелом напруги* (*voltage source*) розуміють таке джерело, напруга якого не залежить від струму, що протікає через нього. В джерелах напруги під дією так званих *сторонніх сил* (хімічні реакції, електромагнітні сили тощо) відбувається примусове розділення додатних та від'ємних зарядів проти сил електричного поля і поява різних значень потенціалів на затискачах джерела. Створена таким чином різниця потенціалів називається *електрорушійною силою* (ЕРС), яка вимірюється у вольтах.

Умовне графічне зображення джерела напруги показано на рис. 1.2(*а)*, де напрямок стрілки всередині кружка показує напрямок дії ЕРС, при цьому $e = \varphi_1 - \varphi_2$. Оскільки $\varphi_1 > \varphi_2$, то напруга джерела направлена від точки 1 до точки 2, тому при вказаних напрямках ЕРС та напруги $u = e$.

Під *джерелом струму* (*current source*) розуміють таке джерело, сила струму i якого не залежить від властивостей кола, зовнішнього відносно джерела. Графічне зображення джерела струму показано на рис. 1.2(*б)*, де стрілки характеризують додатний напрямок струму джерела.

Розглянуті джерела є *ідеальними*. Внутрішній опір ідеальної ЕРС *дорівнює нулю*, а ідеального джерела струму – *нескінченності*.

Залежні (керовані) джерела, які зображені на рис. 1.3, також можна розділити на джерела напруги і струму, які можуть змінюватися залежно від струмів або напруг в інших вітках.



а) *б)*

Рисунок 1.2. Умовне позначення ідеальних джерел енергії на електричній схемі: а) джерело електро-рушійної сили; б) джерело струму

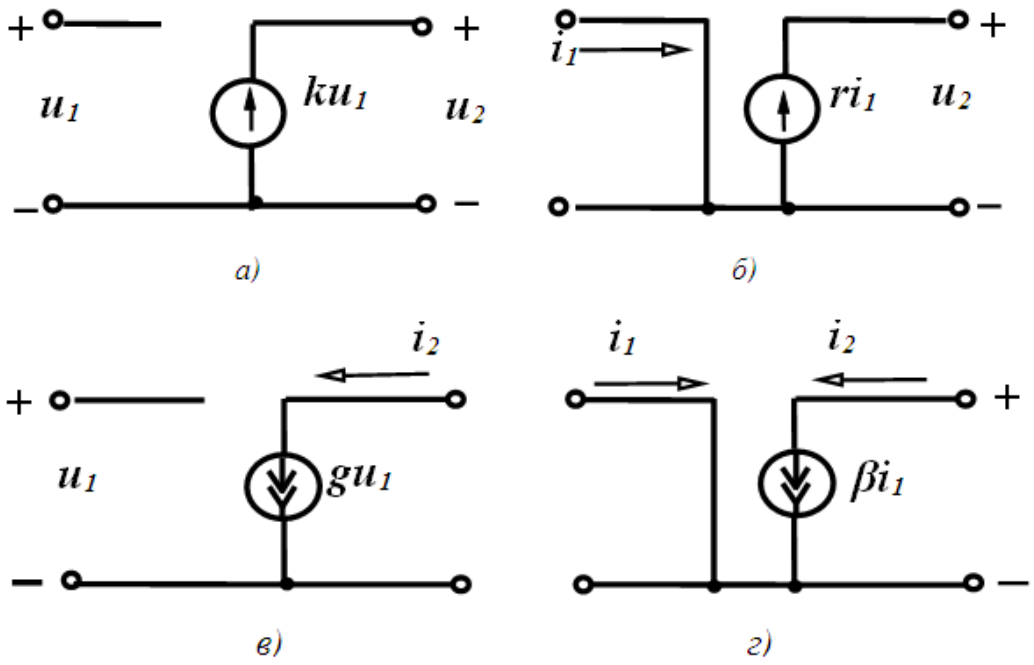


Рисунок 1.3. Умовне позначення керованих джерел енергії на електричній схемі: а) джерело напруги, кероване напругою; б) джерело напруги, кероване струмом; в) джерело струму, кероване напругою; г) джерело струму, кероване струмом

Розрізняють чотири типи залежних джерел:

а) джерела напруги, керовані напругою (ДНКН) (рис. 1.3(*а*)). Напруга джерела пропорційна напрузі u_1:

$$u_2 = ku_1; \tag{1.3}$$

б) джерела напруги, керовані струмом (ДНКС) (рис. 1.3(*б*)):

$$u_2 = ri_1; \tag{1.4}$$

в) джерела струму, керовані напругою (ДСКН) (рис. 1.3(*в*)):

$$i_2 = gu_1; \tag{1.5}$$

г) джерела струму, керовані струмом (ДСКС) (рис. 1.3(*г*)):

$$i_2 = \beta i_1 . \tag{1.6}$$

Ділянки електричного кола, які містять джерела енергії, називають *активними*, а ті, в яких джерела відсутні – *пасивними*.

1.4. Пасивні елементи електричного кола

Для класифікації пасивних елементів варто виділити найбільш суттєві загальні ознаки, властиві тим чи іншим елементам. Із курсу фізики відомо, що протікання електричного струму в колі пов'язане із виникненням електричного та магнітного полів і перетворенням електричної енергії в теплову або інші види енергії. Точніше кажучи, ці явища мають місце на всіх ділянках електричного кола, однак їх інтенсивність на різних ділянках неоднакова. Залежно від того, яке явище переважає на ділянці, розрізнюють три типи пасивних елементів – резистивний, індуктивний та ємнісний.

Резистивий елемент

Під *резистивним елементом* або *резистором* (*resistor*), розуміють такий ідеалізований елемент електричного кола, в якому електромагнітна енергія безповоротно перетворюється в теплоту або в інші види енергії [1].

При цьому вважають, що на цій ділянці кола відсутні електричні або магнітні поля. Графічне зображення резистора показано на рис. 1.4.

Зв'язок між напругою і струмом на резисторі визначається відношенням:

$$u = ri . \tag{1.7}$$

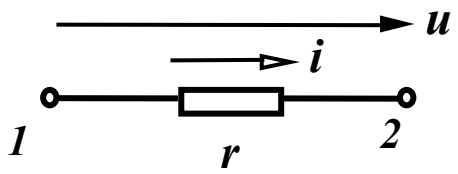


Рисунок 1.4. Резистивний елемент

Величина *r* називається *електричним опором* (*electric resistance*) і вимірюється в омах [Ом]; величина, обернена опору, називається *провідністю* (*conductivity*) і вимірюється в сименсах [См]:

$$g = \frac{1}{r} \tag{1.8}$$

називається *провідністю* (*conductivity*) і вимірюється в сименсах [См].

Миттєва потужність, що виділяється у вигляді теплоти в резисторі, визначається як:

$$p = ui = ri^2 . \tag{1.9}$$

Миттєва потужність не набуває від'ємних значень, тому в будь-який момент часу енергія надходить від джерела до резистора.

Індуктивний елемент

Елемент електричного кола, який характеризується створенням магнітного поля і запасанням енергії в ньому, називають *індуктивним елементом* або *індуктивністю* (*inductance*). Індуктивність в електричному колі реалізують за допомогою *індуктивної котушки*, яка має малий активний опір.

Умовне зображення індуктивного елементу з додатними напрямами струму і напруги показано на рис. 1.5.

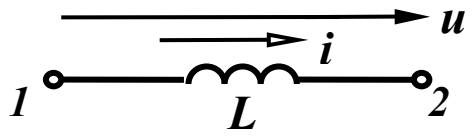


Рисунок 1.5. Індуктивний елемент

Зв'язок між напругою і струмом на ділянках, які містять індуктивність, записується, як:

$$u = L\frac{di}{dt}. \tag{1.10}$$

Величина L називається *індуктивністю* і вимірюється в генрі [Гн].

Миттєва потужність на індуктивному елементі:

$$p = ui = Li\frac{di}{dt}, \tag{1.11}$$

може набувати як додатних, так і від'ємних значень, тобто індуктивний елемент може приймати енергію ($p > 0$) і запасати її в магнітному полі та повертати її до джерела ($p < 0$).

Кількість енергії, яка запасається магнітним полем:

$$w = \frac{Li^2}{2}. \tag{1.12}$$

Ємнісний елемент

Елемент електричного кола, який характеризує створення електричного поля і запасання в ньому енергії, називається *ємнісним елементом* (*capacity*). Умовне зображення ємнісного елемента показано на рис. 1.6.

Ємність в електричному колі реалізують спеціально виготовленим елементом – *конденсатором*. Найпростіший конденсатор складається з двох металевих пластин, розділених діелектриком.

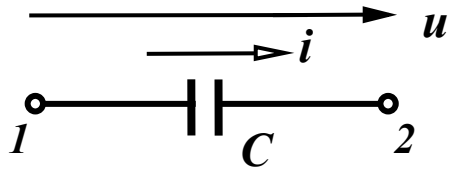


Рисунок 1.6. Ємнісний елемент

Зв'язок між напругою і струмом на ділянках, які містять ємність, визначається співвідношенням:

$$u = \frac{1}{C}\int idt. \tag{1.13}$$

Цей вираз не завжди зручний для використання, тому часто користуються формулою, яка відображає зворотний зв'язок:

$$i = C\frac{du}{dt}. \tag{1.14}$$

Величину C називають *ємністю* і вимірюють у фарадах [Ф].

Миттєва потужність на ємнісному елементі:

$$p = ui = Cu\frac{du}{dt}, \tag{1.15}$$

також може набувати додатних і від'ємних значень.

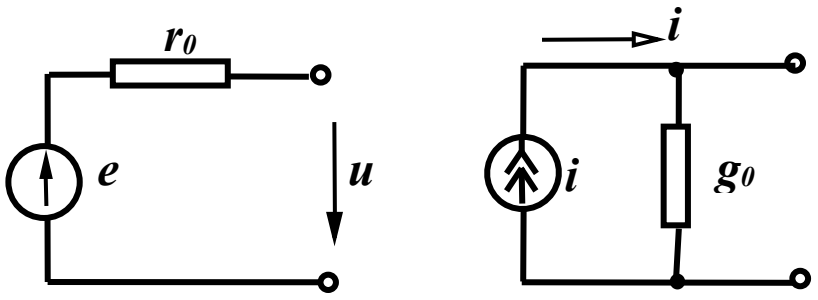
Енергія, яка запасається в електричному полі:

$$w = \frac{Cu^2}{2}. \tag{1.16}$$

Розглянуті активні і пасивні елементи є *ідеальними*. Реальні джерела відрізняються від ідеальних передусім тим, що напруги і струми на їх затискачах залежать від навантаження, викликаного наявністю внутрішніх опорів або провідностей. Такі реальні джерела можна зобразити як послідовне з'єднання ідеального джерела напруги і внутрішнього опору r_0 (рис. 1.7(*а*)) або паралельне з'єднання ідеального джерела струму і внутрішньої провідності g_0 (рис. 1.7(*б*)).

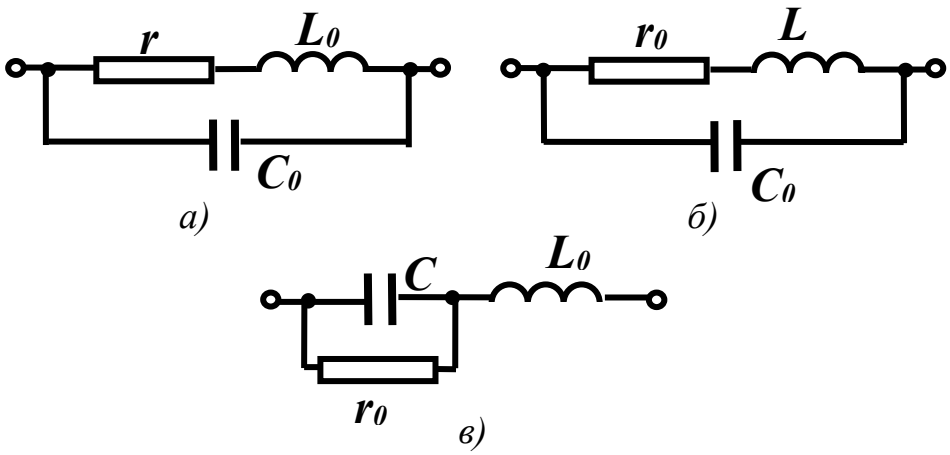
В реальному джерелі напруги, якщо воно працює в замкненому колі, напруга на його затискачах менша за е.р.с. на величину напруги на його внутрішньому опорі (r_0) $u = e - ir_0$.

Реальні прообрази резистивного, індуктивного та ємнісного елементів разом з головними параметрами мають також інші побічні (паразитні) параметри. Наприклад, резистивний елемент, що має вигляд дротяного реостата, крім активного опору r містить індуктивність витків L_0 і міжвиткову ємність C_0 (рис.1.8(*а*)).



а) *б)*

Рисунок 1.7. Схеми заміщення реальних джерел живлення: а) джерела, з малим внутрійнім опором; б) джерела з великим внутрішнім опором



а) *б)* *в)*

Рисунок 1.8. Схеми заміщення реальних елементів електричного кола; а) резистивного елемента; б) котушки індуктивності; в) конденсатора

Так само індуктивний елемент, виконаний у вигляді котушки, який характеризується індуктивністю L, має активний опір цієї котушки r_0 і міжвиткову ємність C_0 (рис. 1.8(*б)*). Аналогічний вигляд має схема заміщення конденсатора з «паразитними» параметрами (рис. 1.8(*в*)). Залежно від умов роботи кола величини «паразитних» параметрів можуть змінюватися і деякими з них можна знехтувати. Так, наприклад, при низькій частоті можна знехтувати параметрами L_0 і C_0.

Контрольні запитання до розділу 1

1. Чи можна з’єднати послідовно два ідеальних джерела струму із різними значеннями струмів?
2. Чи можна з’єднати паралельно два ідеальних джерела напруги із різними значеннями е.р.с.?
3. У чому різниця між електричною схемою та електричним колом?
4. Чи може електричне коло мати 1 вузол?

5. Яку мінімальну кількість контурів може мати електричне коло?

6. Які елементи електричного кола називаються лінійними, а які нелінійними?

7. Чому дорівнює внутрішній опір ідеального джерела напруги та ідеального джерела струму?

8. Що називається електричним струмом?

9. Який електричний струм називається постійним, а який змінним?

10. Що називається електричною напругою? Спадом напруги?

11. Чим відрізняється напруга джерела від його ЕРС?

12. Як виміряти ЕРС джерела?

13. Чому напруга на затискачах джерела за наявності струму у ньому не дорівнює ЕРС?

14. Як вибирають на схемі додатний напрям струму та напруги?

15. Що розуміють під джерелом напруги і джерелом струму?

16. Які елементи електричного кола називаються активними, а які пасивними?

17. Чому дорівнює напруга на індуктивності у колі постійного струму?

18. Чому дорівнює струм в ємності у колі постійного струму?

19. Чим відрізняється ідеальна індуктивність від реальної котушки?

20. Чим відрізняється ідеальна ємність від реального конденсатора?

21. Чим відрізняються ідеальні та реальні джерела енергії?

22. Запишіть компонентні співвідношення між миттєвими напругою та струмом на індуктивності.

23. Запишіть компонентні співвідношення між миттєвими напругою та струмом на ємності.

2. ОСНОВОПОЛОЖНІ ЗАКОНИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ

2.1. Закон Ома

Струм в електричному колі може протікати між двома точками тільки тоді, коли вони мають різні потенціали.

Потенціал – робота з перенесення заряду з даної точки в точку з нульовим потенціалом [4]. Нульовий потенціал має поверхня Землі, тому й поняття «заземлити» означає прийняти потенціал даної точки за нуль. Потенціал будь-якої точки в електричному колі можна прийняти за нульовий, потенціали всіх інших точок відповідно зміняться, але різниця потенціалів точок залишиться без зміни.

Різниця потенціалів двох точок – це *напруга* між цими точками. На рис.2.1(*а)* показана ідеальна ЕРС *E.* Приймемо, що потенціал точки *б* дорівнює нулю, «заземлимо», $\varphi_б = 0$, потенціал точки *а* вищий потенціалу точки *б* на величину ЕРС *E*, $\varphi_а = E$. Напруга $U_{аб}$ між точками *а, б*:

$$U_{аб} = \varphi_а - \varphi_б = \varphi_а = E. \qquad (2.1)$$

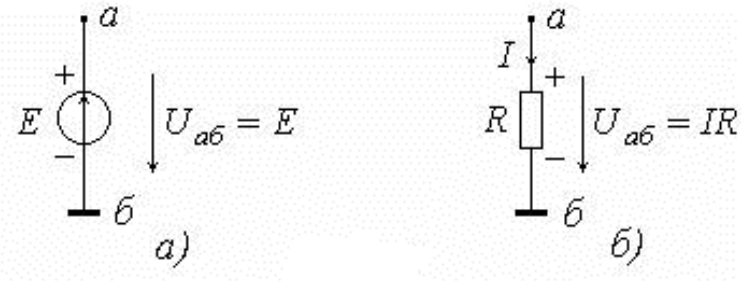


Рисунок 2.1. Особливості розрахунку напруги: а) що спадає на джерелі електро-рушійної сили; б) що спадає на пасивному елементі

Тобто, якщо проходити через ЕРС від «-» до «+», то потенціал зростає на величину ЕРС, напруга $U_{аб} = E$ буде додатня у випадку проходження через ЕРС у напрямку від «+» до «-» (проти вістря стрілки).

Такі ж міркування застосуємо для опору зі струмом рис.2.1(*б).* Приймемо потенціал точки *б* рівним нулю, $\varphi_б = 0$. Очевидно, що струм тече від точки з вищим потенціалом до точки з нижчим потенціалом, аналогічно, як і вода тече від верхнього рівня до нижнього. Тому потенціал точки *а* вищий від потенціалу точки *б* на величину падіння напруги IR на опорі *R*, $\varphi_а = IR$. Напруга між точками *а, б:* $U_{аб} = \varphi_а - \varphi_б = \varphi_а = IR$.

Висновок: на ділянці з опором потенціал зростає на *IR* у напрямку проти струму, а напруга додатня у напрямку співпадаючому зі струмом. Очевидно, що для розглянутих випадків напруга між точками *б, а* $U_{ба} = \varphi_б - \varphi_а$ буде від'ємна.

На рис. 2.2 показана частина електричного кола з ЕРС (джерелами напруги) та опорами, між точками *а, б*, по якій протікає струм *I*.

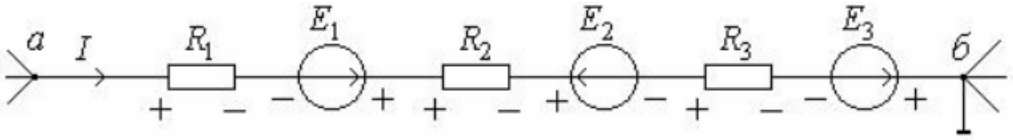


Рисунок 2.2. Ділянка електричного кола з джерелами напруги

Потенціал точки *а* відносно до потенціалу точки *б* (напрямок проти струму):

$$\varphi_a = \varphi_б - E_3 + IR_3 + E_2 + IR_2 - E_1 + IR_1 = \varphi_б - E_3 + E_2 - E_1 + I(R_1 + R_2 + R_3) \quad (2.2)$$

або

$$\varphi_a - \varphi_б = U_{аб} = -E_3 + E_2 - E_1 + I(R_1 + R_2 + R_3). \quad (2.3)$$

Звідки:

$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_б + E_3 - E_2 + E_1}{R_1 + R_2 + R_3}. \quad (2.4)$$

Це запис закону Ома, де струм вітки між точками *а, б* виражається за потенціалами точок чи за напругою між точками і параметрами вітки.

Для визначення струму у вітці за законом Ома при відомих параметрах необхідно:

- задатись довільним напрямком струму у вітці, від точки *а* до точки *б*;
- в чисельнику записати напругу $U_{аб} = \varphi_a - \varphi_б$ (а не $U_{ба} = \varphi_б - \varphi_a$), ЕРС, які співпадають із вибраним напрямком струму, записуються зі знаком «+», неспівпадаючі – зі знаком «-»;
- в знаменнику записується сума опорів вітки;
- якщо в результаті розрахунків струм буде від'ємним, то це означає, що напрям реального струму протилежний вибраному.

У загальному вигляді закон Ома для вітки записується так:

$$I = \frac{U_{аб} + \sum_{k=1}^{n} E_k}{\sum_{p=1}^{m} R_p}. \quad (2.5)$$

Якщо електричне коло складається тільки з одного контура, то отримаємо закон Ома для замкненого кола з одним струмом:

$$I = \frac{\sum_{k=1}^{n} E_k}{\sum_{p=1}^{m} R_p}. \quad (2.6)$$

2.2. Розподіл потенціалів вздовж замкненого електричного кола

У замкненому електричному колі, наведеному на рис. 2.3, діють дві ЕРС: E_1 і E_2.

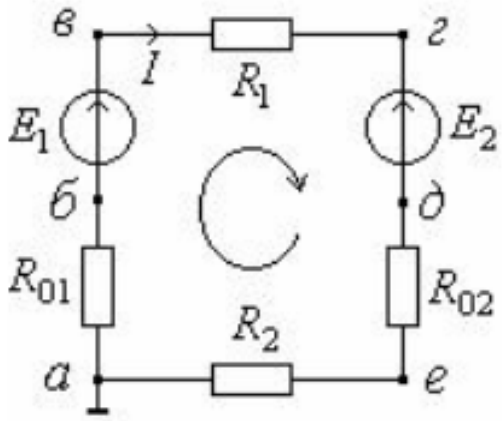


Рисунок 2.3. Замкнене електричне коло

Нехай $E_1 > E_2$. Тоді згідно із законом Ома:

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_{01} + R_{02} + R_1}, \tag{2.7}$$

струм буде співпадати з напрямком E_1. Приймемо потенціал точки a за нульовий $\varphi_a = 0$ і визначимо потенціали інших точок кола відносно нього:

$$\begin{aligned} &\varphi_б = \varphi_a - IR_{01};\ \varphi_в = \varphi_б + E_1;\ \varphi_г = \varphi_в - IR_1; \\ &\varphi_д = \varphi_г - E_2;\ \varphi_е = \varphi_д - IR_{02};\ \varphi_a = \varphi_е - IR_2. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Розподіл потенціалів вздовж контура зручно зображати потенціальною діаграмою (рис. 2.4). На діаграмі по вертикальній осі відкладаються потенціали точок, по горизонтальній – сума резисторів (опорів) в тому порядку, якому вони розміщені в контурі.

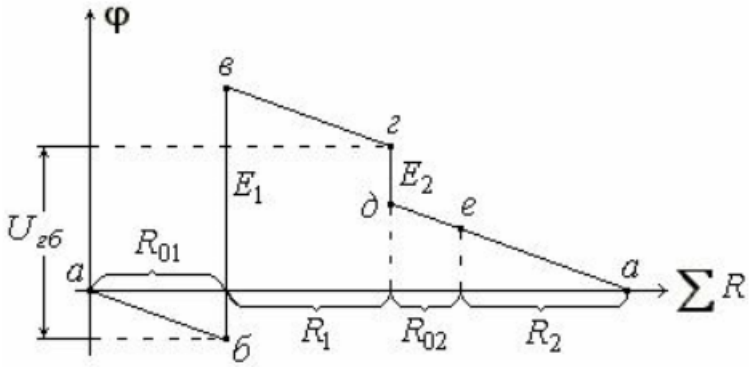


Рисунок 2.4. Приклад потенціальної діаграми

Із діаграми можна визначити:

- напрям і величину струму в резисторі; на діграмі обхід контура направлений за струмом (падіння напруги IR – від'ємне), кут нахилу відрізків потенціальної діаграми відносно осі $\sum R$ – від'ємний. При протилежному напрямі струму кут буде додатним. Оскільки в даному контурі протікає один струм, то вдрізки IR діаграми мають однаковий кут нахилу. Тангенс кута нахилу пропорційний струму в резисторі.

- напругу між будь-якими точками електричного кола; на діаграмі показана напруга $U_{гб}$ між точками *г, б*.

2.3. Закони Кірхгофа

Перший закон Кірхгофа (*the first law of Kirhgof*) виражає закон збереження заряду та принцип неперервності електричного струму і відноситься до вузлів кола.

Другий закон Кірхгофа (*the second law of Kirhgof*) виражає закон збереження енергії і відноситься до контурів кола.

Перший закон Кірхгофа формулюється так:
для будь-якого вузла схеми в будь-який момент часу алгебраїчна сума струмів всіх віток, які сходяться у цьому вузлі, дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} i_k = 0, \tag{2.10}$$

де k – індекси віток, зв'язаних з цим вузлом.

Знак струму, який входить у рівняння, визначається *довільним* вибором додатного напряму струмів. Струми, які виходять з вузла, записуються зі знаком «плюс»; струми, які входять у вузол, – зі знаком «мінус».

Таким чином, для вузла 1, зображеного на схемі (рис. 1.1), перший закон Кірхгофа записується, як $i_1 - i_3 + i_5 = 0$.

Другий закон Кірхгофа формулюється так:
для будь-якого контура схеми в будь-який момент часу алгебраїчна сума ЕРС джерел напруги, що діють в цьому контурі, дорівнює алгебраїчній сумі напруг на всіх пасивних елементах цього контура:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(r_k i_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C_k}\int i_k dt \right) = \sum_{k=1}^{n} e_k, \tag{2.11}$$

де k – індекси всіх віток, що входять у контур.

Для можливості формування рівнянь за другим законом Кірхгофа, окрім напрямків струмів у вітках, варто задати напрямки обходу контурів (за годинниковою стрілкою або проти неї). При цьому, якщо напрям ЕРС збігається з напрямком обходу контура, то вона входить у рівняння зі знаком «плюс», а якщо навпаки – зі знаком «мінус». Напруга на пасивному елементі приймається зі знаком «плюс», якщо напрямок струму в цьому елементі збігається з напрямком обходу контура, а якщо навпаки – зі знаком «мінус».

При виборі контура для запису рівняння за другим законом Кірхгофа доцільно уникати контурів, в які входять вітки із джерелами струму.

Для контура з вітками 1–2–5 кола, зображеного на рис. 1.1, при обході контура за годинниковою стрілкою рівняння за другим законом Кірхгофа виглядає, як: $r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} - L_5 \frac{di_5}{dt} - \frac{1}{C_5} \int i_5 dt = e_2 - e_1$.

Контрольні запитання до розділу 2

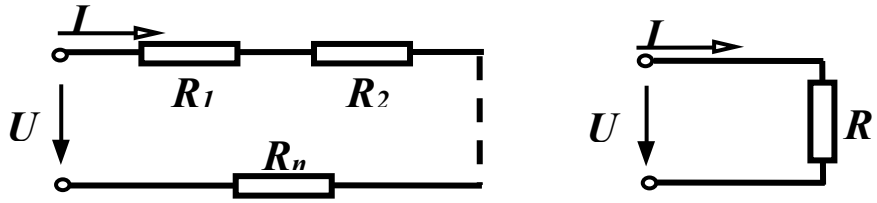
1. Сформулюйте закон Ома.
2. У чому різниця між законом Ома для ділянки кола та повного кола?
3. Що називається спадом напруги?
4. Як обчислюється спад напруги на пасивній діланці кола?
5. Як обчислюється спад напруги на активній ділянці кола?
6. Що таке потенціал? Різниця потенціалів?
7. Як потенціал пов'язаний з напругою?
8. Що таке потенціальна діаграма? Які особливості її побудови?
9. Які параметри можна визначити із потенціальної діаграми?
10. Сформулюйте 1-й закон Кірхгофа.
11. Для якого топологічного елемента кола сформульовано 1-й закон Кірхгофа?
12. Сформулюйте 2-й закон Кірхгофа.
13. Для якого топологічного елемента кола сформульовано 2-й закон Кірхгофа?
14. Яку кількість рівнянь необхідно скласти за першим і яку за другим законами Кіргофа для однозначного описування процесів у колі?

3. КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ. МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ СКЛАДНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

3.1. Еквівалентні перетворення пасивних елементів електричного кола

1. *Послідовне з'єднання опорів*

Припустимо, що є електричне коло з *n* послідовно з'єднаними опорами, через які протікає один і той самий струм *I* (рис. 3.1(*а*)). Еквівалентне коло містить лише один опір $R_{екв}$ (рис. 3.1(б)).



а) *б)*

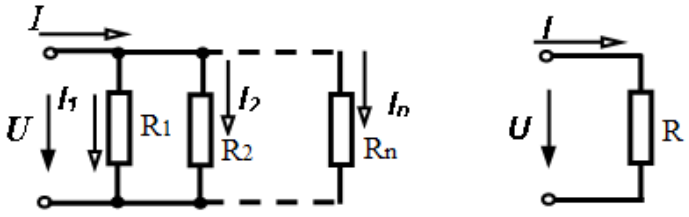
Рисунок 3.1. Електрична схема: а) до еквівалентного перетворення; б) після еквівалентного перетворення

В цьому випадку *еквівалентний опір кола при послідовному з'єднанні дорівнює сумі опорів окремих елементів*, тобто:

$$R_{екв} = R_1 + R_2 + ... + R_n, \tag{3.1}$$

2. *Паралельне з'єднання опорів*.

Допустимо, що є електричне коло з *n* паралельно з'єднаними опорами, до яких прикладена однакова напруга *U* (рис. 3.2, *а*). Еквівалентне коло містить лише один опір $R_{екв}$ (рис. 3.2(б)).



а) *б)*

Рисунок 3.2. Електрична схема: а) до еквівалентного перетворення; б) після еквівалентного перетворення

При паралельному з'єднанні провідність еквівалентного кола дорівнює сумі провідностей окремих елементів:

$$Y_{екв} = Y_1 + Y_2 + ... + Y_k + ... + Y_n. \tag{3.2}$$

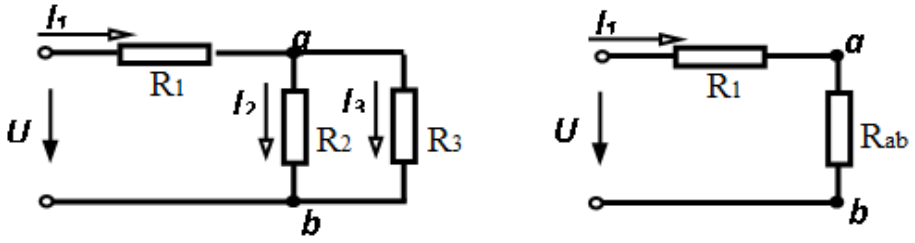
Для випадку двох паралельних опорів, який часто зустрічається, $\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$, або $\frac{1}{R_{екв}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, звідки після нескладних перетворень:

$$R_{екв} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \tag{3.3}$$

Аналогічно, для трьох паралельних опорів отримаємо:

$$R_{екв} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}. \tag{3.4}$$

Розглянемо випадок змішаного з'єднання (рис. 3.3(*а*)).



а) *б)*

Рисунок 3.3. Електрична схема: а) до еквівалентного перетворення; б) після еквівалентного перетворення

При змішаному з'єднанні шляхом послідовного перетворення паралельного і послідовного з'єднання елементів приходять до еквівалентної схеми, яка складається із одного опору.

Спочатку перетворюють два паралельно з'єднаних опори R_2 і R_3 в один R_{ab} ($R_{ab} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$).

Із рис. 3.3(*б*) видно, що опори R_1 і R_{ab} з'єднані послідовно, тому $R_{екв} = R_1 + R_{ab}$.

Струм I_1 визначається за законом Ома: $I_1 = \frac{\underline{U}}{R_{екв}}$.

Щоб знайти струми I_2 і I_3, треба визначити спочатку напругу між точками a і b: $U_{ab} = I_1 R_{ab} = I_1 \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$.

Знаючи U_{ab}, легко визначаються $I_2 = \frac{U_{ab}}{R_2}$, $I_3 = \frac{U_{ab}}{R_3}$,

або $I_2 = I_1 \frac{R_3}{R_2 + R_3}$, $I_3 = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3}$.

Перетворення з'єднання «трикутником» в еквівалентне з'єднання «зіркою» і навпаки.

З'єднання трьох опорів, які створюють сторони трикутника, називається з'єднанням «*трикутником*» (рис. 3.4(а)), а з'єднання трьох опорів, що має вигляд трипроменевої зірки, називають з'єднання «*зіркою*» (рис.3.4(б)) [2].

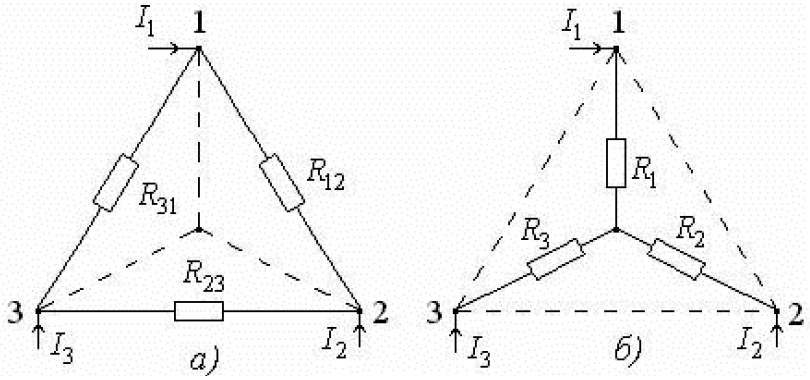


Рисунок 3.4. Схеми з'єднання елементів електричного кола: а) в «трикутник»; б) в «зірку»

У вузлах 1, 2, 3 трикутник з опорами R_{12}, R_{23}, R_{31} і зірка (R_1, R_2, R_3) – з'єднуються з рештою частин кола, яка на рисунку не показана. В літературі на основі першого закону Кірхгофа та закону Ома виводяться розрахункові формули для переходу від трикутника до зірки і навпаки. За відомими опорами трикутника (R_{12}, R_{23}, R_{31}) розраховуються опори зірки (R_1, R_2, R_3):

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}},\quad R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}},\quad R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}. \qquad (3.5)$$

За відомими опорами зірки (R_1, R_2, R_3) розраховуються опори трикутника (R_{12}, R_{23}, R_{31}):

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3},\quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2R_3}{R_1},\quad R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3R_1}{R_1}. \qquad (3.6)$$

Доцільність перетворення трикутника у зірку можна пояснити, наприклад, схемою, наведеною на рис.3.5(а) (пунктиром обведений трикутник, який перетворюється у зірку). На рис.3.5(б) показана та ж схема після перетворення. Розрахунок струмів у ній значно простіший (метод двох вузлів), ніж розрахунок струмів у схемі рис.3.5(а).

У доцільності перетворення зірки у трикутник можна переконатись на прикладі схеми, показаної на рис. 3.6(а) (пунктиром обведена зірка, яка буде перетворюватись у трикутник) [2]. На рис. 3.6(б) показана та ж схема після перетворення, яка зводиться до паралельного з'єднання опорів.

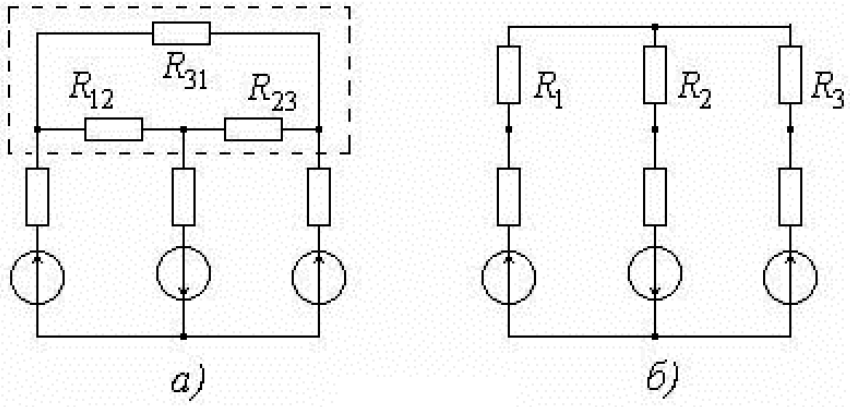


Рисунок 3.5. Електрична схема: а) до еквівалентного перетворення; б) після еквівалентного перетворення типу «трикутник – зірка»

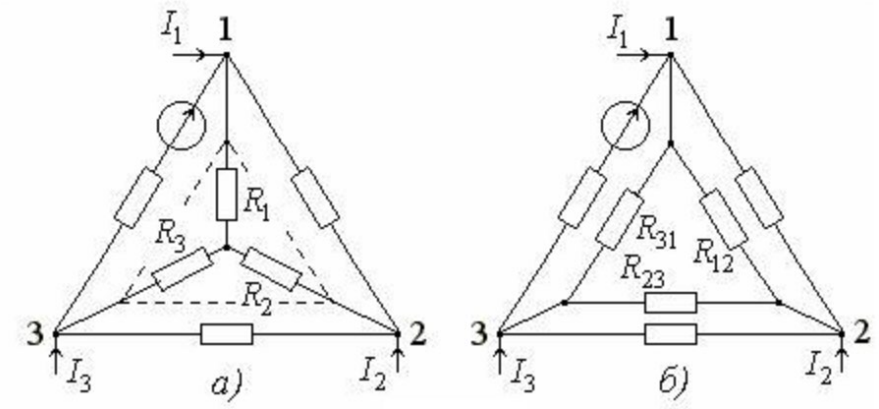


Рисунок 3.6. Електрична схема: а) до еквівалентного перетворення; б) після еквівалентного перетворення типу «зірка – трикутник»

3.2. Еквівалентні перетворення віток з активними елементами

Винесення ідеального джерела ЕРС за вузол.
Напруга між точками *а, в* і *а, г,* рис. 3.7, описується рівняннями:

$$U_{ав} = IR - E + I_1R_1, \;\; U_{аг} = IR - E + I_2R_2. \qquad (3.7)$$

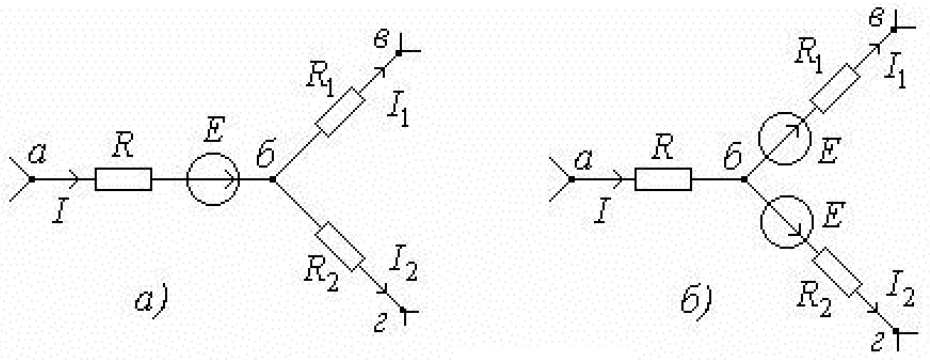


Рисунок 3.7. Електрична схема: а) до еквівалентного перетворення; б) після еквівалентного перетворення джерела електрорушійної сили

На схемі рис. 3.7(б) напруга між такими ж точками відповідає тим же рівнянням, що свідчить про еквівалентність цих двох схем. Таким чином, ЕРС можна виносити за вузол, значно спрощуючи розрахунки.

Внесення ідеального джерела струму в контур.

Як було показано, струм у контурі з ідеальним джерелом струму відомий і дорівнює струму цього джерела.

Вибір контура можна здійснити декількома шляхами, при чому в кожному випадку струм у контурі буде відомим.

Згідно із рис. 3.8, контурний струм можна направити двома шляхами: через R_1, R_5 або R_2, R_3, R_4.

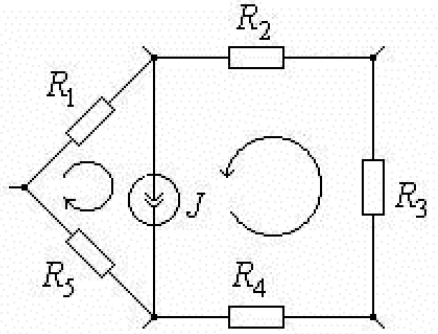


Рисунок 3.8. Контури електричної схеми, що містять спільне джерело струму

Такі ж струми будуть протікати через відповідні опори в схемах рис. 3.9(а, б).

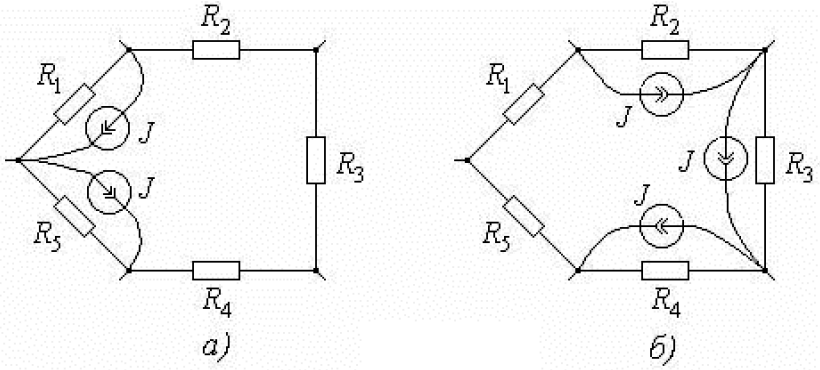


Рисунок 3.9. Еквівалентні перетворення контуру з джерелом струму

Таким чином можна здійснити внесення ідеального джерела струму у контур, а далі і спрощення схеми, наприклад, замінивши джерела струму джерелами ЕРС (рис. 3.10(а, б)).

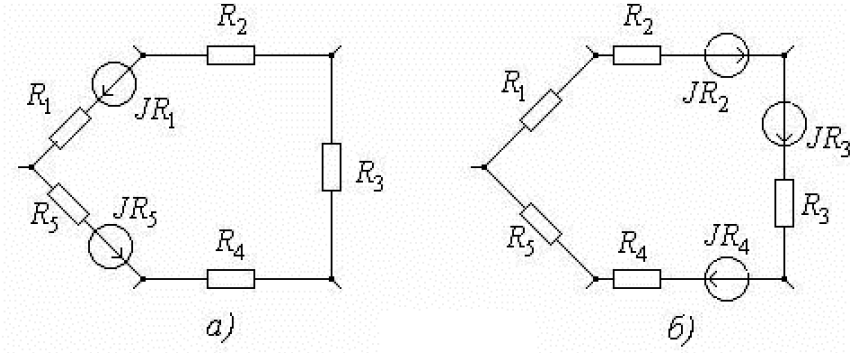


Рисунок 3.10. Ділянки електричної схеми з еквівалентними замінами джерел струму на джерела електрорушійних сил

3.3. Метод рівнянь Кірхгофа

В задачах аналізу для розрахунку кола потрібно визначити струми у вітках за відомими параметрами ЕРС, резисторів і конфігурації кола. Для електричного кола із кількістю вузлів В і віток Bm необхідно скласти Bm рівнянь, щоб визначити всі невідомі струми. У колі з вітками, у яких містяться джерела струму, струми останніх відомі. Відповідно, зменшиться кількість рівнянь, складених за другим законом Кірхгофа для незалежних контурів на кількість віток J, у яких містяться джерела струму.

В такому разі, кількість рівнянь, що необхідно скласти за першим законом Кірхгофа, буде дорівнювати:

$$n_1 = B - 1. \tag{3.8}$$

Тоді кількість рівнянь, яку необхідно скласти за другим законом Кірхгофа, буде дорівнювати:

$$n_2 = Bm - (B - 1) - J. \tag{3.9}$$

Наприклад, для кола рис. 3.11 кількість вузлів B=3, віток Bm=5, віток зі струмом J=*1*. Відповідно:

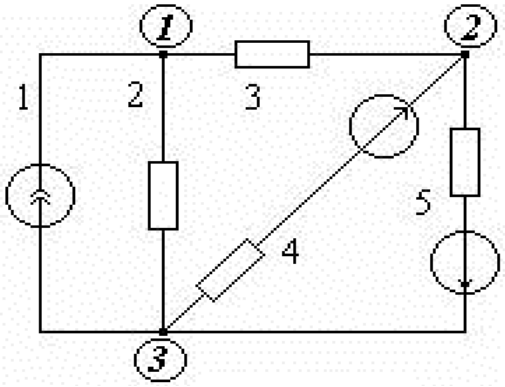


Рисунок 3.11. Схема електричного кола

$$n_1 = B - 1 = 3 - 1 = 2,$$

$$n_2 = Bm - (B-1) - J = 5 - (3-1) - 1 = 2.$$

Загальна кількість рівнянь:

$$n_1 + n_2 = 4.$$

Значно складніші зворотні задачі синтезу, в яких, наприклад, відомі струми і напруги на деяких ділянках кола, а необхідно знайти конфігурацію кола і вибрати його елементи.

Алгоритм розрахунку електричного кола методом рівнянь Кірхгофа.

1. Визначити кількість вузлів *B*, довільно вибрати напрями струму у вітках і скласти n_1=(B-1) рівнянь за першим законом Кірхгофа.

2. Визначити кількість незалежних контурів та вибрати довільно напрямок їх обходу, бажано однаково, (за годинниковою стрілкою). Скласти для кожного незалежного контура рівняння за другим законом Кірхгофа n_2= Bm-(B-1)-J**.** Для контура, в який входить вітка із джерелом струму, рівняння не складають (зайва інформація).

3. Розв'язок системи рівнянь дає невідомі струми. Якщо якийсь зі струмів має знак «мінус», то це означає, що його істинний напрям протилежний вибраному.

4. Перевірити правильність розв'язку за балансом потужностей.

Розглянемо електричне коло, наведене на рис. 3.12.

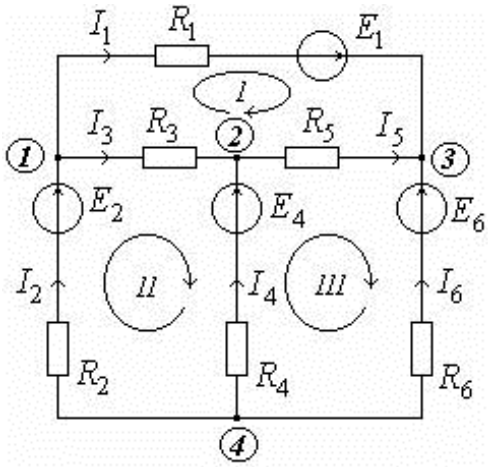


Рисунок 3.12. Схема електричного кола

У колі вузлів B=4, віток Bm=6, віток із джерелами струму J=0. Кількість рівнянь за першим законом Кірхгофа n1= (B -1)= 4-1=3.

$$I_2 - I_1 - I_3 = 0,$$
$$I_3 + I_4 - I_5 = 0,$$
$$I_1 + I_5 + I_6 = 0.$$

Кількість рівнянь за другим законом Кірхгофа дорівнює кількості незалежних контурів: n_2= Bm-(B-1) - J=6-(4-1)-0=3.

$$I_1R_1 - I_5R_5 - I_3R_3 = E_1,$$
$$I_2R_2 + I_3R_3 - I_4R_4 = E_2 - E_4,$$
$$I_4R_4 + I_5R_5 - I_6R_6 = E_4 - E_6.$$

Одержана система із шести рівнянь із шістьма невідомими (струмами).

3.4. Метод контурних струмів

3.4.1. Суть та основні підходи

Метод контурних струмів базується на законах Кірхгофа.

При аналізі електричного кола вважають, що в кожному незалежному контурі протікає свій контурний струм. Рівняння для контурних струмів складають за другим законом Кірхгофа. Кількість рівнянь дорівнює кількості незалежних контурів, тобто метод контурних струмів більш економний при обчислювальній роботі.

На рис. 3.13 зображено електричне коло із двома незалежними контурами. I_1, I_2, I_3 – струми у вітках кола, I_{11}, I_{22} – контурні струми.

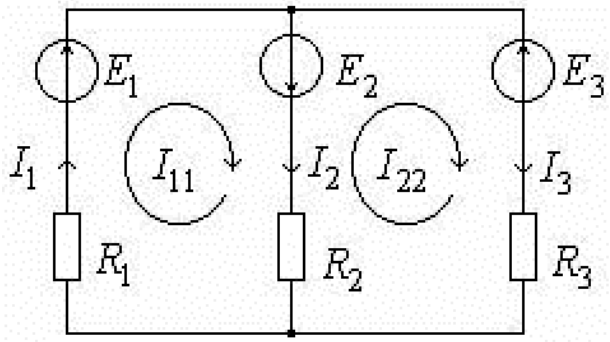


Рисунок 3.13. Схема електричного кола з позначеними контурними струмами

За другим законом Кірхгофа:

$$I_1R_1 + I_2R_2 = E_1 + E_2,$$
$$-I_2R_2 + I_3R_3 = -E_2 - E_3.$$

Виразимо струми у вітках через контурні струми:

$$I_{11}R_1 + (I_{11} - I_{22})R_2 = E_1 + E_2,$$
$$-(I_{11} - I_{22})R_2 + I_{22}R_3 = -E_2 - E_3,$$

або

$$I_{11}(R_1 + R_2) - I_{22}R_2 = E_1 + E_2,$$
$$-I_{11}R_2 + I_{22}(R_2 + R_3) = -E_2 - E_3.$$

Очевидно, струми у зовнішніх вітках дорівнюють контурним струмам:

$$I_1 = I_{11}, \quad I_3 = I_{22}.$$

У внутрішніх вітках струми дорівнюють різниці контурних струмів:

$$I_2 = I_{11} - I_{22}.$$

Введемо позначення:

$R_1 + R_2 = R_{11}$ – *власний опір першого контура* – це сума опорів, по яких протікає контурний струм першого контура (перший контурний резистанс).

$R_2 + R_3 = R_{22}$ – *власний опір другого контура* – це сума опорів, по яких протікає контурний струм другого контура (другий контурний резистанс).

$-R_2 = R_{12} = R_{21}$ – *спільний опір* першого та другого контура, по ньому протікають перший і другий контурні струми (взаємний резистанс).

$E_1 + E_2 = E_{11}$ – *контурна ЕРС першого контура.*

$-E_2 - E_3 = E_{22}$ – *контурна ЕРС другого контура.*

Увага! ЕРС, які співпадають із вибраним напрямом контурного струму, входять у контурну ЕРС зі знаком «плюс». Рекомендується контурні струми направляти однаково, наприклад, за годинниковою стрілкою, тоді в рівняннях всі взаємні опори приймаються зі знаком мінус.

Для даного кола рівняння за методом контурних струмів мають такий загальний вигляд:

$$\begin{cases} I_{11}R_{11} + I_{22}R_{12} = E_{11}, \\ I_{11}R_{21} + I_{22}R_{22} = E_{22}. \end{cases} \tag{3.10}$$

Аналогічно записується система рівнянь для триконтурної схеми:

$$\begin{cases} I_{11}R_{11} + I_{22}R_{12} + I_{33}R_{13} = E_{11}, \\ I_{11}R_{21} + I_{22}R_{22} + I_{33}R_{23} = E_{22}, \\ I_{11}R_{31} + I_{22}R_{32} + I_{33}R_{33} = E_{33}, \end{cases} \tag{3.11}$$

або у вигляді матриці:

$$[R]\cdot[I] = [E], \tag{3.12}$$

де

$$[R] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}, \quad [I] = \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix}, \quad [E] = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \end{bmatrix}. \tag{3.13}$$

Розв’язуюзавши систему рівнянь за допомогою методу Крамера, одержимо контурні струми:

$$I_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{bmatrix} E_{11} & R_{12} & R_{13} \\ E_{22} & R_{22} & R_{23} \\ E_{33} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}}, \tag{3.14}$$

$$I_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{bmatrix} R_{11} & E_{11} & R_{13} \\ R_{21} & E_{22} & R_{23} \\ R_{31} & E_{33} & R_{33} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}}, \tag{3.15}$$

$$I_{33} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & E_{11} \\ R_{21} & R_{22} & E_{22} \\ R_{31} & R_{32} & E_{33} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}}. \tag{3.16}$$

Контурні струми можна виразити через алгебраїчні доповнення:

$$I_{11} = E_{11}\frac{\begin{bmatrix} R_{22} & R_{23} \\ R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}}{\Delta} + E_{22}\frac{-\begin{bmatrix} R_{12} & R_{13} \\ R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}}{\Delta} + E_{33}\frac{\begin{bmatrix} R_{12} & R_{13} \\ R_{22} & R_{23} \end{bmatrix}}{\Delta}, \tag{3.17}$$

або

$$I_{11} = E_{11}\frac{\Delta_{11}}{\Delta} + E_{22}\frac{-\Delta_{12}}{\Delta} + E_{33}\frac{\Delta_{13}}{\Delta}, \tag{3.18}$$

де Δ – головний визначник системи, Δ_{11}, Δ_{12}, Δ_{13} – алгебраїчні доповнення.

У загальному вигляді для n контурів будь-який контурний струм може бути визначений так:

$$I_{kk} = E_{11}\frac{\Delta_{k1}}{\Delta} + E_{22}\frac{-\Delta_{k2}}{\Delta} + \ldots + E_{nn}\frac{\Delta_{kn}}{\Delta}, \tag{3.19}$$

де головний визначник системи розраховується таким чином:

$$\Delta = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & . & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & . & R_{2n} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & . & R_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ R_{n1} & R_{n2} & R_{n3} & . & R_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (3.20)$$

Алгоритм розв'язання електричного кола методом контурних струмів [1].

1. Визначити кількість незалежних контурів. Скласти рівняння за методом контурних струмів. Кількість рівнянь складених за методом контурних струмів, повинна дорівнювати кількості незалежних контурів. Бажано напрямки контурних струмів задавати однаково (наприклад, за годинниковою стрілкою).

2. Визначити власні та взаємні опори контурів і контурні ЕРС.

3. Будь-яким розрахунковим методом розв'язати систему рівнянь і визначити контурні струми.

4. За знайденими контурними струмами визначити струми у вітках схеми.

Приклад. Для кола, зображеного на рис. 3.14, скласти систему рівнянь за методом контурних струмів.

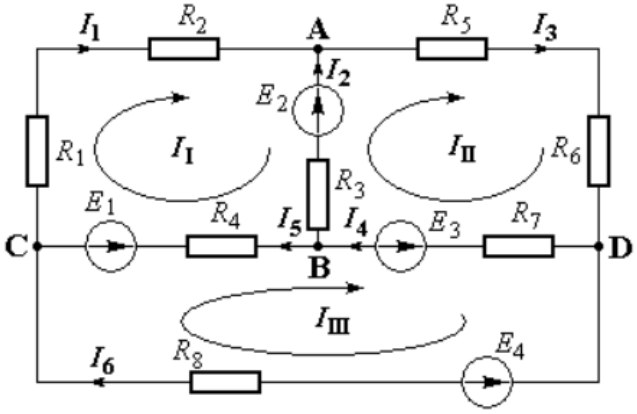


Рисунок 3.14. Схема електричного кола з позначеними контурними струмами

Виділимо у колі три незалежних контура та запишемо систему рівнянь за методом контурних струмів у загальному вигляді:

$$\begin{cases} I_{11}R_{11} + I_{22}R_{12} + I_{33}R_{13} = E_{11}, \\ I_{11}R_{21} + I_{22}R_{22} + I_{33}R_{23} = E_{22}, \\ I_{11}R_{31} + I_{22}R_{32} + I_{33}R_{33} = E_{33}. \end{cases}$$

Визначимо власні та взаємні опори контурів і контурні ЕРС:

$$R_{11} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4,$$
$$R_{22} = R_3 + R_5 + R_6 + R_7,$$

$$R_{33} = R_4 + R_7 + R_8,$$
$$R_{12} = R_{21} = -R_3,$$
$$R_{13} = R_{31} = -R_4,$$
$$R_{23} = R_{32} = -R_7,$$
$$E_{11} = -E_1 - E_2,$$
$$E_{22} = E_2 - E_3,$$
$$E_{33} = E_1 + E_3 - E_4.$$

3.4.2. Особливості методу контурних струмів при наявності у колі джерел струму

Якщо в колі є вітки, що містять ідеальні джерела струму, то контури зручно вибирати так, щоб така вітка входила лише в один контур. У цьому випадку контурний струм цього контура уже відомий – він дорівнює струмові джерела струму, і число невідомих контурних струмів зменшується.

Приклад. Розрахувати методом контурних струмів всі струми у колі рис. 4.3 з такими параметрами: *R*1=26*(Ом), R*2=10*(Ом), R*3=18*(Ом), R*4=14*(Ом), R*5=20*(Ом), R*6=8*(Ом), E*2=20*(В), E*7=24*(В), J=*2*(А).*

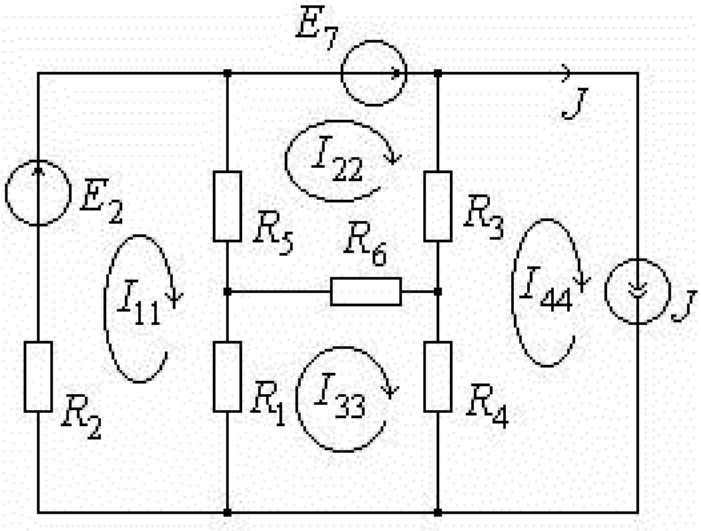


Рисунок 3.15. Схема електричного кола з позначеними контурними струмами, що містить ідеальне джерело електрорушійної сили

У колі чотири незалежних контури. За методом контурних струмів потрібно скласти три рівняння, оскільки контурний струм I_{44}=J відомий. Запишемо систему рівнянь за методом контурних струмів у загальному вигляді:

$$\begin{cases} I_{11}R_{11} + I_{22}R_{12} + I_{33}R_{13} + I_{44}R_{14} = E_{11}, \\ I_{11}R_{21} + I_{22}R_{22} + I_{33}R_{23} + I_{44}R_{24} = E_{22}, \\ I_{11}R_{31} + I_{22}R_{32} + I_{33}R_{33} + I_{44}R_{34} = E_{33}. \end{cases}$$

Власні контурні опори:

$$R_{11} = R_1 + R_2 + R_5 = 26 + 10 + 20 = 56\ (Ом),$$
$$R_{22} = R_5 + R_3 + R_6 = 20 + 18 + 8 = 46\ (Ом),$$
$$R_{33} = R_1 + R_6 + R_4 = 8 + 14 + 26 = 48\ (Ом).$$

Спільні контурні опори при протилежних напрямках контурних струмів у вітці – від'ємні:

$$R_{12} = R_{21} = -R_5 = -20\ (Ом),$$
$$R_{13} = R_{31} = -R_1 = -26\ (Ом),$$
$$R_{14} = R_{41} = 0\ (Ом),$$
$$R_{23} = R_{32} = -R_6 = -8\ (Ом),$$
$$R_{24} = R_{42} = -R_3 = -18\ (Ом),$$
$$R_{34} = R_{43} = -R_4 = -14\ (Ом).$$

Знайдемо контурні ЕРС:

$$E_{11} = E_2 = 20\ \ (B),$$
$$E_{22} = E_7 = 24\ \ (B),$$
$$E_{33} = 0\ \ (B).$$

Підставимо ці значення у початкову систему рівнянь:

$$\begin{cases} 56I_{11} - 20I_{22} - 26I_{33} = 20, \\ -20I_{11} + 46I_{22} - 8I_{33} - 18 \cdot 2 = 24, \\ -26I_{11} - 8I_{22} + 48I_{33} - 14 \cdot 2 = 0. \end{cases}$$

Або після спрощення:

$$\begin{cases} 56I_{11} - 20I_{22} - 26I_{33} = 20, \\ -20I_{11} + 46I_{22} - 8I_{33} = 60, \\ -26I_{11} - 8I_{22} + 48I_{33} = 28. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему рівнянь за допомогою методу Крамера:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 56 & -20 & -26 \\ -20 & 46 & -8 \\ -26 & -8 & 48 \end{bmatrix} = 61448,$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 20 & -20 & -26 \\ 60 & 46 & -8 \\ 28 & -8 & 48 \end{bmatrix} = 150998,$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 56 & 20 & -26 \\ -20 & 60 & -8 \\ -26 & 28 & 48 \end{bmatrix} = 171184,$$

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} 56 & -20 & 20 \\ -20 & 46 & 60 \\ -26 & -8 & 28 \end{bmatrix} = 146128.$$

Знайдемо контурні струми:

$$I_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{150928}{61448} = 2{,}456 \ (A),$$
$$I_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{171184}{61448} = 2{,}785 \ (A),$$
$$I_{33} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{146128}{61448} = 2{,}378 \ (A).$$

Всі контурні струми додатні, а, отже, їх дійсні напрямки співпадають із вибраними.

Знайдемо струми віток, як алгебраїчні сумам контурних струмів, що протікають у вітках.

$$I_1 = I_{11} - I_{33} = 2{,}456 - 2{,}378 = 0{,}078 \ (A),$$
$$I_2 = I_{11} = 2{,}456 \ (A),$$
$$I_3 = I_{22} - I_{44} = 2{,}786 - 2 = 0{,}786 \ (A),$$
$$I_4 = I_{33} - I_{44} = 2{,}378 - 2 = 0{,}378 \ (A),$$
$$I_5 = I_{22} - I_{11} = 2{,}786 - 2{,}456 = 0{,}33 \ (A),$$
$$I_6 = I_{22} - I_{33} = 2{,}786 - 2{,}378 = 0{,}408 \ (A),$$
$$I_7 = I_{22} = 2{,}786 \ (A).$$

3.5. Метод вузлових потенціалів

3.5.1. Суть та основні підходи

Коли електричне коло складається з великої кількості контурів при невеликій кількості вузлів, його розрахунок і аналіз доцільно здійснювати методом вузлових потенціалів (або методом вузлових напруг).

Якщо кількість вузлів в схемі *n*, то кількість рівнянь, необхідних для розрахунку такого кола дорівнює (n – 1). Невідомими величинами в цих рівняннях є так звані *вузлові потенціали*. У відповідності з цим методом потенціал в одному з вузлів схеми приймають рівним нулю. Інші вузли схеми будуть мати по-

тенціали (вузлові напруги U_1, U_2, …, U_{n-1}) відносно до вузла із нульовим потенціалом.

Струм у кожній вітці схеми визначається напругами, прикладеними до вузлів вітки, наявними у них ЕРС і опорами віток.

Далі, використовуючи вирази для струмів, складають рівняння за другим законом Кірхгофа для кожного вузла схеми, за винятком вузла з нульовою напругою. Сукупність таких рівнянь утворює систему рівнянь відносно до невідомих вузлових напруг.

При складанні рівняння для будь–якого ***i*** –го вузла можна скористатись вже готовою універсальною формулою:

$$\phi_i \sum_{\substack{j=1 \\ j=i}}^{n} \frac{1}{R_{ij}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(\varphi_j \frac{1}{R_{ij}} \right) = \sum_{\substack{j=1 \\ j=i}}^{n} \left(E_{ij} \frac{1}{R_{ij}} \right), \qquad (3.21)$$

за якою:

добуток вузлового потенціалу в *i*-тому вузлі на суму провідностей віток між *i*-тим і кожним з сусідніх з *i*-тим вузлами, мінус сума добутків вузлових потенціалів в кожному сусідньому з *i*-тим вузлі на провідність вітки між цим вузлом та *i*-тим, дорівнює сумі добутків ЕРС у вітці між *i*-тим і кожним сусіднім з *i*-тим вузлі (якщо вона є у цій вітці), на провідність цієї вітки.

Складові E_{ij} беруться зі знаком “+”, якщо ЕРС направлена до *i*–го вузла і зі знаком “–”, якщо вона направлена від *i*-го вузла.

Розв’язавши систему відносно φ_i, можна визначити струми у вітках.

Розглянемо розрахунок електричного кола за цим методом на прикладі схеми, наведеної на рис. 3.16:

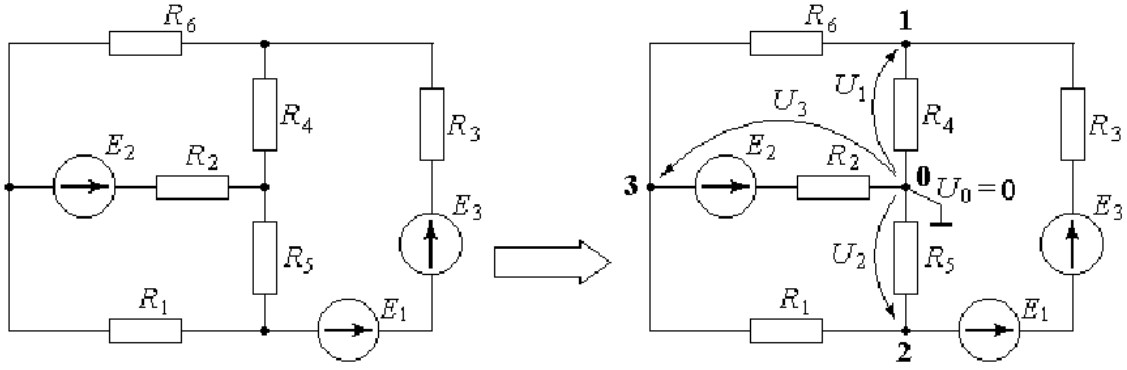


Рисунок 3.16. Схема електричного кола з додатковими позначеннями для розрахунку за методом вузлових потенціалів

Довільно пронумеруємо вузли схеми, починаючи з нуля. Потенціал у вузлі № 0 приймаємо рівним нулю. Використовуючи наведену формулу, складаємо рівняння для інших вузлів:

- для вузла № 1: $\varphi_1 \left(\frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3} \right) - \varphi_2 \frac{1}{R_3} - \varphi_3 \frac{1}{R_6} = (E_1 + E_3) \frac{1}{R_3};$

- для вузла № 2: $-\varphi_1\frac{1}{R_3}+\varphi_2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_3}\right)-\varphi_3\frac{1}{R_1}=\left(-E_1-E_3\right)\frac{1}{R_3};$

- для вузла № 3: $-\varphi_1\frac{1}{R_6}-\varphi_2\frac{1}{R_1}+\varphi_3\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_6}\right)=-E_2\frac{1}{R_2}.$

Враховуючи наступні співвідношення:

$$Y=\frac{1}{R}, \tag{3.23}$$

$$I=E\frac{1}{R}, \tag{3.24}$$

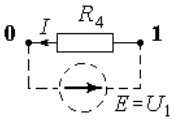
формула (3.21) може бути записаною у вигляді такої узагальненої системи рівнянь:

$$\begin{cases}\phi_1 Y_{11}-\phi_2 Y_{12}-\ldots-\phi_n Y_{1n}=I_{11},\\ -\phi_1 Y_{21}+\phi_2 Y_{22}-\ldots-\phi_n Y_{2n}=I_{22},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ -\phi_1 Y_{n1}-\phi_2 Y_{n2}-\ldots+\phi_n Y_{nn}=I_{nn},\end{cases} \tag{3.25}$$

де Y_{ii} – власна провідність і-го вузла, визначається як сума провідностей віток, що під'єднані до цього вузла; Y_{ij} – спільна провідність і-го та j-го вузлів, визначається як сума провідностей віток, що одночасно підєднані до і-го та j-го вузлів; I_{ii} – власний струм і-го вузла, визначається як сума добутків ЕРС на провідність активних віток, що під'єднані до і-го вузла (у випадку, коли ЕРС напрямлена до і-го вузла, її напрямок вважається додатнім, у іншому випадку – від'ємним).

Після розв'язання системи рівнянь відносно невідомих φ_1, φ_2, φ_3, тобто з'ясування їхніх значень, розраховуємо струми у вітках. Для цього розглянемо кожну вітку окремо.

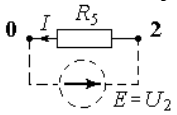
- Вітка з вузлами 0 – 1.



Дія прикладеної до вузлів напруги $U_1=\varphi_1-\varphi_4$ рівноцінна дії включеної ЕРС $E=U_1$. Для такого штучно утвореного контура складається рівняння за другим законом Кірхгофа $IR_4 = U_1$. З якого: $I = U_1/ R_4$.

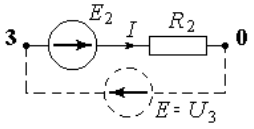
Аналогічно для інших віток.

- Вітка з вузлами 0 – 2.



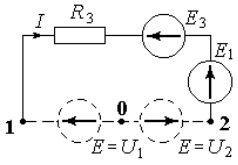
$U_2=\varphi_2 - \varphi_4 \quad IR_5 = U_2 \quad \Rightarrow\ I = U_2 / R_5.$

- Вітка з вузлами 0 – 3.



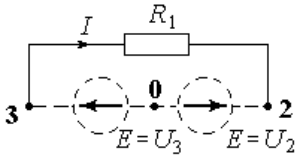
$U_3 = \varphi_3 - \varphi 4 \quad IR_2 = E_2 + U_3 \quad \Rightarrow \quad I = (E_2 + U_3) / R_5.$

- Вітка з вузлами 1 – 2.



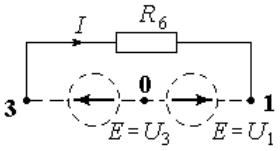
$IR_3 = -E_3 - E_1 - U_2 + U_1 \quad \Rightarrow \quad I = (-E_3 - E_1 - U_2 + U_1) / R_3.$

- Вітка з вузлами 2 – 3.



$IR_1 = -U_2 + U_3 \quad \Rightarrow \quad I = (-U_2 + U_3) / R_1.$

- Вітка з вузлами 1 – 3.



$IR_6 = -U_1 + U_3 \quad \Rightarrow \quad I = (-U_1 + U_3) / R_6.$

Алгоритм розв'язання електричного кола методом вузлових потенціалів [1].

1. Прийняти за нуль потенціал одного із вузлів (заземлити).
2. Скласти рівняння за методом вузлових потенціалів. Кількість рівнянь дорівнює кількості вузлів, що залишилися.
3. Будь-яким розрахунковим методом розв'язати систему рівнянь і визначити потенціали вузлів.
4. За знайденими вузловими потенціалами визначити струми у вітках схеми.

Приклад. Для кола, зображеного на рис. 3.17, скласти систему рівнянь за методом вузлових потенціалів.

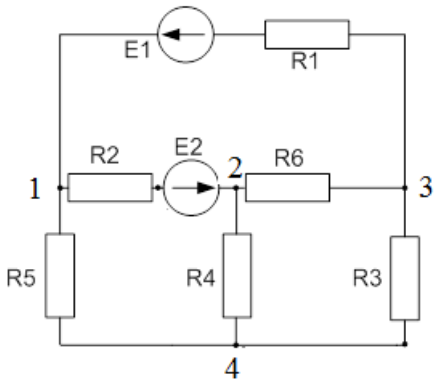


Рисунок 3.17. Схема електричного кола

Заземлимо вузол 4 та запишемо систему рівнянь за методом вузлових потенціалів у загальному вигляді:

$$\begin{cases} \varphi_1 Y_{11} - \varphi_2 Y_{12} - \varphi_3 Y_{13} = I_{11}, \\ -\varphi_2 Y_{21} + \varphi_2 Y_{22} - \varphi_2 Y_{23} = I_{22}, \\ -\varphi_1 Y_{31} - \varphi_2 Y_{32} + \varphi_3 Y_{33} = I_{33}. \end{cases}$$

Визначимо власні та спільні провідності вузлів та вузлові струми.

$$Y_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5},$$

$$Y_{22} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6},$$

$$Y_{33} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_6},$$

$$Y_{12} = Y_{21} = \frac{1}{R_2},$$

$$Y_{13} = Y_{31} = \frac{1}{R_1},$$

$$Y_{23} = Y_{32} = \frac{1}{R_6},$$

$$I_{11} = E_1 \frac{1}{R_1} - E_2 \frac{1}{R_2},$$

$$I_{22} = E_2 \frac{1}{R_2},$$

$$I_{33} = -E_1 \frac{1}{R_i}.$$

3.5.2. Особливості методу вузлових потенціалів за наявності ідеальних джерел напруги і струму

Якщо між двома вузлами існує вітка, що містить ідеальну ЕРС E (рис. 3.18), то при заземленні одного з цих вузлів (наприклад, вузла 4), тобто вважаючи що $\varphi_4 = 0$, легко знайти потенціал вузла 3, оскільки $\varphi_3 - \varphi_4 = E$, і звідси $\varphi_3 = E$.

Таким чином, кількість невідомих потенціалів стала меншою на одиницю і для цієї схеми треба скласти систему лише з двох рівнянь, залишаючи в лівій частині складову з відомим потенціалом φ_3.

$$\begin{cases} \varphi_1 Y_{11} - \varphi_2 Y_{12} - \varphi_3 Y_{13} = I_{11}, \\ -\varphi_2 Y_{21} + \varphi_2 Y_{22} - \varphi_2 Y_{23} = I_{22}. \end{cases} \qquad (3.26)$$

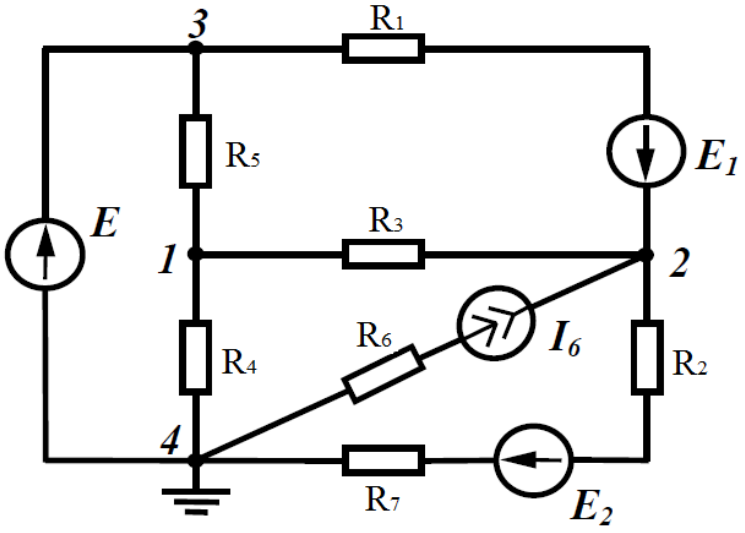


Рисунок 3.18. Схема електричного кола, що містить ідеальне джерело струму

При знаходженні власних та спільних провідностей в цій системі варто врахувати, що у вітці 6 міститься ідеальне джерело струму. Як вказувалося раніше, струм в цій вітці дорівнює струму джерела струму I_6, а внутрішній опір ідеального джерела струму нескінченно великий, тому провідність цієї вітки $Y_6 = 0$.

З урахуванням цього запишемо коефіцієнти лівої частини рівняння.

$$Y_{11} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5},$$

$$Y_{22} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2 + R_7},$$

$$Y_{12} = Y_{21} = \frac{1}{R_3},$$

$$Y_{13} = Y_{31} = \frac{1}{R_5},$$

$$Y_{23} = Y_{32} = \frac{1}{R_1},$$

$$I_{11} = 0,$$

$$I_{22} = E_1 \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2 + R_7} + I_6.$$

Нумерацію вузлів у цьому випадку зручно проводити таким чином, щоб вузли, які примикають до вітки лише з однією ідеальною ЕРС, позначались останніми за порядком числами.

Приклад. Для заданої на рис 3.19 схеми з параметрами:

E = 100 В, E_1 = 100 В, E_4 = 30 В, I_5 = 7,5 А, r_1 = 4 Ом, r_2 = 5Ом,

r_3 = 10 Ом, r_4 = 4 Ом, r_5 = 16 Ом, r_6 = 20 Ом, r_7 = 6 Ом,

знайти методом вузлових потенціалів струми в усіх вітках кола.

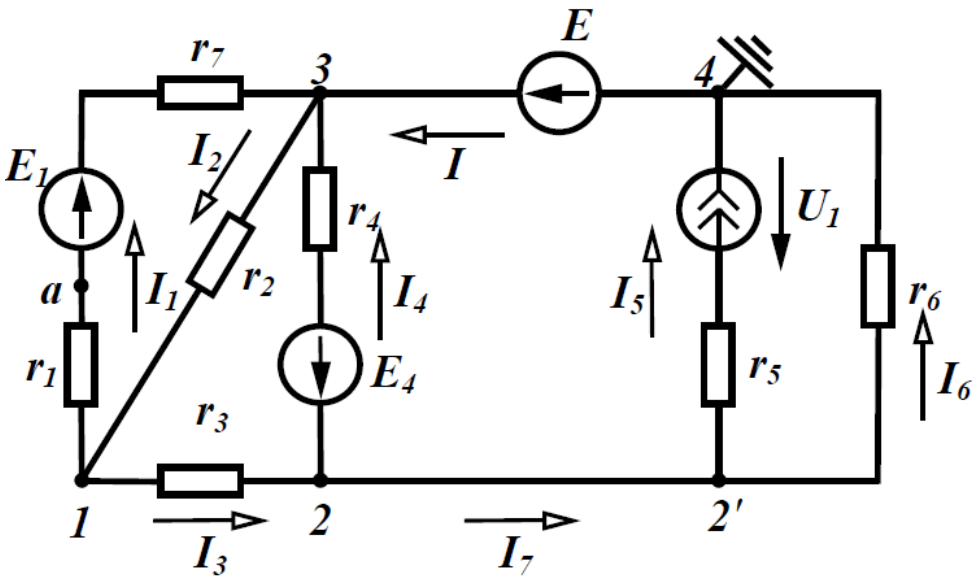


Рисунок 3.19. Схема електричного кола, що містить ідеальне джерело струму

Оберемо довільно напрямки струмів у вітках (рис. 3.19), визначимо кількість вузлів та пронумеруємо їх.

У цій схемі маємо 5 вузлів, але оскільки у вітці, що з'єднує вузли 2 та 2', відсутні опори, то потенціали цих вузлів однакові і при складанні системи рівнянь ці два вузли можна вважати одним вузлом. Вузол 2' називають *таким, що може бути вилученим*.

Якщо заземлити вузол 4 ($\varphi_4 = 0$), то потенціал вузла $\varphi_3 = E$. В такому випадку у схемі залишається лише два невідомих потенціали φ_1 та φ_2.

Запишемо систему рівнянь для їх знаходження в загальному вигляді:

$$\begin{cases} \varphi_1 Y_{11} - \varphi_2 Y_{12} - \varphi_3 Y_{13} = I_{11}, \\ -\varphi_1 Y_{21} + \varphi_2 Y_{22} - \varphi_3 Y_{23} = I_{22}. \end{cases}$$

Знайдемо числові коефіцієнти, що входять в систему:

$$Y_{11} = \frac{1}{r_1 + r_7} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{4+6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = 0{,}4\ (См),$$

$$Y_{22} = \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_6} = \frac{1}{10} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20} = 0{,}4\ (См),$$

$$Y_{12} = Y_{21} = \frac{1}{r_3} = \frac{1}{10} = 0{,}1\ (См),$$

$$Y_{13} = Y_{31} = \frac{1}{r_1 + r_7} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{4+6} + \frac{1}{5} = 0{,}3\ (См),$$

$$Y_{23} = Y_{32} = \frac{1}{r_4} = \frac{1}{4} = 0{,}25 \ (См),$$

$$I_{11} = -E_1 \frac{1}{r_1 + r_7} = -100 \frac{1}{4+6} = -10 \ (A),$$

$$I_{22} = E_4 \frac{1}{r_4} - I_5 = 30 \frac{1}{4} - 7{,}5 = 0 \ (A).$$

Таким чином, система рівнянь може бути записаною в такому вигляді:

$$\begin{cases} 0{,}4 \cdot \varphi_1 - 0{,}1 \cdot \varphi_2 - 0{,}3 \cdot 100 = -10, \\ -0{,}1 \cdot \varphi_1 + 0{,}4 \cdot \varphi_2 - 0{,}25 \cdot 100 = 0, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} 0{,}4 \cdot \varphi_1 - 0{,}1 \cdot \varphi_2 = 20, \\ -0{,}1 \cdot \varphi_1 + 0{,}4 \cdot \varphi_2 = 25. \end{cases}$$

Розв’язуючи цю систему, отримуємо $\varphi_1 = 70$ В, $\varphi_2 = 80$ В.

За відомими потенціалами вузлів знаходимо струми у вітках:

$$I_1 = (\varphi_1 - \varphi_3 + E_1) \frac{1}{r_1 + r_7} = (70 - 100 + 100) \frac{1}{4+6} = 7 \ (A),$$

$$I_2 = (\varphi_3 - \varphi_1) \frac{1}{r_2} = (100 - 70) \frac{1}{5} = 6 \ (A),$$

$$I_3 = (\varphi_1 - \varphi_2) \frac{1}{r_3} = (70 - 80) \frac{1}{10} = -1 \ (A),$$

$$I_4 = (\varphi_2 - \varphi_3 - E_4) \frac{1}{r_4} = (80 - 100 - 30) \frac{1}{4} = -12{,}5 \ (A),$$

$$I_5 = 7{,}5 \ (A),$$

$$I_6 = (\varphi_2 - \varphi_4) \frac{1}{r_6} = (80 - 0) \frac{1}{20} = 4 \ (A).$$

3.6. Метод еквівалентного генератора (активного двополюсника)

3.6.1. Основні визначення

Двополюсник – схема, що має два виводи, до яких може підключатись джерело чи споживач електричної енергії.

Пасивний двополюсник двополюсник, в якому відсутні джерела енергії, можна замінити одним еквівалентним опором (рис. 3.20(а)).

Активний двополюсник – вміщує в собі джерела електричної енергії. Він проявляє себе наявністю напруги на розімкнених затискачах, яка називається напругою холостого ходу.

Активний двополюсник можна замінити еквівалентним генератором (рис.3.20(б)).

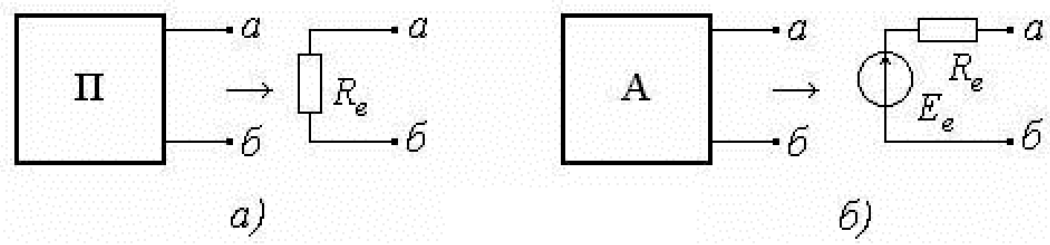
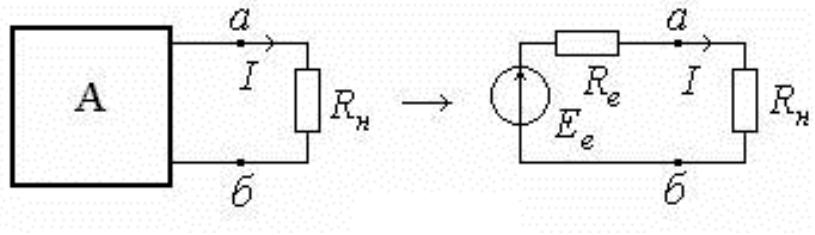


Рисунок 3.20. Двополюсник та його найпростіша еквівалентна схема заміщення: а) пасивного двополюсника; б) активного двополюсника

3.6.2. Теорема про активний двополюсник

Струм у вітках а, б електричного кола не зміниться, якщо активний двополюсник (рис.3.21(а)), до якого під'єднана дана вітка, замінити еквівалентним джерелом напруги (еквівалентним генератором), ЕРС якого дорівнює напрузі розриву на полюсах активного двополюсника, а внутрішній опір ЕРС дорівнює вхідному опору відносно полюсів а, б пасивного двополюсника, одержаного із даного активного двополюсника при видаленні із нього джерел енергії (рис. 3.21(б)).



а) б)

Рисунок 3.21. Схема електричного кола: а) з активним двополюсником; б) з активним двополюсником, заміненим на його еквівалентну схему заміщення

Алгоритм розрахунку електричного кола методом еквівалентного генератора.

1. Відключити вітку, в якій визначається струм, відмітивши точками *а, б* місця відключення.

2. Будь-яким із відомих методів розрахувати схему, що залишилася (режим розриву активного двополюсника) і визначити напругу $U_{аб}$ між точками *а, б*, до яких була підключена вітка.

3. Видалити зі схеми джерела енергії, замінивши їх внутрішніми опорами, визначити вхідний опір $R_{вх}$ відносно точок *а, б*.

4. Визначити струм у вітці за формулою:

$$I = \frac{U_{аб}}{R_{вх} + R_н} = \frac{E_e}{R_e + R_н}. \qquad (3.27)$$

5. Якщо у вітці, струм якої розраховується, є джерело ЕРС рис. 3.22(*а)*, то розрахунок ведеться за формулою:

$$I = \frac{U_{аб} \pm E}{R_{вх} + R_н} = \frac{E_е \pm E}{R_е + R_н}. \qquad (3.28)$$

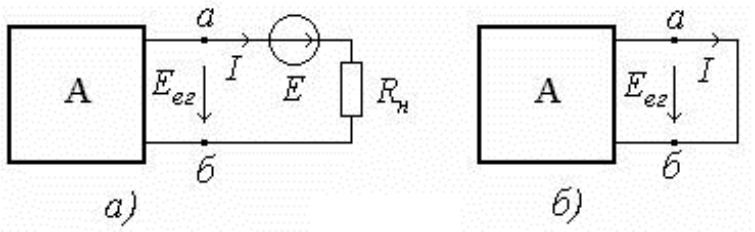


Рисунок 3.22. Схема електричного кола з активним двополюсником та: а) віткою з джерелом ЕРС; б) віткою з нескінченною провідністю

6. Якщо у вітці, що розраховується, відсутні опір і ЕРС (КЗ) рис. 3.22(б), то:

$$I = \frac{U_{аб}}{R_{вх}} = \frac{E_е}{R_е}. \qquad (3.29)$$

Приклад. Визначити струм I_5 у схемі, рис. 3.23(а).

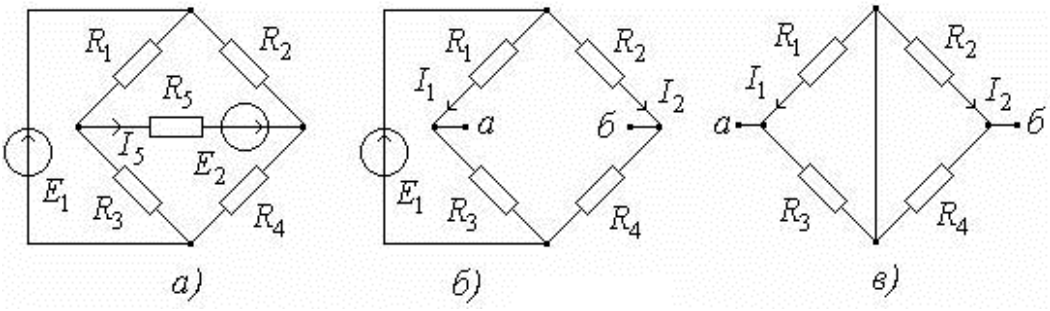


Рисунок 3.23. Проміжні схеми для розрахунку струму за методом еквівалентного генератора

1. Відключається вітка зі струмом I_5 (рис. 3.23(б)).

2. Розраховується схема, що залишилася (режим розриву активного двополюсника) і визначається напруга $U_{аб}$ між точками *а, б*, до яких була під'єднана вітка.

$$U_{аб} = E_е = -I_1R_1 + I_2R_2 = -\frac{E_1R_1}{R_1 + R_3} + \frac{E_1R_2}{R_2 + R_4} = \frac{E_1(R_2(R_1 + R_3) - R_1(R_2 + R_4))}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}.$$

Після спрощення виразу одержуємо:

$$U_{аб} = E_е = \frac{E_1(R_2R_3 - R_1R_4)}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}.$$

Очевидно, якщо $R_2R_3 = R_1R_4$, то $E_e = 0,$ (мостова схема врівноваження)

3. Видаляється із схеми E_2, замінюючи її внутрішнім опором (закоротка), визначається вхідний опір $R_{вх}$ відносно до точок а, б, рис.3.23(в). Опори R_1 і R_3, R_2 і R_4 з'єднані паралельно, а між собою – послідовно.

$$R_{вх} = \frac{R_1R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2R_4}{R_2 + R_4}.$$

4. Струм I_5 визначається за формулою:

$$I_5 = \frac{U_{аб} + E_2}{R_{вх} + R_5} = \frac{E_e + E_2}{R_e + R_5}.$$

Контрольні запитання до розділу 3

1. Як розрахувати опір двох послідовно з'єднаних резисторів?
2. Як розрахувати опір двох паралельно з'єднаних резисторів?
3. Що розуміють під з'єднанням «трикутник» і «зірка»?
4. Як розрахувати опори еквівалентної зірки за відомими опорами еквівалентного трикутника?
5. Як розрахувати опори еквівалентного трикутника за відомими опорами еквівалентної зірки?
6. Яка кількість рівнянь складається для розрахунку електричного кола за першим законом Кірхгофа?
7. Яка кількість рівнянь складається для розрахунку електричного кола без джерел струму за другим законом Кірхгофа?
8. Яка кількість рівнянь складається для розрахунку електричного кола із джерелами струму за другим законом Кірхгофа?
9. Скільки рівнянь необхідно скласти для кола, визначаючи струми в вітках методом контурних струмів?
10. Запишіть у загальному випадку систему рівнянь для розрахунку контурних струмів.
11. Назвіть алгоритм розв'язання електричного кола методом контурних струмів.
12. Як впливає наявність у колі ідеального джерела струму на розрахунок кола за методом контурних струмів?
13. У чому полягає перевага методу контурних струмів порівняно з методом законів Кірхгофа?
14. Скільки рівнянь необхідно скласти для кола, визначаючи струми у вітках методом вузлових потенціалів?
15. Запишіть у загальному випадку систему рівнянь для розрахунку вузлових потенціалів.

16. Назвіть алгоритм розв’язання електричного кола методом вузлових потенціалів.

17. Як впливає наявність у колі ідеального джерела ЕРС на розрахунок кола за методом вузлових потенціалів?

18. У чому полягає перевага методу вузлових потенціалів порівняно з методом законів Кірхгофа?

19. Чому дорівнює ЕРС еквівалентного генератора?

20. Що називається двополюсником?

21. Чому дорівнює еквівалентний внутрішній опір еквівалентного генератора?

22. Назвіть алгоритм розрахунку невідомого струму методом еквівалентного генератора.

23. Які особливості розрахунку невідомого струму методом еквівалентного генератора при наявності у вітці з невідомим струмом власного ЕРС?

24. Які особливості розрахунку невідомого струму методом еквівалентного генератора при відсутності у вітці з невідомим струмом опору і ЕРС (КЗ)?

4. ПОНЯТТЯ ЗМІННОГО СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

4.1. Основні поняття і співвідношення

Якщо напруги і струми в електричному колі не змінюють своїх значень протягом часу, то вони називаються *постійними* і позначаються літерами U та I. Напруги і струми, що змінюються за величиною та (або) напрямком, називаються *змінними*, характеризуються *миттєвими* значеннями, тобто їх значеннями в будь-який момент часу t, і позначаються літерами *u* та *i*.

Для *періодичного змінного струму* (*periodic alternating current*) виконується умова $i(t)=i(t+T)$.

Цикл зміни струму повторюється через інтервал часу *T*, який називається *періодом* (*period*). Величина, обернена періоду, тобто кількість періодів струму за секунду називається *частотою* (*frequency*) [4]:

$$f=\frac{1}{T}, \tag{4.1}$$

і вимірюється в герцах [Гц]. Стандартна частота в енергетичних системах України $f=50$ Гц.

Форми зміни струмів та напруг в часі, які зустрічаються при використанні електричної енергії, можуть бути різними. Але переважною формою напруг та струмів в електричних колах є синусоїдна функція часу.

Синусоїдний струм (*sinusoidal current*) описується виразом:

$$i=I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\alpha\right), \tag{4.2}$$

де i – *миттєве значення струму*, тобто значення струму в будь-який момент часу;

I_m – *амплітудне* або *максимальне* значення;

$\left(\frac{2\pi}{T}+\alpha\right)$ – *фаза коливань*;

$\frac{2\pi}{T}=\omega$ – *кутова (циклічна) частота*, яка визначає швидкість зміни фази, вимірюється в радіанах за секунду [рад/с];

α – значення фази при t=0, *початкова фаза* (*initial phase*).

Графіки синусоїдного струму (4.2) і напруги $u=U_m \sin(\omega t+\beta)$ показані на рис. 4.1.

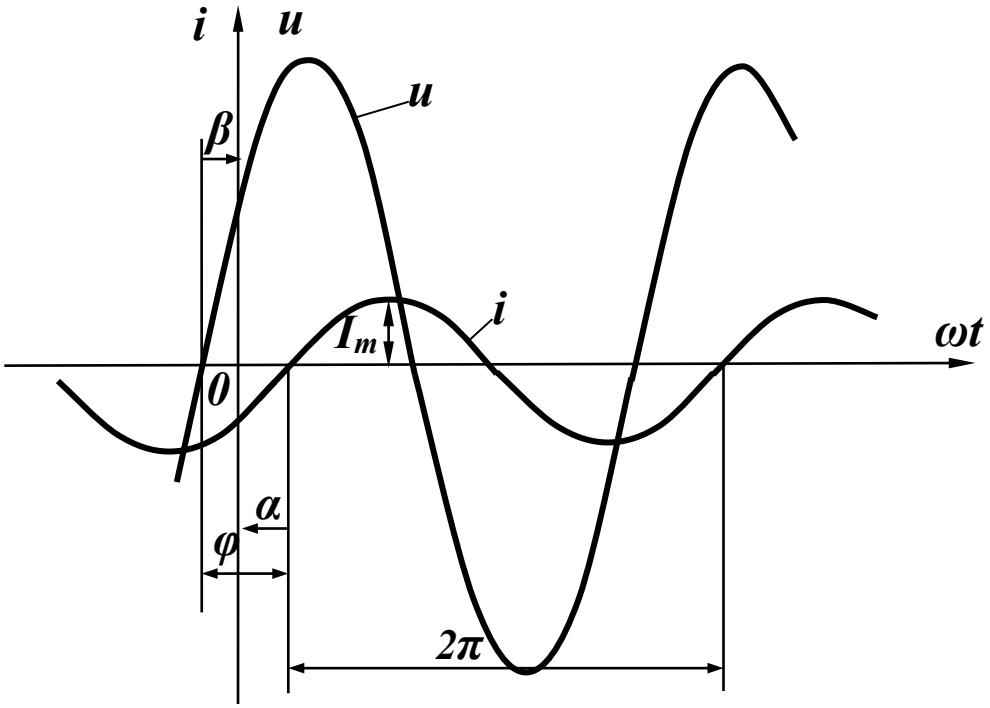


Рисунок 4.1. Хвильова діаграма струму і напруги

Початкова фаза завжди відраховується від початку синусоїди (на висхідній ділянці) до початку координат (на рис. 4.1 $\beta > 0$, $\alpha < 0$).

Враховуючи (4.1), отримаємо:

$$\omega = 2\pi f \,. \tag{4.3}$$

Якщо напруга і струм мають різні початкові фази, то вважають, що вони зсунуті за фазою на кут:

$$\varphi = \beta - \alpha \,, \tag{4.4}$$

який називається *кутом зсуву фаз*.

Якщо $\varphi > 0$ (як на рис. 4.1), то напруга *випереджає* струм або струм *відстає* за фазою від напруги. Якщо початкові фази двох синусоїд однакові ($\beta = \alpha$), то припускають, що напруга та струм *збігаються* за фазою, а якщо $\beta - \alpha = \pm\pi$, тобто синусоїди зсунуті за фазою на половину періоду, то визнають, що ці синусоїди знаходяться у *протифазі*.

4.2. Діюче значення змінного струму

Змінні струми в загальному випадку можуть значно відрізнятися за частотою і формою.

Струми можуть мати однакові частоту і амплітуду, але значно відрізнятися за формою. Очевидно, що їх теплова дія або механічний вплив на сусідні провідники будуть різними, тому необхідне введення відповідного критерію, який

міг би кількісно характеризувати дію змінного струму. Таким критерієм, звичайно, вважають теплову дію струму, а величину, яка характеризує цю дію, називають *діючим* значенням змінного струму *i*.

Діюче значення змінного струму дорівнює такому еквівалентному постійному струму, який, протікаючи через опір r за період T, виділяє стільки ж енергії, як і змінний струм.

Діюче значення змінного струму:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt}, \tag{4.5}$$

є середньоквадратичним значенням змінного струму за період.

Для змінного синусоїдного струму $i = I_m \sin(\omega t + \alpha)$:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t + \alpha)\,dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \tag{4.6}$$

Можна показати, що діючі значення синусоїдної напруги або ЕРС дорівнюють:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}. \tag{4.7}$$

4.3. Зображення синусоїдних функцій векторними величинами

Графічне зображення синусоїдних функцій зазвичай називають *хвильовою діаграмою* (*wave diagramme*). Якщо на одній діаграмі зображено більше, як дві синусоїдні функції, втрачається наочність і важко здійснювати графічне додавання двох або більше функцій. Тому вдаються до зображення синусоїдних функцій векторними величинами, що значно покращує наочність і спрощує операцію додавання.

Нехай маємо синусоїдний струм $i = I_m \sin(\omega t + \alpha)$.

Виберемо прямокутну систему координат (рис. 4.2) і відкладемо з початку координат під кутом α до горизонтальної осі вектор, довжина якого у вибраному масштабі дорівнює I_m.

Проекція цього вектора на вертикальну вісь $y_0 = I_m \sin\alpha$.

Примусимо обертатися вектор I_m із кутовою швидкістю ω проти годинникової стрілки. В момент часу t_1 вектор буде займати положення ***1*,** а його проекція на вертикальну вісь $y_1 = I_m \sin(\omega t_1 + \alpha)$.

При безперервному обертанні проекція вектора I_m на вертикальну вісь змінюється за синусоїдним законом $y = I_m \sin(\omega t + \alpha)$.

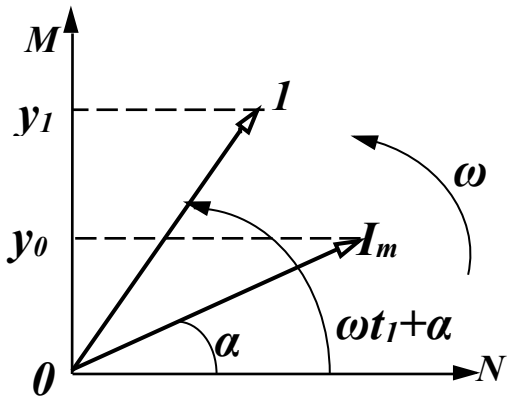


Рисунок 4.2. Векторне відображення гармонічного струму

Вектор, що обертається, характеризує синусоїдну функцію в тому розумінні, що в будь-який момент часу амплітуда і фаза цієї функції відомі. Якщо є дві синусоїдні функції часу однієї частоти $u = U_m \sin(\omega t + \beta)$, $i = I_m \sin(\omega t + \alpha)$, то вони також можуть бути зображені векторами (рис. 4.3).

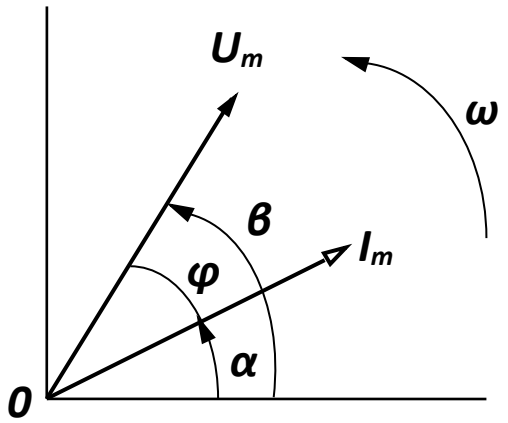


Рисунок 4.3. Векторне відображення системи гармонічних струму та напруги

Оскільки ці вектори обертаються з однаковою кутовою швидкістю ω, то в будь-який момент часу їх положення один відносно одного незмінне. Між ними завжди зберігається кут $\varphi = \beta - \alpha$.

Якщо синусоїдна функція повністю характеризується амплітудою і початковою фазою при відомій частоті, то початкове положення векторів повністю визначає синусоїдні функції і немає потреби зображати ці вектори такими, що обертаються. Векторне зображення дає наочну картину взаємного розташування амплітуд синусоїдних функцій і дозволяє легко проводити прості операції векторного додавання і віднімання.

Сукупність векторів, які характеризують струми і напруги в електричному колі, називається *векторною діаграмою* (*vector diagramme*).

Оскільки для одного будь-якого вектора початкова фаза може бути прийнята такою, що дорівнює нулю, то на векторній діаграмі можна не вказувати систему координат. Якщо величину векторів I_m, U_m зменшити в $\sqrt{2}$ разів, то можна відкладати у вигляді векторів діюче значення.

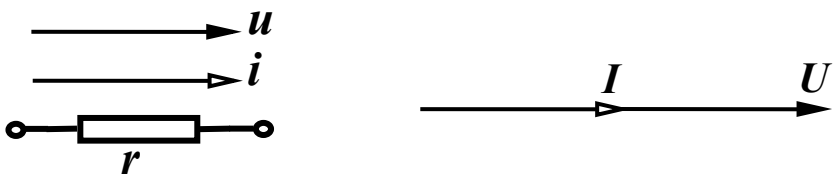
4.4. Синусоїдний струм в пасивних елементах електричного кола

Головною метою цього підрозділу є визначення форми і параметрів напруги на пасивних елементах кола при протіканні по них синусоїдного струму. Вважаємо, що по всіх елементах протікає струм: $i = I_m \sin(\omega t + \alpha)$.

Резистивний елемент

Для резистивного елемента (рис. 4.4(*а*)) відоме компонентне співвідношення, тому:

$$u = ri = rI_m \sin(\omega t + \alpha). \tag{4.8}$$



а) *б)*

Рисунок 4.4. Резистивний елемент: а) умовне зображення; б) векторна діаграма струму та напруги

Отже, напруга на резисторі при синусоїдному струмі також синусоїдна, тобто загалом має вигляд:

$$u = U_m \sin(\omega t + \beta). \tag{4.9}$$

Звідси амплітудне значення напруги визначається із порівняння (4.8) і (4.9):

$$U_m = rI_m. \tag{4.10}$$

Розділивши обидві частини рівняння (4.10) на $\sqrt{2}$, маємо:

$$U = rI. \tag{4.11}$$

Таким чином, для амплітудних і діючих значень струму та напруги справедливий закон Ома.

Порівнюючи у виразах (4.8) і (4.9) початкові фази, виявляємо, що в резистивному елементі $\beta = \alpha$, тобто струм і напруга на резисторі *збігаються за фазою*. Векторна діаграма струму і напруги для резистора показана на рис. 4.4(*б*).

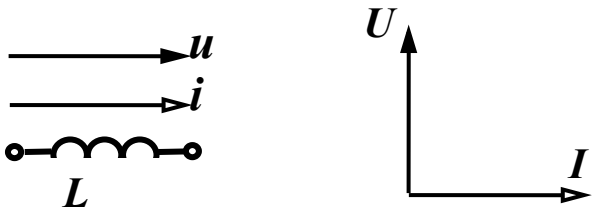
Середнє значення потужності за період $P = \frac{1}{T}\int_0^T uidt$ називається *активною потужністю* (*active power*) вимірюється у ватах (Вт) і дорівнює

$$P = \frac{U_m I_m}{2} = UI. \tag{4.12}$$

Індуктивний елемент

В індуктивному елементі (рис. 4.5(*а*)) співвідношення між струмом і напругою $u_L = L\frac{di}{dt}$, тому:

$$u = L\frac{d\left[I_m \sin\left(\omega t + \alpha\right)\right]}{dt} = L\omega I_m \cos\left(\omega t + \alpha\right) = \omega L I_m \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right). \tag{4.13}$$



а) *б)*

Рисунок 4.5. Індуктивність: а) умовне зображення; б) векторна діаграма струму та напруги

Порівнюючи (4.9) і (4.13), визначаємо:

$$U_m = \omega L I_m. \tag{4.14}$$

Величина ωL має розмірність опору. Назвемо її *індуктивним опором* (*inductive resistance*) і позначимо:

$$x_L = \omega L. \tag{4.15}$$

Величина, обернена індуктивному опору, називається *індуктивною провідністю*:

$$b_L = \frac{1}{\omega L}. \tag{4.16}$$

Відзначимо, що x_L і b_L залежать від частоти. Таким чином, для амплітудних або діючих значень також справедливий закон Ома:

$$U_m = x_L I_m, \quad U = x_L I. \tag{4.17}$$

Початкова фаза напруги, як це випливає із порівняння (4.9) і (4.13),

$$\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}, \tag{4.18}$$

більша за початкову фазу струму на $\frac{\pi}{2}$.

Зсув фаз між напругою і струмом:

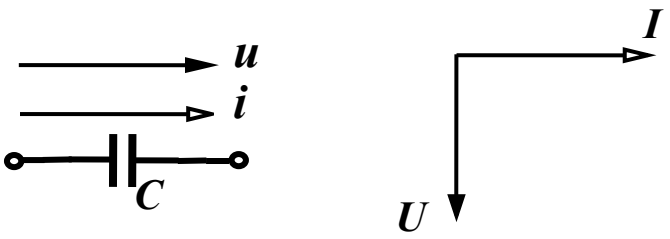
$$\varphi = \beta - \alpha = \frac{\pi}{2}, \tag{4.19}$$

і, відповідно, *струм відстає від напруги* на індуктивному елементі на $\frac{\pi}{2}$ (рис. 4.5(*б*)).

Середнє значення потужності за період для індуктивності $P = \frac{1}{T}\int_0^T uidt = 0$, тобто індуктивний елемент енергії не споживає.

Ємнісний елемент

Для ємнісного елемента (рис. 4.6(*а*)) $u_C = \frac{1}{C}\int idt$.



а) *б)*

Рисунок 4.6. Ємність: а) умовне зображення; б) векторна діаграма струму та напруги

Таким чином:

$$u_C = \frac{1}{C}\int I_m \sin(\omega t + \alpha)dt = -\frac{I_m}{\omega C}\cos(\omega t + \alpha) + A, \tag{4.20}$$

де A – постійна інтегрування.

Враховуючи, що розглядається усталений режим періодичних струмів і напруг, вважаємо, що постійна інтегрування дорівнює нулю, тому:

$$u_C = I_m \frac{1}{\omega C}\sin\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right). \tag{4.21}$$

Напруга на ємності при синусоїдному струмі також синусоїдна. Введемо поняття *ємнісного опору* (*capacitance*):

$$x_C = \frac{1}{\omega C} \tag{4.22}$$

і *ємнісної провідності:*

$$b_C = \omega C . \tag{4.23}$$

Отже, на ємності амплітудні та діючі значення струму і напруги теж підпорядковуються закону Ома:

$$U_m = x_C I_m , \quad U = x_C I , \tag{4.24}$$

а початкова фаза напруги:

$$\beta = \alpha - \frac{\pi}{2} \tag{4.25}$$

менша від початкової фази струму на $\frac{\pi}{2}$.

Зсув фаз між напругою і струмом

$$\varphi = \beta - \alpha = -\frac{\pi}{2}, \tag{4.26}$$

тобто, струм *випереджає* напругу на $\frac{\pi}{2}$ (рис. 4.6(*б*)).

Середнє значення потужності за період для ємності також дорівнює 0, тобто ємнісний елемент енергії не споживає.

В зв'язку з тим, що в резистивному елементі йде безперервне споживання енергії, резистор називають *активним опором* (*active resistance*), а індуктивний і ємнісний елементи – *реактивними опорами* (*reactive resistance*) [3].

Розглянемо приклад аналізу простого кола синусоїдного струму за допомогою векторної діаграми.

Знайдемо струм в нерозгалуженій частині кола (рис. 4.7(*а*)).

Оскільки на паралельних елементах напруга однакова, починаєм побудову діаграми зі спільного вектора напруги (його довжина в нашому випадку неважлива), який спрямовуємо горизонтально (рис. 4.7(*б*)).

Далі вздовж цього вектора відкладаємо вектор струму в резисторі і перпендикулярно до нього вектори струмів в індуктивності та ємності, згідно з рис. 4.5 та рис. 4.6.

Оскільки вектори струмів в індуктивності та ємності напрямлені протилежно один до одного, їх векторна сума дорівнює 8 А. Далі за теоремою Піфагора можна знайти струм в нерозгалуженій частині кола, який дорівнює 10 А.

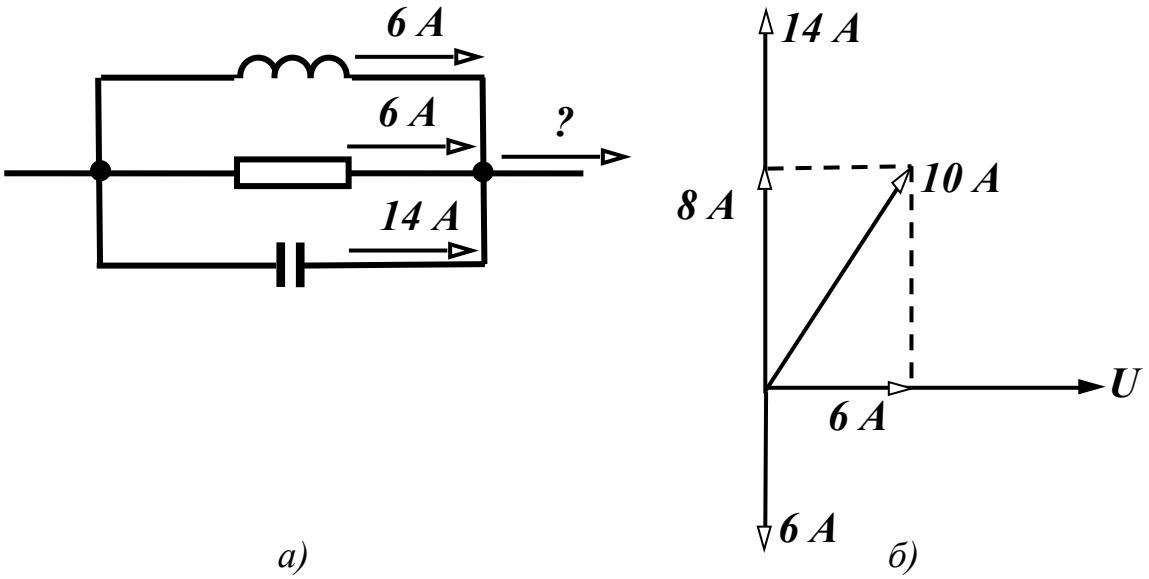


Рисунок 4.7. Розгалужене електричне коло: а) умовне зображення; б) векторна діаграма струму та напруг

4.5. Послідовне з'єднання елементів r, L, C при синусоїдному струмі

Розглянемо коло (рис. 4.8), в якому послідовно з'єднані елементи r, L, C і синусоїдне джерело напруги.

Припустимо, що струм в колі $i = I_m \sin(\omega t + \alpha)$. Визначимо параметри і форму напруги джерела.

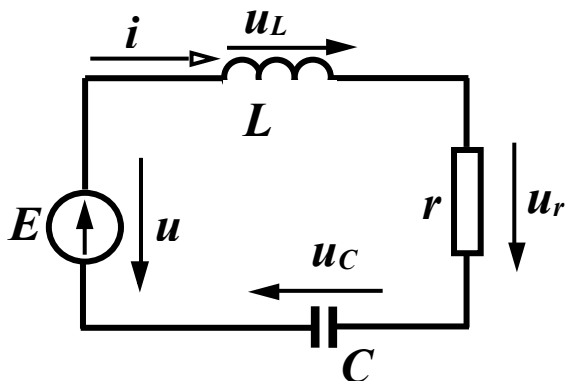


Рисунок 4.8. Послідовне з'єднання елементів r, L, C при синусоїдному струмі

Складемо для миттєвих значень рівняння за другим законом Кірхгофа:

$$u_L + u_r + u_C = u\,. \qquad (4.27)$$

Підставивши у (4.27) формули (4.8), (4.15) та (4.20) запишемо:

$$U_m \sin(\omega t+\beta)=I_m x_L \cos(\omega t+\alpha)+I_m r \sin(\omega t+\alpha)-I_m x_C \cos(\omega t+\alpha)=$$
$$=I_m\left[r \sin(\omega t+\alpha)+(x_L-x_C)\cos(\omega t+\alpha)\right].$$

Позначимо $x_L - x_C = x$ і назвемо x *реактивним опором*.

Тоді:

$$U_m \sin(\omega t+\beta)=I_m\left[r \sin(\omega t+\alpha)+x\cos(\omega t+\alpha)\right]=I_m\sqrt{r^2+x^2}\,\sin(\omega t+\alpha+\varphi),$$

де

$$\varphi = arctg\frac{x}{r}. \tag{4.28}$$

Введемо ще одне позначення:

$$Z=\sqrt{r^2+x^2} \tag{4.29}$$

і назвемо його *повним опором* (*full resistance*) кола. Тоді:

$$U_m \sin(\omega t+\beta)=I_m Z \sin(\omega t+\alpha+\varphi). \tag{4.30}$$

Вираз (4.30) показує, що при послідовному з'єднанні елементів *r, L, C* амплітуда прикладеної напруги (напруги джерела) і струм пов'язані законом Ома $U_m = ZI_m$ або для діючих значень:

$$U = ZI\,. \tag{4.31}$$

Початкова фаза напруги $\beta = \alpha + \varphi$ відрізняється від початкової фази струму на кут φ, який залежить від параметрів кола (4.28) і може набувати як додатних, так і від'ємних значень.

4.6. Потужність в колах синусоїдного струму

Нехай в деякому лінійному електричному колі протікає струм $i = I_m \sin(\omega t+\alpha)$ і прикладена напруга $u = U_m \sin(\omega t+\beta)$.

Активна потужність кола знаходиться як:

$$P = UI\cos\varphi \tag{4.32}$$

або

$$P = I^2 r\,. \tag{4.33}$$

Для характеристики джерел енергії вводять поняття *повної потужності* (*full power*), яка вимірюється у вольт-амперах [ВА]. Це максимальна потужність, яку може віддати джерело:

$$S = UI \tag{4.34}$$

або

$$S = I^2 Z . \tag{4.35}$$

Вводиться ще одне поняття – *реактивна потужність* (*reactive power*), яка характеризує обмін енергією між споживачем і джерелом.

$$Q = UI \sin\varphi \tag{4.36}$$

або

$$Q = I^2 x . \tag{4.37}$$

Одиницею вимірювання реактивної потужності є вольт-ампер реактивний [вар].

Оскільки $x = x_L - x_C$ може набувати додатних або від'ємних значень, то і реактивна потужність може бути додатною або від'ємною.

Між *P, S, Q* існує співвідношення:

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{P^2 + Q^2}\,, \\ P &= S\cos\varphi, \\ Q &= S\sin\varphi. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Із закону збереження енергії випливає, що в електричному колі вся потужність надходить в коло і в будь-який момент часу дорівнює всій потужності, що поглинається колом. Це справедливо і для активної, і для реактивної потужності.

Таким чином, сумарна активна потужність джерел енергії в будь-якому електричному колі дорівнює споживаній активній потужності цього кола. Сума реактивних потужностей, яка віддається джерелами, дорівнює сумі реактивних потужностей приймачів. Ця умова називається відповідно *балансом* активної і реактивної потужностей. Математично це записується так:

$$\begin{aligned} \sum_k U_k I_k \cos\varphi_k &= \sum_k I_k^2 r_k , \\ \sum_k U_k I_k \sin\varphi_k &= \sum_k I_k^2 x_k . \end{aligned} \tag{4.39}$$

Контрольні запитання до розділу 4

1. Що називається періодично змінним сигналом?
2. Якими параметрами однозначно визначається синусоїдно змінна електрична величина?
3. У яких одиницях вимірюється кутова частота синусоїдної напруги?
2. Як пов'язані між собою частота та період періодично змінного сигналу?
3. Запишіть вираз, яким описується часова залежність миттєвого значення синусоїдного періодичного сигналу.
4. Що таке початкова фаза сигналу?

5. Що таке кут зсуву фаз? Як він знаходиться?

6. Що таке діюче значення синусоїдного струму (напруги)? Який її фізичний зміст?

7. Як пов’язані між собою амплітудне та діюче значення періодичного синусоїдного сигналу?

8. Які елементи електричного поля називаються реактивними? Чому вони так називаються?

9. Як визначаються реактивні опори котушки і конденсатора?

10. Що називається векторною діаграмою?

11. У чому перевага векторної діаграми у порівнянні з хвильовою діаграмою?

12. Як визначається зсув фаз між напругою та струмом на розгалуженому з’єднанні пасивних елементів електричного кола?

13. Чи може активна потужність кола бути від’ємною?

14. Чи може реактивна потужність кола бути від’ємною?

15. Чи може повна потужність кола бути від’ємною?

16. Яку активну потужність споживає ідеальна індуктивність?

17. Яку активну потужність споживає ідеальна ємність?

18. Які енергетичні процеси характеризують активна та індуктивна потужності?

19. Як визначити активну, реактивну та повну потужності пасивного двополюсника?

20. Як скласти рівняння балансу потужностей в електичному полі синусоїдного струму?

21. Чи буде обов’язково виконуватись баланс повної потужності, якщо виконуються баланси активної і реактивної потужностей?

22. Чи будуть обов’язково виконуватись баланси активної і реактивної потужностей, якщо виконується баланс повної потужності?

5. КОМПЛЕКСНИЙ СИМВОЛІЧНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ КІЛ ЗМІННОГО СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

Комплексний символічний метод аналізу кіл синусоїдного струму базується на існуванні взаємно однозначної відповідності між тригонометричними функціями та комплексними числами, що дає можливість вести розрахунки не з синусоїдними функціями струмів та напруг, а з їх комплексними зображеннями.

5.1. Елементи алгебри комплексних чисел

Нагадаємо основні відомості про комплексні числа та дії над ними.

В межах символічного методу використовують дві з трьох форм запису комплексного числа – алгебраїчну та показникову [1].

Алгебраїчна форма має такий вигляд (літеру, що позначає комплексне число, підкреслюють знизу):

$$\underline{A} = a_1 + ja_2, \tag{5.1}$$

де a_1 – дійсна частина комплексного числа;

a_2 – уявна частина комплексного числа;

$j = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця, на відміну від позначення $\sqrt{-1} = i$, яке прийняте в математиці, в електротехніці уявну одиницю позначають літерою j.

Показникова форма має вигляд:

$$\underline{A} = Ae^{j\alpha}, \tag{5.2}$$

де A – *модуль* комплексного числа;

α – *аргумент* комплексного числа.

Перехід від однієї форми запису до іншої здійснюється за допомогою співвідношень:

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2},\ \alpha = arctg\frac{a_2}{a_1},\ a_1 = A\cos\alpha,\ a_2 = A\sin\alpha. \tag{5.3}$$

Операції додавання (віднімання) двох комплексних чисел зручно проводити в алгебраїчній формі, при цьому додаються (віднімаються) відповідно дійсні та уявні частини:

$$\underline{A} \pm \underline{B} = (a_1 + ja_2) \pm (b_1 + jb_2) = (a_1 \pm b_1) + j(a_2 \pm b_2). \tag{5.4}$$

Операції множення та ділення комплексних чисел краще проводити в показниковій формі:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = Ae^{j\alpha} \cdot Be^{j\beta} = ABe^{j(\alpha+\beta)},\ \frac{\underline{A}}{\underline{B}} = \frac{Ae^{j\alpha}}{Be^{j\beta}} = \frac{A}{B}e^{j(\alpha-\beta)}. \tag{5.5}$$

Корисно запам’ятати деякі прості співвідношення:

$$j^2 = -1,\ \pm jA = Ae^{\pm j\frac{\pi}{2}},\ \frac{1}{j} = -j. \tag{5.6}$$

Два комплексних числа вигляду

$$\underline{A} = a_1 + ja_2 = Ae^{j\alpha},\ \overset{*}{\underline{A}} = a_1 - ja_2 = Ae^{-j\alpha}$$

називаються *взаємоспряженими*.

5.2. Комплексні зображення електротехнічних параметрів

Надалі ми будемо вести розрахунок кіл синусоїдного струму в діючих значеннях, тому наведемо відповідність комплексних діючих значень струму та напруги їх синусоїдним функціям.

$$\begin{aligned} u &= U_m \sin(\omega t + \beta) \to \underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\beta}, \\ i &= I_m \sin(\omega t + \alpha) \to \underline{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\alpha}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Комплексні зображення активних, реактивних та повних опорів кола визначаються так:

- комплексний опір резистора r є дійсним числом і дорівнює r;
- комплексний опір індуктивності L є уявним числом і дорівнює:

$$j\omega L = jx_L; \tag{5.8}$$

- комплексний опір ємності C є уявним числом і дорівнює:

$$\frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C} = -jx_C; \tag{5.9}$$

- *повний комплексний опір* (*full complex resistance*) ділянки кола *rLC* є комплексним числом і в алгебраїчній формі записується, як:

$$\underline{Z} = r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = r + j(x_L - x_C) = r + jx. \tag{5.10}$$

Введемо поняття *повної комплексної провідності* (*full complex conductivity*) ділянки кола, як:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{r + jx} = \frac{r - jx}{r^2 + x^2} = \frac{r}{r^2 + x^2} - j\frac{x}{r^2 + x^2}. \tag{5.11}$$

Звідси величини

$$g = \frac{r}{r^2 + x^2}, \quad b = \frac{x}{r^2 + x^2} \tag{5.12}$$

називають відповідно активною та реактивною провідністю ділянки кола.

Закони електротехніки в комплексній формі:

1. *Закон Ома*

$$\underline{U} = \underline{I}\,\underline{Z}. \tag{5.13}$$

2. *Перший закон Кірхгофа*

$$\sum_{k=1}^{n} \underline{I}_k = 0. \tag{5.14}$$

3. *Другий закон Кірхгофа*

$$\sum_{k=1}^{n} \underline{E}_k = \sum_{k=1}^{n} \underline{I}_k \underline{Z}_k. \tag{5.15}$$

5.3. Баланс потужності в комплексній формі

Згідно з формулами (4.39), результати розрахунків кіл синусоїдного струму мають пройти перевірку на баланси активної та реактивної потужностей окремо. При цьому наявність балансу лише повної потужності не є критерієм правильності розрахунків.

Якщо розрахунки вести в комплексних числах, то необхідність окремої перевірки балансів активної та реактивної потужностей зникає.

Введемо поняття *повної комплексної потужності* (*full complex power*).

Вона визначається, як:

$$\underline{S} = P + jQ = \left|\underline{I}\right|^2 \underline{Z} = \underline{U}\,\overset{*}{\underline{I}}. \tag{5.16}$$

Баланс потужності має вигляд

$$\sum_{k=1}^{n} \underline{U}_k \overset{*}{\underline{I}}_k = \sum_{k=1}^{n} \left|\underline{I}_k\right|^2 \underline{Z}_k. \tag{5.17}$$

5.4. Особливості розрахунку складних електричних кіл у колах змінного гармонічного струму

Для складних кіл змінного струму, в цілому, можуть бути застосовані ті ж методи розрахунку, що і для кіл постійного струму, за умови представлення струмів, напруг та параметрів електричного кола так, як це передбачено комплексним символічним методом розрахунку. Тож виходячи зі сказаного, роз-

глянемо приклади застосування методів розрахунку кіл синусоїдного струму більш детально.

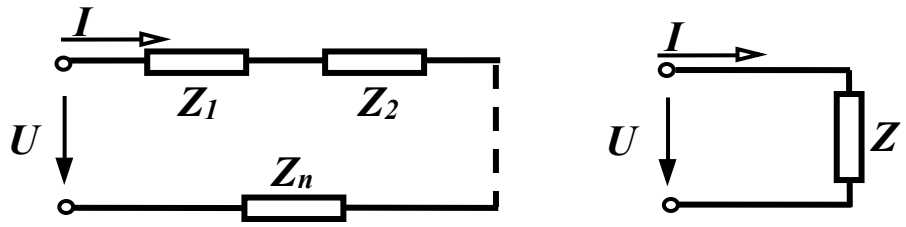
5.4.1. Еквівалентні перетворенням пасивної частини електричного кола

Цей метод доцільно використовувати тоді, коли коло містить лише одне джерело живлення. Суть цього методу полягає у тому, що вся пасивна частина схеми згортається до одного еквівалентного опору, який приєднується до полюсів джерела живлення. Після цього за законом Ома знаходиться вхідний струм кола, який далі розподіляється між вітками.

Розглянемо різні можливі варіанти еквівалентних перетворень.

Послідовне з'єднання опорів.

Нехай є електричне коло з *n* послідовно з'єднаними опорами, через які протікає один і той самий струм *I* (рис. 5.1(*а*)). Еквівалентне коло містить лише один опір *Z* (рис. 5.1(б)).



а) *б)*

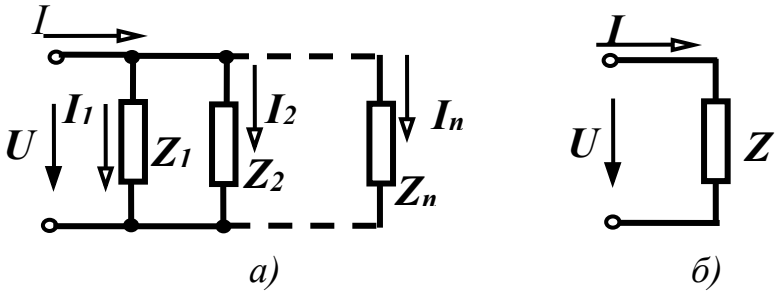
Рисунок 5.1. Електрична схема: а) до еквівалентного перетворення; б) після еквівалентного перетворення

В цьому випадку *еквівалентний комплексний опір кола при послідовному з'єднанні дорівнює сумі комплексних опорів окремих елементів*, тобто:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + ... + \underline{Z}_n, \qquad (5.18)$$

Паралельне з'єднання опорів.

Нехай є електричне коло з *n* паралельно з'єднаними опорами, до яких прикладена однакова напруга *U* (рис. 5.2, *а*). Еквівалентне коло містить лише один опір *Z* (рис. 5.2, б).



а) *б)*

Рисунок 5.2. Електрична схема: а) до еквівалентного перетворення; б) після еквівалентного перетворення

При паралельному з'єднанні комплексна провідність еквівалентного кола дорівнює сумі комплексних провідностей окремих елементів, тобто:

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + ... + \underline{Y}_k + ... + \underline{Y}_n . \tag{5.19}$$

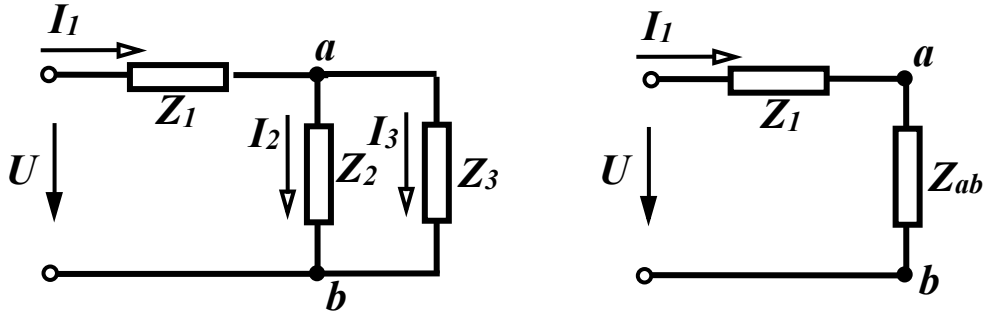
Для випадку двох паралельних опорів, який часто зустрічається, $\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$, або $\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}$, звідки після нескладних перетворень:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} . \tag{5.20}$$

Аналогічно, для трьох паралельних опорів отримаємо:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3} . \tag{5.21}$$

Розглянемо випадок змішаного з'єднання (рис. 5.3(*а*)).



а) *б)*

Рисунок 5.3. Схема складного електричного кола: а) до проміжного спрощення; б) після проміжного спрощення

При змішаному з'єднанні шляхом послідовного перетворення паралельного і послідовного з'єднання елементів приходять до еквівалентної схеми, яка складається із одного опору.

Спочатку перетворюють два паралельно з'єднаних опори $\underline{Z}_2$ і $\underline{Z}_3$ в один $\underline{Z}_{ab}$ ($\underline{Z}_{ab} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}$).

Із рис. 5.3(*б)* видно, що опори $\underline{Z}_1$ і $\underline{Z}_{ab}$ з'єднані послідовно, тому $\underline{Z}_{екв} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{ab}$.

Струм $\underline{I}_1$ визначається за законом Ома: $\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{екв}}$.

Щоб знайти струми $\underline{I}_2$ і $\underline{I}_3$, треба визначити спочатку напругу між точками *a* і *b*: $\underline{U}_{ab} = \underline{I}_1 \underline{Z}_{ab} = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}$.

Знаючи $\underline{U}_{ab}$, легко визначаються: $\underline{I}_2 = \dfrac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_2}$, $\underline{I}_3 = \dfrac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_3}$,

або $\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \dfrac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}$, $\underline{I}_3 = \underline{I}_1 \dfrac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}$.

З'єднання зірка - трикутник.

В багатьох випадках в складних схемах немає послідовного або паралельного з'єднання елементів (рис. 5.4(*а*)), а перетворення схеми провести треба. В таких випадках здійснюється перетворення зірки віток (рис. 5.5(*а*)) в еквівалентний трикутник (рис. 5.5(*б*)) або обернене перетворення.

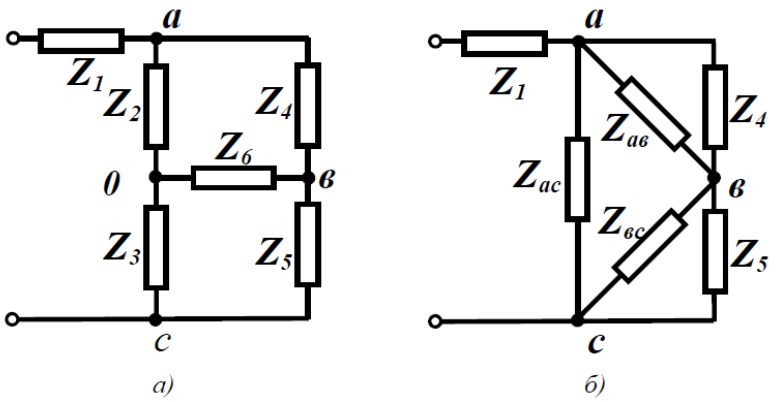


Рисунок 5.4. Електричне коло: а) до еквівалентного перетворення; б) після еквівалентного перетворення типу «зірка-трикутник»

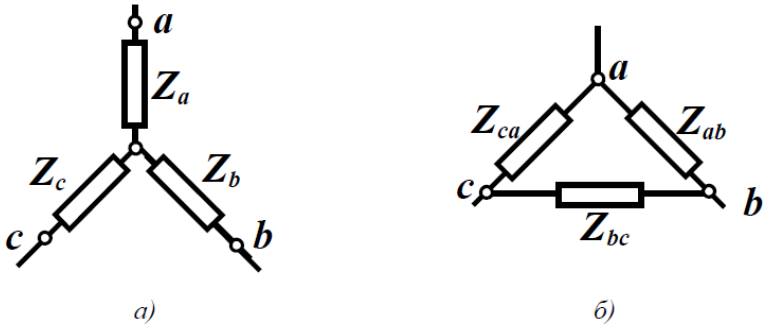


Рисунок 5.5. Схеми з'єднання елементів електричного кола: а) в зірку; б) в трикутник

В схемі (рис. 5.4(*а*)) можна виділити, наприклад, зірки, які складаються із опорів $\underline{Z}_2, \underline{Z}_3, \underline{Z}_6$ або $\underline{Z}_4, \underline{Z}_5, \underline{Z}_6$, чи два трикутники із опорів $\underline{Z}_2, \underline{Z}_4, \underline{Z}_6$ або $\underline{Z}_3, \underline{Z}_5, \underline{Z}_6$.

Умовою еквівалентності перетворення є рівність струмів і напруг відповідних ділянок при будь-яких режимах роботи.

Якщо, наприклад, обірвати провідник, який підходить до точки *c* (рис. 5.5(*а*), то повинні бути рівні в обох схемах опори між точками *a* і *b*, тобто:

$$\underline{Z}_a + \underline{Z}_b = \frac{\underline{Z}_{ab}(\underline{Z}_{ac} + \underline{Z}_{bc})}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{ac} + \underline{Z}_{bc}}.$$

Аналогічно, якщо обірвати провідники, що підходять до точок *b* або *a*, отримаємо:

$$\underline{Z}_a + \underline{Z}_c = \frac{\underline{Z}_{ac}(\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc})}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{ac} + \underline{Z}_{bc}},$$

$$\underline{Z}_b + \underline{Z}_c = \frac{\underline{Z}_{bc}(\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{ac})}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{ac} + \underline{Z}_{bc}}.$$

Розв'язуючи цю систему, одержуємо вирази:

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_a &= \frac{\underline{Z}_{ab}\underline{Z}_{ac}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{ac} + \underline{Z}_{bc}}, \\
\underline{Z}_b &= \frac{\underline{Z}_{ab}\underline{Z}_{bc}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{ac} + \underline{Z}_{bc}}, \\
\underline{Z}_c &= \frac{\underline{Z}_{bc}\underline{Z}_{ac}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{ac} + \underline{Z}_{bc}},
\end{aligned} \tag{5.22}$$

за якими визначаємо опори зірки при перетворенні трикутника в зірку.

Із виразів (5.22) можна одержати вирази для визначення опорів еквівалентного трикутника:

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_{ab} &= \underline{Z}_a + \underline{Z}_b + \frac{\underline{Z}_a\underline{Z}_b}{\underline{Z}_c}, \\
\underline{Z}_{bc} &= \underline{Z}_b + \underline{Z}_c + \frac{\underline{Z}_b\underline{Z}_c}{\underline{Z}_a}, \\
\underline{Z}_{ca} &= \underline{Z}_a + \underline{Z}_c + \frac{\underline{Z}_a\underline{Z}_c}{\underline{Z}_b}.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

5.4.2. Розрахунок електричних кіл з еквівалентним перетворенням активної частини електричного кола

Активними ділянками електричного кола називаються ділянки, які містять джерела енергії. Розглянемо спочатку перетворення реальних незалежних джерел енергії: джерело напруги в джерело струму і навпаки (рис. 5.6).

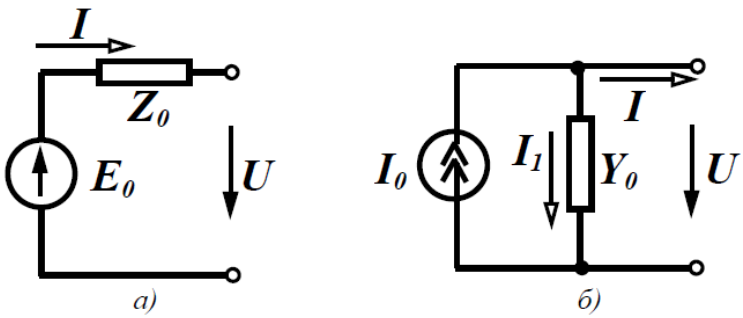


Рисунок 5.6. Схема ділянки електричного кола: а) до еквівалентного перетворення; б) після еквівалентного перетворення

Таке перетворення здійснюється частіше з розрахунковою метою, оскільки в одних випадках зручніше мати справу з джерелом напруги, а в інших - з джерелом струму.

Для джерела напруги (рис. 5.6(*а*)) можна записати:

$$\underline{U} = \underline{E}_0 - \underline{I}\underline{Z}_0,$$

або

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}_0}{\underline{Z}_0} - \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_0}. \tag{5.24}$$

Для джерела струму (рис. 5.6(*б*)):

$$\underline{I} = \underline{I}_0 - \underline{I}_1 = \underline{I}_0\underline{Y}_0. \tag{5.25}$$

Для виконання умови еквівалентності схем струм $\underline{I}$ та напруга $\underline{U}$ на затискачах кола в обох схемах повинні бути однакові за будь-яких їх значень.

Тому:

$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{E}_0}{\underline{Z}_0},\ \underline{Y}_0 = \frac{1}{\underline{Z}_0}; \tag{5.26}$$

$$\underline{E}_0 = \frac{\underline{I}_0}{\underline{Z}_0},\ \underline{Z}_0 = \frac{1}{\underline{Y}_0}. \tag{5.27}$$

Треба мати на увазі, що еквівалентність цих перетворень правильна лише відносно зовнішнього кола (праворуч від виводів). Відносно лівої частини схеми вони не є еквівалентними, тому що при розімкнутих затискачах в першій схемі (рис. 5.7(*а*)) немає втрат енергії, а в другій схемі (рис. 5.7(*б*)) вони є. Ідеальні джерела енергії перетворювати не можна.

Розглянемо перетворення паралельно з'єднаних активних віток (рис. 5.7(*а*)).

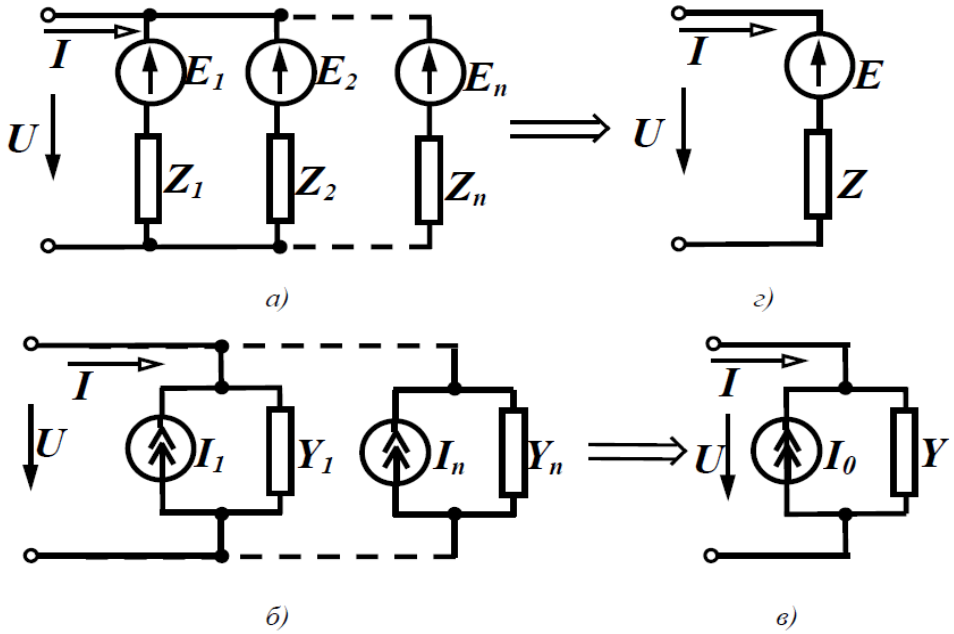


Рисунок 5.7. Евквівалентні перетворення активних ділянок електричного кола

В схемі (рис. 5.7(*г*)), що містить одну ЕРС E і один опір Z, треба визначити їх значення. Процес перетворення виконаємо у такій послідовності:

- зобразимо активні вітки в початковій схемі як реальні джерела напруги з ЕРС E_k і внутрішнім опором Zk;
- перетворимо кожне реальне джерело напруги в реальне джерело струму (рис. 5.7(*б*)). Значення параметрів джерела струму визначається за (5.26):

$$\underline{I_k} = \frac{\underline{E_k}}{\underline{Z_k}}, \ \underline{Y_k} = \frac{1}{\underline{Z_k}};$$

- замінимо всі паралельно з'єднані джерела струму і провідності одним реальним джерелом струму з параметрами (рис. 5.7(*в*)):

$$\begin{aligned} \underline{I_0} &= \sum \underline{I_k} = \sum \underline{E_k}\,\underline{Y_k}, \\ \underline{Y} &= \sum \underline{Y_k}, \end{aligned} \tag{5.28}$$

джерело струму (рис. 5.7(*в*)) перетворимо в джерело напруги з ЕРС:

$$\underline{E} = \frac{\underline{I_0}}{\underline{Y}} = \frac{\sum \underline{E_k}\,\underline{Y_k}}{\sum \underline{Y_k}} \tag{5.29}$$

і внутрішнім опором:

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{\sum \underline{Y_k}}. \tag{5.30}$$

Зазначимо, що в (5.29) сума розуміється як алгебраїчна. Знак ЕРС E_k, яка входить до (5.29), визначається відповідно до напряму ЕРС E_k і еквівалентною ЕРС E. Якщо ЕРС E_k збігається за напрямом з еквівалентною ЕРС E, то вона входить у (5.29) із знаком плюс.

5.4.3. Метод контурних струмів

Метод контурних струмів доцільно застосовувати, якщо кількість рівнянь за другим законом Кірхгофа менша від кількості рівнянь за першим законом [2].

Суть методу полягає у тому, що замість струмів у вітках вводяться нові змінні – замкнені струми, які умовно проходять по вітках незалежних контурів. Ці струми називаються *контурними* і їх кількість менша за кількість струмів віток.

Зручність цього методу полягає ще і в тому, що його система рівнянь має уніфікований вигляд при будь-якій схемі кола.

В загальному випадку система рівнянь для n контурів має вигляд:

$$\begin{cases} \underline{Z}_{11}\underline{J}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{J}_2 + \underline{Z}_{13}\underline{J}_3 + \ldots + \underline{Z}_{1n}\underline{J}_n = \underline{E}_{11}, \\ \underline{Z}_{21}\underline{J}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{J}_2 + \underline{Z}_{23}\underline{J}_3 + \ldots + \underline{Z}_{2n}\underline{J}_n = \underline{E}_{22}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underline{Z}_{n1}\underline{J}_1 + \underline{Z}_{n2}\underline{J}_2 + \underline{Z}_{n3}\underline{J}_3 + \ldots + \underline{Z}_{nn}\underline{J}_n = \underline{E}_{nn}. \end{cases} \qquad (5.31)$$

Коефіцієнт $\underline{Z}_{kk}$ є сумою комплексних опорів всіх віток k-го контура і називається *власним опором контура* (*own resistance of a contour*) k.

Коефіцієнт $\underline{Z}_{jk}$ називається *спільним опором контурів* (*joint resistance of contours*) j та k і дорівнює сумі опорів віток, які входять одночасно в контури j та k. Спільний опір є додатним в тому випадку, якщо контурні струми в ньому направлені однаково, а якщо навпаки – загальний опір від'ємний. Відзначимо, що $\underline{Z}_{jk} = \underline{Z}_{kj}$.

Коефіцієнт $\underline{E}_{kk}$ називають *контурною ЕРС* яка дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС віток, що входять у контур k.

Якщо в електричному колі є вітки з ідеальними джерелами струму, то контури зручно вибирати так, щоб така вітка входила лише в один контур. У цьому випадку контурний струм такого контура уже відомий – він дорівнює струмові джерела струму і число невідомих контурних струмів зменшується.

Приклад. Для електричного кола, зображеного на рис. 5.8, скласти систему рівнянь за методом контурних струмів.

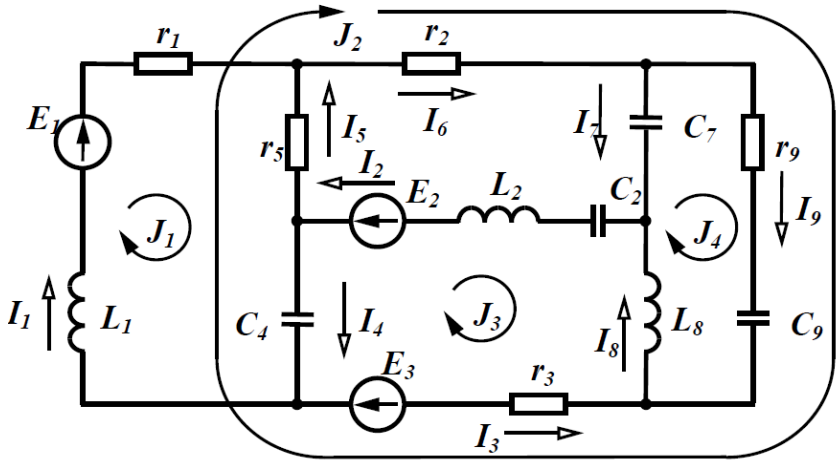


Рисунок 5.8. Схема електричного кола з позначеними контурними струмами

Розв’язання

В колі чотири незалежних контури. Задамося напрямом контурних струмів так, як показано на рис. 5.8, і запишемо для чотирьох контурів рівняння в загальному вигляді:

$$\begin{cases} \underline{Z}_{11}\underline{J}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{J}_2 + \underline{Z}_{13}\underline{J}_3 + \underline{Z}_{14}\underline{J}_4 = \underline{E}_{11}, \\ \underline{Z}_{21}\underline{J}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{J}_2 + \underline{Z}_{23}\underline{J}_3 + \underline{Z}_{24}\underline{J}_4 = \underline{E}_{22}, \\ \underline{Z}_{31}\underline{J}_1 + \underline{Z}_{32}\underline{J}_2 + \underline{Z}_{33}\underline{J}_3 + \underline{Z}_{34}\underline{J}_4 = \underline{E}_{33}, \\ \underline{Z}_{41}\underline{J}_1 + \underline{Z}_{42}\underline{J}_2 + \underline{Z}_{43}\underline{J}_3 + \underline{Z}_{44}\underline{J}_4 = \underline{E}_{44}. \end{cases}$$

Визначимо всі коефіцієнти.

$$\underline{Z}_{11} = r_1 + r_5 + j\omega L_1 - j\frac{1}{\omega C_4}.$$

Спільним опором контурів 1 і 2 є опори в вітках 4 і 5 і оскільки напрями контурних струмів $\underline{J}_1$ та $\underline{J}_2$ в них протилежні, то цей опір від’ємний:

$$\underline{Z}_{12} = -\left(r_5 - j\frac{1}{\omega C_4}\right).$$

Точно так само:

$$\underline{Z}_{13} = -\left(-j\frac{1}{\omega C_4}\right).$$

Контури 1 і 4 не мають спільних віток, тому

$$\underline{Z}_{14} = 0.$$

Аналогічно,

$$\underline{Z}_{21} = \underline{Z}_{12} = -\left(r_5 - j\frac{1}{\omega C_4}\right),$$

$$\underline{Z}_{22} = r_3 + r_5 + r_6 + r_9 - j\frac{1}{\omega C_4} - j\frac{1}{\omega C_9},$$

$$\underline{Z}_{23} = r_3 - j\frac{1}{\omega C_4},$$

$$\underline{Z}_{24} = r_9 - j\frac{1}{\omega C_9},$$

$$\underline{Z}_{31} = \underline{Z}_{13} = -\left(-j\frac{1}{\omega C_4}\right),$$

$$\underline{Z}_{32} = \underline{Z}_{23} = r_3 - j\frac{1}{\omega C_4},$$

$$\underline{Z}_{41} = \underline{Z}_{14} = 0,$$

$$\underline{Z}_{33} = r_3 + j\omega L_2 + j\omega L_8 - j\frac{1}{\omega C_2} - j\frac{1}{\omega C_4},$$

$$\underline{Z}_{34} = -(j\omega L_8),$$

$$\underline{Z}_{42} = \underline{Z}_{24} = r_9 - j\frac{1}{\omega C_9},$$

$$\underline{Z}_{43} = \underline{Z}_{34} = -(j\omega L_8),$$

$$\underline{Z}_{44} = r_9 - j\frac{1}{\omega C_7} - j\frac{1}{\omega C_9} + j\omega L_8.$$

Визначимо контурні ЕРС як алгебраїчні суми ЕРС віток відповідних контурів.

$$\underline{E}_{11} = \underline{E}_1,\ \underline{E}_{22} = \underline{E}_3,\ \underline{E}_{33} = -\underline{E}_2 + \underline{E}_3,\ \underline{E}_{44} = 0.$$

Розв’язавши систему рівнянь, тобто визначивши контурні струми, знаходимо струми у вітках.

$$\underline{I}_1 = \underline{J}_1,\ \underline{I}_2 = -\underline{J}_3,\ \underline{I}_3 = -\underline{J}_2 - \underline{J}_3,$$
$$\underline{I}_4 = \underline{J}_1 - \underline{J}_2 - \underline{J}_3,\ \underline{I}_5 = -\underline{J}_1 + \underline{J}_2,$$
$$\underline{I}_6 = \underline{J}_2,\ \underline{I}_7 = -\underline{J}_4,\ \underline{I}_8 = -\underline{J}_3 + \underline{J}_4,\ \underline{I}_9 = \underline{J}_2 + \underline{J}_4.$$

5.4.4. Метод вузлових потенціалів

Метод вузлових потенціалів доцільно застосовувати, якщо кількість рівнянь за першим законом Кірхгофа менша кількості рівнянь за другим законом.

Крім того, електричні кола, в яких кількість вузлів та віток досягає сотень чи навіть тисяч, взагалі неможливо розрахувати за допомогою стандартних математичних пакетів програм. В таких випадках розробляють спеціальні комп’ютерні програми, і саме метод вузлових потенціалів найкраще за інші алгоритмізується і забезпечує ефективну програмну реалізацію.

Суть методу полягає в тому, що спочатку визначаються комплексні потенціали всіх вузлів кола окрім одного, який називається *базовим* і потенціал якого приймають рівним нулю.

За цим методом система рівнянь теж має уніфікований вигляд при будь-якій схемі кола.

В загальному випадку для кола, що містить $m+1$ вузол, можна записати систему рівнянь для потенціалів вузлів незалежно від вигляду її схеми і параметрів віток у вигляді m рівнянь:

$$\begin{cases} \underline{Y}_{11}\underline{\phi}_1 - \underline{Y}_{12}\underline{\phi}_2 - \underline{Y}_{13}\underline{\phi}_3 - \ldots - \underline{Y}_{1m}\underline{\phi}_m = \underline{I}_{11}, \\ -\underline{Y}_{21}\underline{\phi}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{\phi}_2 - \underline{Y}_{23}\underline{\phi}_3 - \ldots - \underline{Y}_{2m}\underline{\phi}_m = \underline{I}_{22}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\underline{Y}_{m1}\underline{\phi}_1 - \underline{Y}_{m2}\underline{\phi}_2 - \underline{Y}_{m3}\underline{\phi}_3 - \ldots + \underline{Y}_{mm}\underline{\phi}_m = \underline{I}_{mm}. \end{cases} \quad (5.32)$$

Коефіцієнти, які розташовані на головній діагоналі матриці і позначаються літерою $\underline{Y}$ з двома однойменними індексами ($\underline{Y}_{11}$, $\underline{Y}_{22}$, $\underline{Y}_{33}$ тощо), називають *власними провідностями* (*own conductivity*) відповідних вузлів. Вони завжди додатні. Для довільного вузла *k* власна провідність $\underline{Y}_{kk}$ *дорівнює сумі провідностей всіх віток, що сходяться у вузлі k*.

Решта коефіцієнтів лівої частини системи рівнянь (які завжди від'ємні) позначають літерою $\underline{Y}$ з різнойменними індексами $\underline{Y}_{jk}$ і називають *спільними провідностями* між вузлами j та k. $\underline{Y}_{jk}$ *дорівнює сумі провідностей всіх віток, що* ***безпосередньо*** *з'єднують вузли j та k.* З означення поняття «спільна провідність» ясно, що $\underline{Y}_{jk} = \underline{Y}_{kj}$.

Праві частини рівнянь системи (5.32) мають розмірність струмів і називаються *вузловими струмами* $\underline{I}_{kk}$. Вони дорівнюють *алгебраїчній сумі струмів джерел струму* у вітках, які приєднані до вузла *k*, або *алгебраїчній сумі добутків ЕРС на провідності віток*, що підходять до цього вузла.

Якщо джерело енергії напрямлено до вузла, що розглядається, то складова входить в рівняння зі знаком плюс, а навпаки – зі знаком мінус.

Спробуйте скласти систему рівнянь за методом вузлових потенціалів для кола (рис. 5.8) самостійно.

5.4.5. Метод законів Кірхгофа

В переважній більшості задач аналізу електричних кіл є можливість вибрати один з методів, які значно зменшують ранг системи рівнянь.

Разом з тим, існують кола для яких розрахунок можливий лише за допомогою *безпосереднього* використання законів Кірхгофа. Це кола з залежними (керованими) джерелами живлення.

Розглянемо приклад розрахунку режиму такого кола.

Для схеми (рис. 5.9) знайти всі струми і скласти баланс потужностей.

Параметри схеми: $e_1 = 100\sin\left(\omega t - 20^\circ\right)$ В, $e_2 = 150\sin\left(\omega t + 30^\circ\right)$ В, $R_1 = 6$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 8$ Ом, $X_1 = 9$ Ом, $X_2 = 6$ Ом, $X_3 = 4$ Ом, $X_4 = 12$ Ом, $k_1 = 0.8$, $k_2 = 0.5$.

Проведемо розрахунок струмів за допомогою системи рівнянь Кірхгофа. Приймемо напрямок обходу контурів – за годинниковою стрілкою.

Оскільки в колі діють чотири *невідомі* струми, система має складатися з 4 рівнянь, з них 2 рівняння за першим законом (коло містить 3 вузли) і 2 – за другим.

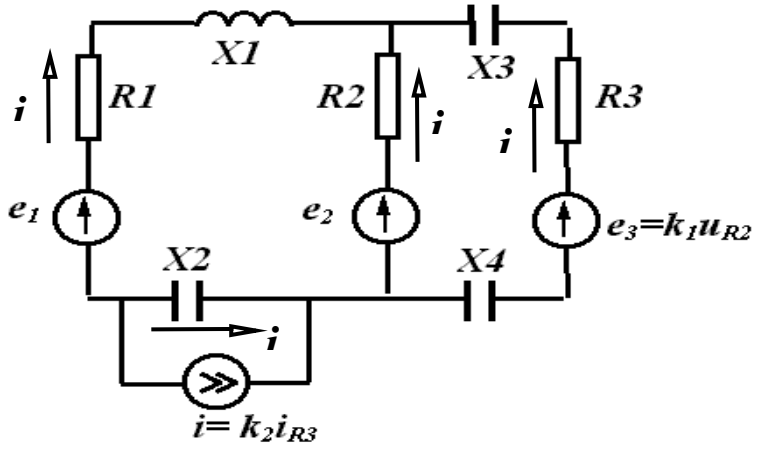


Рисунок 5.9. Схема електричного кола з залежними джерелами живлення

Запишемо вирази для повних комплексних опорів віток, вважаючи що номер вітки збігається з номером струму:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1, \quad \underline{Z}_2 = R_2,$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 - j\left(X_3 + X_4\right), \quad \underline{Z}_4 = -jX_2.$$

Запишемо систему рівнянь в комплексній формі.

$$\begin{cases} \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0, \\ \underline{I} + \underline{I}_4 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0, \\ \underline{I}_1\underline{Z}_1 - \underline{I}_2\underline{Z}_2 - \underline{I}_4\underline{Z}_4 = \underline{E}_1 - \underline{E}_2, \\ \underline{I}_2\underline{Z}_2 - \underline{I}_3\underline{Z}_3 = \underline{E}_2 - \underline{E}_3. \end{cases}$$

З урахуванням того, що $\underline{E}_3 = k_1\underline{I}_2\underline{Z}_2$, а $\underline{I} = k_2\underline{I}_3$, система рівнянь прийме вигляд:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0, \\ \underline{I}_4 - \underline{I}_2 + \underline{I}_3 (k_2 - 1) = 0, \\ \underline{I}_1 \underline{Z}_1 - \underline{I}_2 \underline{Z}_2 - \underline{I}_4 \underline{Z}_4 = \underline{E}_1 - \underline{E}_2, \\ \underline{I}_2 \underline{Z}_2 (k_1 + 1) - \underline{I}_3 \underline{Z}_3 = \underline{E}_2. \end{cases} \quad (5.33)$$

Всі розрахунки виконаємо в середовищі MathCAD.

Введемо вхідні дані:

$Em1 := 100 \quad \beta1 := -20deg \quad Em2 := 150 \quad \beta2 := 30deg$

$r1 := 6 \quad r2 := 10 \quad r3 := 8 \quad x1 := 9 \quad x2 := 6$

$x3 := 4 \quad x4 := 12 \quad k1 := 0.8 \quad k2 := 0.5$

$$E1 := \frac{Em1}{\sqrt{2}} \cdot e^{i \cdot \beta1} \qquad E2 := \frac{Em2}{\sqrt{2}} \cdot e^{i \cdot \beta2}$$

$E1 = 66.446 - 24.184i \quad E2 = 91.856 + 53.033i$

$Z1 := r1 + i \cdot x1 \quad Z2 := r2 \quad Z3 := r3 - i \cdot (x3 + x4) \quad Z4 := -(i \cdot x2)$

Базуючись на системі (5.33), введемо в MathCAD матрицю коефіцієнтів при невідомих струмах та вектор правих частин, після чого знайдемо комплексні значення струмів.

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & k2 - 1 & 1 \\ Z1 & -Z2 & 0 & -Z4 \\ 0 & Z2 \cdot (k1 + 1) & -Z3 & 0 \end{bmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E1 - E2 \\ E2 \end{pmatrix}$$

$J := lsolve(A, B) \quad I1 := J_0 \quad I2 := J_1 \quad I3 := J_2 \quad I4 := J_3$

$I1 = -0.682 - 5.038i \quad |I1| = 5.084 \quad arg(I1) = -97.709\,deg$

$I2 = 3.549 + 5.354i \quad |I2| = 6.423 \quad arg(I2) = 56.464\,deg$

$I3 = -2.867 - 0.316i \quad |I3| = 2.884 \quad arg(I3) = -173.717\,deg$

$I4 = 2.115 + 5.196i \quad |I4| = 5.61 \quad arg(I4) = 67.849\,deg$

Перевіримо баланс потужностей.

Для визначення потужності джерел енергії знайдемо спочатку комплексні значення ЕРС $\underline{E}_3$, напруги джерела струму $\underline{U}_i$ і струму $\underline{I}$ за формулами $\underline{E}_3 = k_1 \underline{I}_2 \underline{Z}_2$, $\underline{U}_i = \underline{I}_4 \underline{Z}_4$, $\underline{I} = k_2 \underline{I}_3$.

Потужність джерел енергії $\underline{S}_{дж} = \underline{E}_1 \overset{*}{\underline{I}}_1 + \underline{E}_2 \overset{*}{\underline{I}}_2 + \underline{E}_3 \overset{*}{\underline{I}}_3 - \underline{U}_i \overset{*}{\underline{I}}$.

Відмітимо, що потужність джерела струму приймається від'ємною, тому що струм і напруга в джерелі струму направлені протилежно.

Потужність споживачів $\underline{S}_{сп} = I_1^2 \underline{Z}_1 + I_2^2 \underline{Z}_2 + I_3^2 \underline{Z}_3 + I_4^2 \underline{Z}_4$.

Реалізуємо ці вирази в MathCAD:

E3 := k1·I2·Z2 E3 = 28.389 + 42.832i |E3| = 51.386 arg(E3) = 56.464 deg

I := k2·I3 I = −1.433 − 0.158i |I| = 1.442 arg(I) = −173.717 deg

Ui := I4·Z4 Ui = 31.177 − 12.692i |Ui| = 33.662 arg(Ui) = −22.151 deg

Sd := E1·$\overline{I1}$ + E2·$\overline{I2}$ + E3·$\overline{I3}$ − Ui·$\overline{I}$

Ssp := (|I1|)^2·Z1 + (|I2|)^2·Z2 + (|I3|)^2·Z3 + (|I4|)^2·Z4

Sd = 634.217 − 89.257i Ssp = 634.217 − 89.257i

Баланс потужностей збігається.

5.4.6. Метод еквівалентного генератора

У ряді задач аналізу електричних кіл необхідно розрахувати лише один струм у одній окремій вітці. В такому випадку доцільним є застосування методу еквівалентного генератора.

Згадаємо основні закономірності, що покладені у основу методу еквівалентного генератора.

В основі методу еквівалентного генератора лежить теорема про активний двополюсник. Активний двополюсник можна замінити еквівалентним генератором, ЕРС якого дорівнює напрузі холостого ходу на затискачах двополюсника $\underline{U}_x$, а внутрішній опір дорівнює вхідному опору того ж двополюсника $\underline{Z}_{вх}$, в схемі якого відсутні всі джерела енергії, але їх внутрішні опори зберігаються. Таким чином, складну розгалужену схему розглядають як активний двополюсник до вітки із шуканим струмом, який визначається за формулою:

$$\underline{I} = \underline{U}_x / (\underline{Z} + \underline{Z}_{вх}). \qquad (5.34)$$

Нехай у схемі (рис.5. 10) потрібно визначити струм у вітці з резистором R_4.

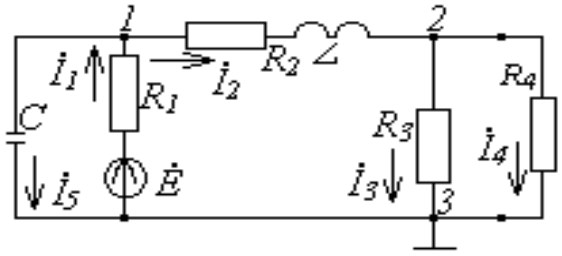
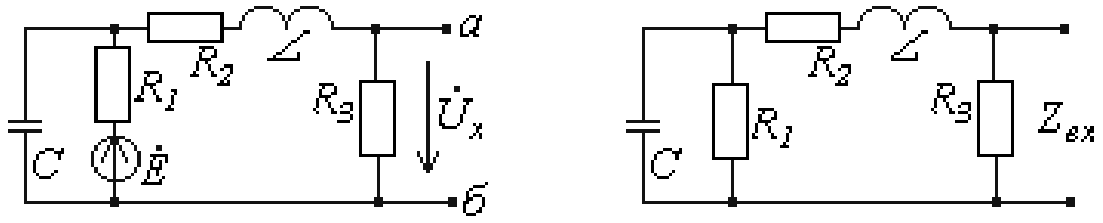


Рисунок 5.10. Схема електричного кола для розрахунку

Згідно із методом еквівалентного генератора, $\underline{U}_x$ і $\underline{Z}_{вх}$ визначаються з рис. 5.11(а, б) відповідно, а струм за формулою (5.34).



а) *б)*

Рисунок 5.11. Проміжні розрахункові схеми для знаходження: а) еквівалентної електрорушійної сили; б) евівалентного опору

Контрольні запитання до розділу 5

1. У чому переваги подання синусоїдних електричних величин комплексними числами?
2. Які є способи подання комплексної напруги та струму?
3. Зобразити миттєві струми в діючій комплексній формі:

$$i = 10\sin\left(\omega t - 25^\circ\right)\text{ А},\quad i = 7\sin\left(\omega t - 60^\circ\right)\text{ А},$$
$$i = 4\sin\left(\omega t + 60^\circ\right)\text{ А},\quad i = 2\sin\left(\omega t + 240^\circ\right)\text{ А}.$$

4. За заданими комплексами діючих значень струмів

$$\underline{I} = 6e^{-j45^\circ}\text{ А},\quad \underline{I} = 4e^{j120^\circ}\text{ А},\quad \underline{I} = 12e^{j21^\circ}\text{ А}$$

записати миттєві значення струмів.

5. Чи будуть обов'язково виконуватись баланси активної і реактивної потужностей, якщо виконується баланс повної комплексної потужності?
6. Як зобразити комплексне число в декартовій системі координат?
7. Чим відрізняються між собою взаємоспряжені комплексні числа?
8. Збільшується чи зменшується при зростанні частоти повний опір послідовного з'єднання резистора та індуктивності?
9. Збільшується чи зменшується при зростанні частоти повний опір послідовного з'єднання резистора та ємності?
10. Більший чи менший від кожного з опорів повний опір паралельного з'єднання двох резисторів?
11. Як виконати еквівалентне перетворення від з'єднання «зірка» в з'єднання «трикутник» та навпаки?
12. Чи можна згортути активну частину електричного кола з ідеальними джерелали напруги та струму?
13. Коли доцільно застосовувати метод контурних струмів?
14. Який загальний вигляд системи рівнянь, складеної за методом контурних струмів?

15. Чому наявність у колі ідеального джерела струму зменшує кількість рівнянь, що необхідно скласти за методом контурних струмів?

16. У який випадках спільний опір контурів має додатній (від'ємний) знак?

17. Розкрийте сутність методу вузлових потенціалів

18. Коли доцільно застосовувати метод вузлових потенціалів?

19. Який загальний вигляд системи рівнянь, складеної за методом вузлових потенціалів?

20. Чому наявність у колі вітки з нульовою провідністю та ідеальним джерелом ЕРС зменшує кількість рівнянь, що необхідно скласти за методом вузлових потенціалів?

21. Сформулюйте перший закон Кірхгофа. Його представлення у комплексній формі?

22. Сформулюйте другий закон Кірхгофа. Його представлення у комплексній формі?

23. В яких випадках доцільніше використовувати метод законів Кірхгофа?

24. В яких випадках доцільніше використовувати метод еквівалентного генератора?

25. Як знаходиться внутрішній опір та ЕРС еквівалентного генератора?

6. РЕЗОНАНСНІ ЯВИЩА В ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ

6.1. Резонанс в послідовному контурі. Резонанс напруг

В електричному колі на різних його ділянках реактивні опори можуть бути додатними та від'ємними і в окремих випадках можуть взаємно компенсуватися. При повній компенсації реактивних опорів в колі його вхідний опір має активний характер, вхідна напруга та струм будуть збігатися за фазою, а електричне коло не буде ні споживати, ні генерувати реактивну потужність.

Режим роботи електричного кола, якщо при наявності реактивних опорів в ньому його вхідний опір є активним, називається резонансним [2].

Умовою резонансного режиму є рівність нулю вхідного реактивного опору або реактивної провідності, тобто

$$x_{вх} = 0,\ b_{вх} = 0. \tag{6.1}$$

Частоти, при яких в колі має місце резонанс, називають *резонансними*.

Розглянемо контур (рис. 6.1), що складається з послідовно з'єднаних елементів r, L, C, і запишемо комплексний вхідний опір кола:

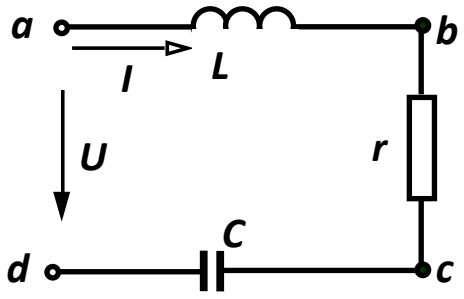


Рисунок 6.1. Послідовний коливальний контур

$$\underline{Z}_{вх} = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

Відповідно до умови (6.1), резонанс в цьому контурі можливий, якщо ємнісний опір дорівнює індуктивному опору, тобто

$$x_{вх} = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0, \tag{6.2}$$

Із (6.2) видно, що резонансного режиму можна досягнути, змінюючи або величину ємності, або індуктивність чи частоту. При постійних параметрах L та C резонансна частота:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{6.3}$$

Діюче значення струму в контурі:

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \tag{6.4}$$

Якщо амплітуда прикладеної напруги постійна, то струм в колі на момент резонансу набуває максимального значення:

$$I_0 = \frac{U}{r} \tag{6.5}$$

і, як вже було зазначено, збігається за фазою з прикладеною напругою.

Напруги на реактивних елементах при $\omega = \omega_0$ рівні між собою:

$$U_{0L} = I_0 \omega_0 L = U \frac{\omega_0 L}{r}, \quad U_{0C} = I_0 \frac{1}{\omega_0 C} = U \frac{1}{\omega_0 C r}.$$

Якщо $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} >> r$, то напруги на реактивних елементах значно перевищують вхідну напругу, тому резонанс в послідовному контурі називають *резонансом напруг*.

Величину реактивного опору в момент резонансу:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho \tag{6.6}$$

називають *характеристичним опором* (*characteristic resistance*) контура.

Важливий параметр резонансного контура – його *добротність* Q, яка є відношенням одного із реактивних опорів при резонансі до активного опору контура:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{r} = \frac{1}{\omega_0 C r} = \frac{\rho}{r} = \frac{U_{0L}}{U} = \frac{U_{0C}}{U}. \tag{6.7}$$

Добротність показує, у скільки разів напруга на кожному з реактивних елементів в резонансному режимі перевищує прикладену вхідну напругу. Добротність контурів, які використовують в радіотехніці, зазвичай, складає 50 – 300.

Величина $\alpha = \frac{1}{Q}$ називається *згасанням* контура.

6.2. Резонанс в паралельному контурі. Резонанс струмів

Нехай в паралельному ідеальному контурі (рис. 6.2) до паралельно з'єднаних елементів g, L, C приєднане ідеальне джерело струму.

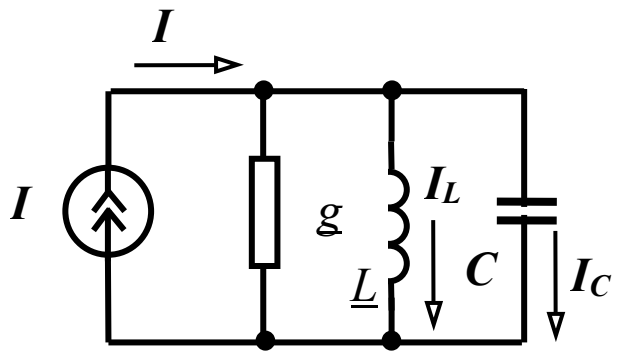


Рисунок 6.2. Ідеальний паралельний коливальний контур

Комплексна вхідна провідність кола $\underline{Y}_{вх} = g - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)$, звідки резонансна частота $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Якщо контур живиться від джерела напруги, то в режимі резонансу вхідний струм набуває мінімального значення $I_0 = Ug$, а струми у вітках з реактивними елементами можуть в багато разів перевищувати вхідний струм, тому такий резонанс називається *резонансом струмів*.

Добротність в цьому випадку визначається як відношення струму в будь-якому реактивному елементі у резонансному режимі до струму:

$$Q = \frac{I_{L0}}{I_0} = \frac{U}{\omega_0 LUg} = \frac{1}{\omega_0 Lg} = \frac{\sqrt{\frac{C}{L}}}{g}.$$

Величина $\sqrt{\frac{C}{L}}$ має розмірність провідності і називається *характеристичною провідністю* (*characteristic conductivity*) γ, тому $Q = \frac{\gamma}{g}$.

Розглянемо більш загальний випадок, коли в колі є дві паралельні вітки, які містять індуктивність і ємність з втратами (рис. 6.3).

Умовою резонансу є рівність нулю реактивної складової вхідного опору або вхідної провідності, тобто $b_1 + b_2 = 0$.

Оскільки

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{r_1 + jx_1} = \frac{r_1}{r_1^2 + x_1^2} - j\frac{x_1}{r_1^2 + x_1^2},\ \underline{Y}_2 = \frac{1}{r_2 + jx_2} = \frac{r_2}{r_2^2 + x_2^2} - j\frac{x_2}{r_2^2 + x_2^2},$$

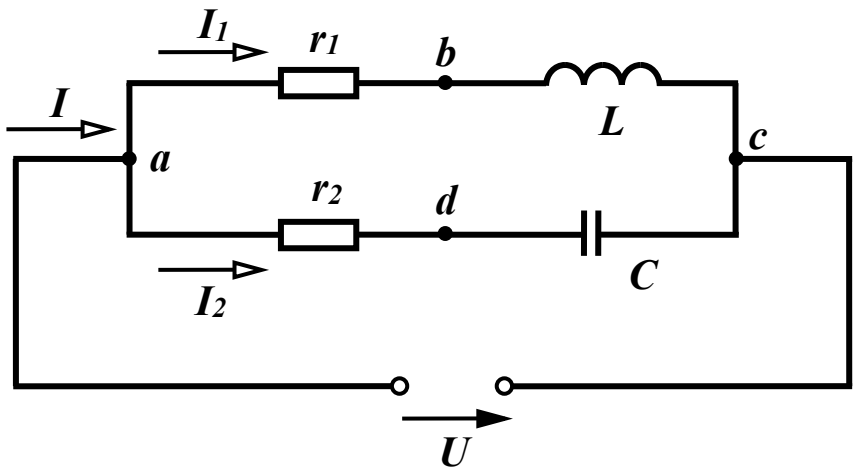


Рисунок 6.3. Реальний паралельний коливальний контур

де $x_1 = \omega L,\ x_2 = -\dfrac{1}{\omega C}$, то умову резонансу можна записати як:

$$\frac{\dfrac{1}{\omega_0 C}}{r_2^2 + \left(\dfrac{1}{\omega_0 C}\right)^2} - \frac{\omega_0 L}{r_1^2 + (\omega_0 L)^2} = 0.$$

Після нескладних перетворень визначаємо резонансну частоту:

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{r_1^2 C - L}{r_2^2 C - L}}\ . \tag{6.8}$$

Враховуючи, що $\dfrac{L}{C} = \rho^2$, запишемо:

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{r_1^2 - \rho^2}{r_2^2 - \rho^2}}\ . \tag{6.9}$$

Залежно від співвідношення між r_1, r_2 та ρ можуть бути різні випадки. Так, при $r_1 > \rho,\ r_2 < \rho$ або при $r_1 < \rho,\ r_2 > \rho$ резонансу не буде ні за якої частоти. При $r_1 << \rho,\ r_2 << \rho$ резонансна частота така сама, як і для ідеального контура $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

Нарешті, при $r_1 = r_2 = \rho$ значення резонансної частоти буде невизначеним, тобто резонанс має місце на будь-якій частоті (*байдужий резонанс*).

Контрольні запитання до розділу 6

1. Який режим електричного кола змінного струму називається резонансним?
2. Яка умова резонансу напруг?
3. Яка умова резонансу струмів?
4. Чому резонанс у послідовному контурі називають резонансом напруг, а в паралельному – резонансом струмів?
5. Чи завжди при резонансі напруг напруги на реактивних елементах більші від прикладених? Якщо ні, то чому?
6. Що таке згасання контура?
7. За яких умов напруга на окремих елементах послідовного резонансного контуру перевищує напругу на вході кола?
8. Як визначається резонансна частота паралельного контуру?
9. Яку мінімальну кількість реактивних елементів повинна мати послідовна ділянка кола, щоб у ній був можливий резонанс напруг?
10. Що називається добротністю електричного контуру і як її визначають?
11. Чи змінюється добротність контуру у разі зміни частоти?
12. Що розуміють під характеристичною провідністю?
12. Як в радіотехніці використовують явище резонансу?
13. Що таке «байдужий резонанс»?

7. КОЛА ІЗ ВЗАЄМНОЮ ІНДУКТИВНІСТЮ

7.1. Взаємоіндуктивність. Електрорушійна сила взаємоіндуктивності

Нагадаємо, що магнітний потік Φ у контурі, який утворюється електричним струмом I цього контура, називається магнітним потоком самоіндукції (рис. 7.1). Відповідне цьому потокові потокозчеплення контура (котушки) $\psi = w\Phi$ називається потокозчепленням самоіндукції, де w – кількість витків контура. Індуктивність контура через потокозчеплення та струм може бути визначена таким чином:

$$L = \frac{\psi}{i}. \tag{7.1}$$

Якщо магнітний потік, що зчіплюється з даним контуром, утворюється струмом іншого контура, то такий потік називається потоком взаємоіндукції, а відповідне потокозчеплення – потокозчепленням взаємоіндукції.

Розглянемо систему двох котушок, зображену на рис. 7.1, за умови, що з усіма витками котушки w зчіплюється один і той же потік.

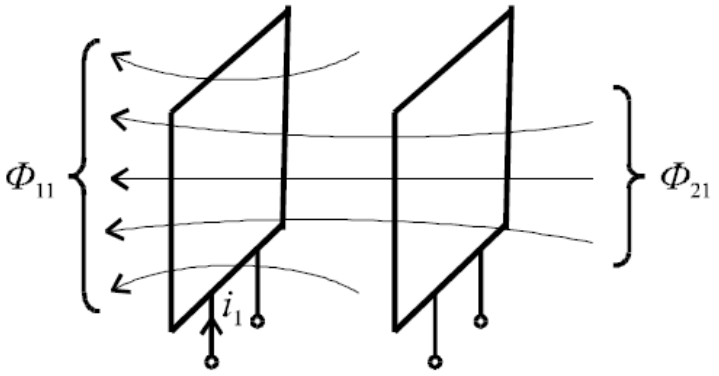


Рисунок 7.1. Принцип утворення взаємоіндуктивного зв’язку

Нехай спочатку струм $i_1 \neq 0$, а струм $i_2 = 0$. Позначимо через Φ_{11} – потік, зчеплений з першою котушкою і утворений струмом першої котушки, а Φ_{21} – потік, зчеплений з другою котушкою і утворений струмом першої котушки. Відповідні потокозчеплення: $\psi_{11} = w_1\Phi_{11}$ та $\psi_{21} = w_2\Phi_{21}$.

Тоді вираз

$$\frac{\psi_{11}}{i_1} = L_1 \tag{7.2}$$

є індуктивністю першої котушки, а відношення

$$\frac{\psi_{21}}{i_1} = M_{21} \tag{7.3}$$

є взаємоіндуктивність між другою та першою котушками.

Якщо $i_1 = 0$, а $i_2 \neq 0$, то за аналогією

$$\psi_{22} = w_2 \Phi_{22} \rightarrow \frac{\psi_{22}}{i_2} = L_2, \ a \tag{7.4}$$

$$\psi_{12} = w_1 \Phi_{12} \rightarrow \frac{\psi_{12}}{i_2} = M_{21}, \tag{7.5}$$

відповідно, індуктивність другої котушки та взаємоіндуктивність між 1-ю та 2-ю котушками.

Можна показати, що:

$$M_{12} = M_{21} = M. \tag{7.6}$$

Взаємоіндуктивність M залежить від геометричних розмірів котушок, кількості витків w_1 та w_2, магнітної проникливості середовища μ та взаємного положення котушок. Як і індуктивність, вона вимірюється в генрі (Гн).

Якщо струми є в обох котушках, то повні потокозчеплення визначаються формулами:

$$\begin{cases} \psi_1 = \psi_{11} \pm \psi_{12} = L_1 i_1 \pm M i_2; \\ \psi_2 = \psi_{22} \pm \psi_{21} = L_2 i_2 \pm M i_1. \end{cases} \tag{7.7}$$

Тут знак «+» відповідає узгодженому включенню котушок, коли потоки само- і взаємоіндукції мають однаковий напрямок, тобто додаються. Знак «-» відповідає зустрічному включенню. На рис. 7.2 показані умовні позначення узгодженого (а) та зустрічного (б) включень.

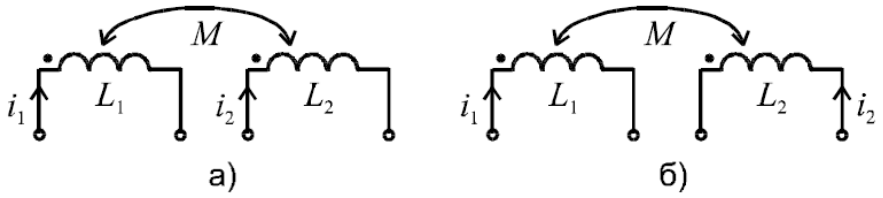


Рисунок 7.2. Умовне позначення взаємоіндуктивності на електричній схемі: а) узгодженене включення; б) зустрічне включення

Символами (•), (Δ), (*) на електричних схемах позначають умовні початки котушки. Якщо струми орієнтовані однаково відносно до таких позначень, то включення узгоджене.

Припустимо, що струми змінюються з часом. Тоді, згідно з законом електромагнітної індукції, ЕРС котушок:

$$\begin{cases} e_1 = -\dfrac{d\psi_1}{dt} = -\dfrac{d}{dt}(L_1 i_1 \pm M i_2) = e_{L1} \pm e_{M1}; \\ e_2 = -\dfrac{d\psi_2}{dt} = -\dfrac{d}{dt}(L_2 i_2 \pm M i_1) = e_{L2} \pm e_{M2}, \end{cases} \tag{7.8}$$

де e_{L1}, e_{M1}, e_{L2}, e_{M2} – ЕРС самоіндукції та взаємоіндукції.

Електричні напруги на котушках:

$$\begin{cases} u_1 = -e_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} \pm M \dfrac{di_2}{dt} = u_{L1} \pm u_{M1}; \\ u_2 = -e_2 = L_2 \dfrac{di_2}{dt} \pm M \dfrac{di_1}{dt} = u_{L2} \pm u_{M2}. \end{cases} \tag{7.9}$$

Якщо струми синусоїдальні, тоді зручніше використати комплексну форму запису:

$$\underline{U_1} = j\omega L_1 \underline{I_1} \pm j\omega M \underline{I_2} = \underline{U_{L1}} \pm \underline{U_{M1}}, \tag{7.10}$$

де $\underline{U_{M1}} = j\omega M \underline{I_2} = \underline{Z_M}\,\underline{I_2}$.

Комплексний опір взаємноіндуктивності може бути визначено таким чином:

$$\underline{Z_M} = j\omega M = j\underline{X_M}. \tag{7.11}$$

В радіотехніці та техніці зв'язку використовується поняття коефіцієнта зв'язку двох контурів:

$$k_з = \frac{\sqrt{\psi_{12}\psi_{21}}}{\sqrt{\psi_{11}\psi_{22}}} = \frac{\sqrt{Mi_1 \cdot Mi_2}}{\sqrt{L_1 i_1 \cdot L_2 i_2}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} < 1. \tag{7.12}$$

Пристрої, в яких $k_з$ можна змінювати, називаються варіометрами.

Практично це може бути система з двох з'єднаних плоских котушок, в якої рухома котушка має можливість повороту відносно нерухомої котушки, тобто коефіцієнт зв'язку змінюється за рахунок зміни взаємоіндуктивності *M*.

7.2. Послідовне з'єднання двох індуктивно зв'язаних котушок

Припустимо, що дві реальні взаємоіндуктивні котушки зв'язані послідовно і узгоджено (рис. 7.3)

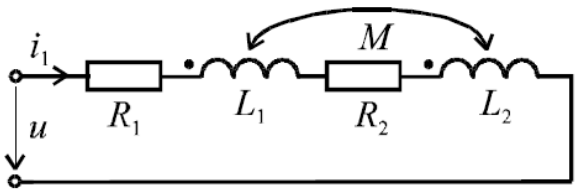


Рисунок 7.3. Схема електричного кола з послідовним з'єднанням індуктивно зв'язаних котушок (узгоджене включення)

Рівняння цього кола у миттєвій формі матиме вигляд:

$$u = R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + R_2 i + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt}, \qquad (7.13)$$

або в комплексному зображенні для діючих значень напруг і струмів:

$$\underline{U} = \underbrace{R_1 \underline{I} + j\omega L_1 \underline{I} + j\omega M \underline{I}}_{\underline{U}_{к1}} + \underbrace{R_2 \underline{I} + j\omega L_2 \underline{I} + j\omega M \underline{I}}_{\underline{U}_{к2}} = \underline{I}\underline{Z}_1 + \underline{I}\underline{Z}_2 = \underline{I}\underline{Z}, \qquad (7.14)$$

$$\text{де } \underline{Z}_1 = R_1 + j\omega(L_1 + M) = R_1 + j\omega L_{1E}, \text{ де } L_{1E} = L_1 + M \qquad (7.15)$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega(L_2 + M) = R_2 + j\omega L_{2E};\ L_{2E} = L_2 + M; \qquad (7.16)$$

$$\underline{Z} = (R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 + 2M) = R_E + j\omega L_E; \qquad (7.17)$$

$$L_E = L_1 + L_2 + 2M. \qquad (7.18)$$

Отже, при узгодженому включенні еквівалентна індуктивність кожної котушки і кола збільшується порівняно з послідовним колом без індуктивного зв'язку.

За рівнянням (7.14) можна побудувати векторну діаграму, яка показана на рис. 7.4.

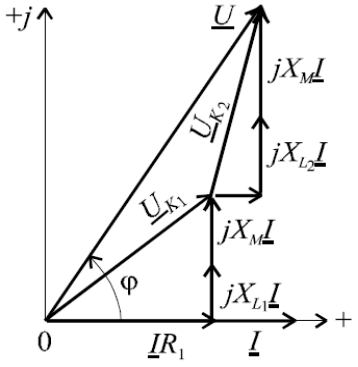


Рисунок 7.4. Векторна діаграма кола з послідовним з'єднанням індуктивно зв'язаних котушок (узгоджене включення)

Досліди узгодженого та зустрічного з'єднання дозволяють обчислити взаємоіндуктивність.

Приклад. Для кола з послідовним з'єднанням двох індуктивно-зв'язаних котушок (рис. 7.5) задано напругу та параметри схеми. Визначити діюче значення струму.

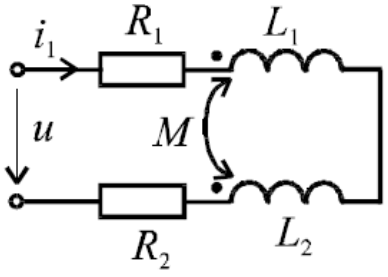


Рисунок 7.5. Схема електричного кола для розрахунку

U = 20 В;
$R_1 = R_2 = 3$ Ом;
$\omega L_1 = \omega L_2 = 10$ Ом;
$\omega M = 6$ Ом.

Розв’язання

У даному випадку маємо зустрічне включення котушок.
Повний опір кола

$$\underline{Z} = (R_1 + R_2) + j(\omega L_1 + \omega L_2 - 2\omega M) = (3+3) + j(10+10-26) =$$

$$= 6 + j8 = 10e^{j53^\circ} \ \text{Ом}.$$

Комплексне діюче значення струму:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{20}{10e^{j53^\circ}} = 2e^{-j53^\circ} \ A.$$

Діюче значення струму $I = 2$ А.

7.3. Особливості складання рівнянь для складного кола із взаємоіндуктивністю

Для складних кіл з взаємоіндуктивністю застосовують рівняння Кірхгофа та метод контурних струмів. Метод вузлових напруг, метод еквівалентного генератора, метод еквівалентних перетворювань у загальному випадку не можуть бути застосованими, оскільки не враховують індуктивних зв’язків. Якщо від дійсної схеми перейти до еквівалентної схеми без індуктивних зв’язків, тоді можна застосувати всі методи. Перехід до еквівалентної схеми без індуктивних зв’язків показано в прикладах, що наведено нижче.

Сформулюємо правила складання рівнянь за законами Кірхгофа для кіл з взаємоіндуктивними зв'язками. Розглянемо це на прикладі двоконтурної схеми (рис. 7.6). Довільно задаємось напрямами струмів віток. Цим напрямам відповідає неузгоджене включення котушок.

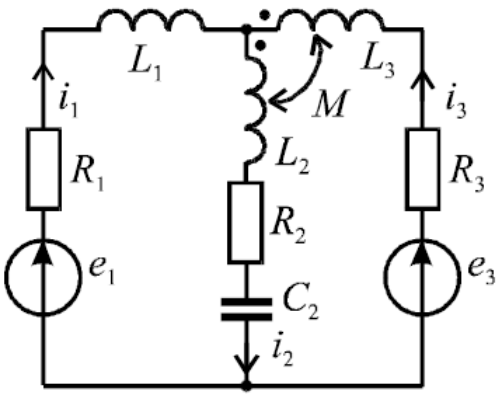


Рисунок 7.6. Розгалужене електричне коло з взаємоіндуктивністю

Зобразимо комплексну еквівалентну схему цього кола (рис. 7.7).

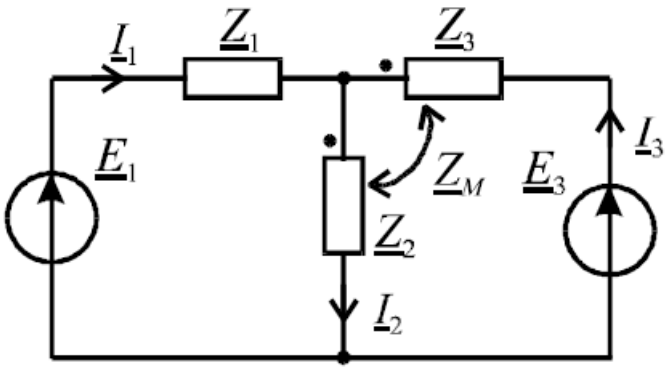


Рисунок 7.7. Комплексна еквівалентна схема електричного кола (рис. 7.6)

Складання рівняння за першим законом Кірхгофа особливостей не має:

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0.$$

Складання контурних рівнянь за другим законом Кірхгофа має особливість, яка полягає у тому, що при обході індуктивно зв'язаної котушки внесені шляхом взаємної індукції напруги записуються із тим же знаком, що і напруга від власного струму котушки, якщо вони включаються узгоджено, та з протилежним знаком, якщо вони включені зустрічно:

$$\underline{I}_1\underline{Z}_1 + \underline{I}_2\underline{Z}_2 - \underline{I}_3\underline{Z}_M = \underline{E}_1,$$
$$\underline{I}_3\underline{Z}_3 - \underline{I}_2\underline{Z}_M + \underline{I}_2\underline{Z}_2 - \underline{I}_3\underline{Z}_M = \underline{E}_3.$$

Приклад. Для схеми з паралельним з'єднанням індуктивно зв'язаних котушок (рис. 7.8) задано ЕРС та параметри елементів кола. Визначити комплексні значення струмів віток.

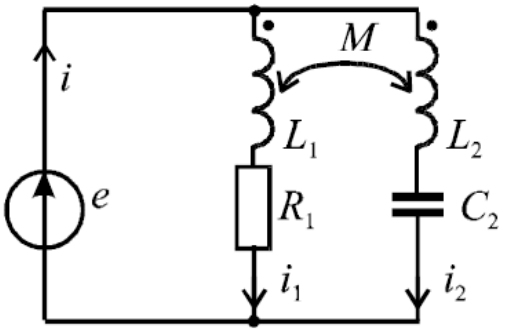


Рисунок 7.8. Схема для розрахунку

E = 10 В;
$R_1 = X_{L1} = 5$ Ом;
$X_{L2} = X_{C2} = 10$ Ом;
$X_M = 5$ Ом.

Розв’язання

Складаємо комплексну еквівалентну схему (рис. 7.9). Знайдемо комплексні параметри цієї схеми:

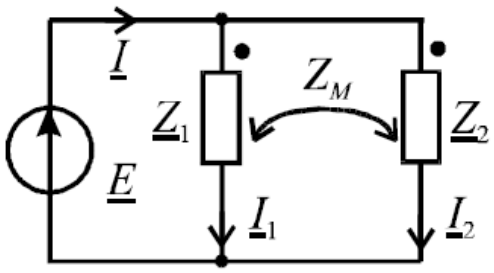


Рисунок 7.9. Комплексна еквівалентна схема електричного кола (рис. 7.8)

$$\underline{E} = 10\ B,$$
$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_{L1} = 5 + j5\ Ом,$$
$$\underline{Z}_2 = jX_{L2} - jX_{C2} = j10 - j10 = 0\ Ом,$$
$$\underline{Z}_M = jX_M = j5\ Ом,$$

Складемо систему рівнянь за законами Кірхгофа:

$$\begin{cases} \underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2; \\ \underline{I}_1\underline{Z}_1 + \underline{I}_2\underline{Z}_M = \underline{E}; \\ \underline{I}_2\underline{Z}_2 + \underline{I}_1\underline{Z}_M = \underline{E}. \end{cases}$$

З урахуванням числових значень ці рівняння матимуть вигляд:

$$\begin{cases} \underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2; \\ \underline{I}\ (5 + j5) + \underline{I}_2 j5 = 10; \\ \underline{I}_2 0 + \underline{I}_1 j5 = 10. \end{cases}$$

З третього рівняння знайдемо струм першої вітки:

$$\underline{I}_1 = \frac{10}{j5} = 2e^{-j90^\circ}\ \ A.$$

Розв’язавши систему рівнянь, отримаємо:

$$\underline{I}_2 = 2\ A,$$
$$\underline{I}_3 = 2\sqrt{2}e^{-j45^\circ}\ \ A.$$

Приклад. Для кола, схему якого показано на рис. 7.6, привести еквівалентну схему без індуктивних зв'язків.

Розв’язання

Покажемо один із штучних прийомів побудови схеми без індуктивних зв'язків. Для цього в одному контурному рівнянні системи рівнянь Кірхгофа, складених для схеми рис. 7.7, заміняємо

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_2 - \underline{I}_1.$$

і отримаємо нову систему контурних рівнянь:

$$\begin{cases} \underline{I}_1(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_M) + \underline{I}_2(\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M) = \underline{E}_1; \\ \underline{I}_2(\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M) + \underline{I}_3(\underline{Z}_3 - \underline{Z}_M) = \underline{E}_3. \end{cases}$$

Отриманій системі рівнянь відповідає еквівалентна схема без індуктивних зв'язків (рис. 7.10).

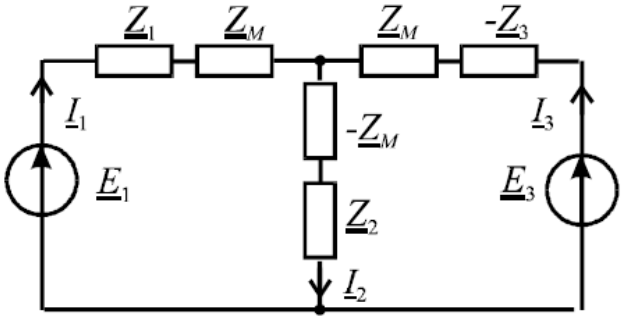


Рисунок 7.10. Еквівалентна схема електричного кола без індуктивних зв'язків

Контрольні запитання до розділу 7

1. Що таке взаємоіндуктивність? У яких одиницях вона визначається?
2. Що таке потокощеплення? У яких одиницях воно визначається?
3. Що таке магнітний потік? У яких одиницях він визначається?
4. Яка фізична природа взаємоіндуктивності?
5. Які причини виникнення взаємоіндуктивного зв’язку?
6. Які існують два види взаємоіндуктивних звязків?
7. Як позначається взаємоіндуктивність на електричній схемі?
8. Які методи розрахунку можуть бути застосовані для розрахунку електричних кіл із взаємоіндуктивністю?
9. Що таке коефіцієнт взаємоіндуктивного зв’язку? Для чого він використовується?
10. У яких межах може змінюватися значення коефіцієнта взаємоіндуктивного зв’язку?
11. Що відбувається з магнітним полем індуктивно зв’язаних котушок при різних видах взаємоіндуктивного зв'язку?
12. Які методи розрахунку електричного кола можуть бути застосовані для розрахунку кіл з взаємоіндуктивністю без усунення індуктивного зв’язку?

8. ЧОТИРИПОЛЮСНИКИ ТА ЇХНІ ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ

8.1. Основні рівняння чотириполюсника

Електричне коло (рис. 8.1), яке містить дві пари затискачів (виводів, полюсів), за допомогою яких воно може бути приєднане до інших кіл, називається *чотириполюсником [1]*.

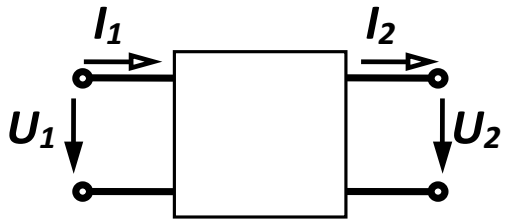


Рисунок 8.1. Умовне зображення чотириполюсника

Ліві затискачі називають *вхідними* (*первинними*), праві – *вихідними* (*вторинними*).

Цей клас кіл, зазвичай, розглядають у тих випадках, коли необхідно знати лише струми та напруги на вході і виході чотириполюсника. Теорія чотириполюсників дозволяє знаходити зв'язок між цими величинами, не виконуючи розрахунків струмів та напруг всередині самого чотириполюсника, схема якого може бути складною і навіть невідомою.

У залежності від внутрішніх параметрів та схем чотириполюсників їх можна класифікувати за різними ознаками.

Якщо чотириполюсник містить всередині джерела енергії, його називають *активним*, за відсутності всередині джерел енергії – чотириполюсник *пасивний*. За наявністю всередині чотириполюсника лише лінійних елементів його називають *лінійним;* якщо в ньому міститься хоча б один нелінійний елемент, чотириполюсник є *нелінійним*.

Розрізняють *симетричні* і *несиметричні* чотириполюсники. Чотириполюсник називається *симетричним*, якщо при взаємній заміні вхідних затискачів на вихідні не змінюються струми та напруги в колах, з якими він з'єднаний. Чотириполюсники, що не задовольняють цю умову, є *несиметричними*.

Надалі розглядаються лише пасивні лінійні чотириполюсники.

Знайдемо співвідношення, які пов'язують між собою вхідні та вихідні параметри чотириполюсники, а саме залежність вигляду:

$$\left(\underline{U}_1, \underline{I}_1\right) = f\left(\underline{U}_2, \underline{I}_2\right).$$

В матричній формі її можна записати як:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}, \tag{8.1}$$

а в звичайному вигляді:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 &= \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2 \end{aligned}. \tag{8.2}$$

Отримані рівняння називаються *основними рівняннями чотириполюсника*, а їх коефіцієнти називаються $\underline{A}$-параметрами.

В загальному випадку $\underline{A}$-параметри є комплексними величинами і мають різні розмірності: $\underline{A}_{11}$ та $\underline{A}_{22}$ – безрозмірні, $\underline{A}_{12}$ має розмірність опору, а $\underline{A}_{21}$ – розмірність провідності.

Відзначимо важливу властивість $\underline{A}$-параметрів – визначник матриці $[\underline{A}]$ завжди дорівнює одиниці.

$$\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1. \tag{8.3}$$

З виразу (8.3) випливає, що лише три $\underline{A}$-параметри з чотирьох є незалежними.

Для симетричного чотириполюсника повинна виконуватись рівність:

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}. \tag{8.4}$$

8.2. Визначення параметрів чотириполюсників

Як уже відзначалося, внутрішня схема чотириполюсника може бути невідомою, тому часто визначати коефіцієнти чотириполюсника доводиться дослідним шляхом. Оскільки чотириполюсник має три незалежних параметри, то необхідно виконати досліди із знаходження вхідних комплексних опорів чотириполюсника при трьох різних, бажано стандартних, режимах. Такими дослідами зазвичай є досліди короткого замикання та холостого ходу.

Режим прямого короткого замикання

В цьому режимі вихідні затискачі замкнені накоротко, напруга $\underline{U}_2 = 0$ і рівняння (16.2) приймають вигляд $\underline{U}_{1к} = \underline{A}_{12}\underline{I}_{2к},\ \underline{I}_{1к} = \underline{A}_{22}\underline{I}_{2к}$.

З цих рівнянь випливає, що $\underline{A}_{12} = \dfrac{\underline{U}_{1к}}{\underline{I}_{2к}},\ \underline{A}_{22} = \dfrac{\underline{I}_{1к}}{\underline{I}_{2к}},$ а вхідний опір чотириполюсника зі сторони первинних затискачів:

$$\underline{Z}_{1к} = \frac{\underline{U}_{1к}}{\underline{I}_{1к}} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}}. \tag{8.5}$$

Режим прямого холостого ходу

Вихідні затискачі в цьому випадку розімкнені, струм $\underline{I}_2 = 0$ і основні рівняння $\underline{U}_{1x} = \underline{A}_{11}\underline{U}_{2x},\ \underline{I}_{1x} = \underline{A}_{21}\underline{U}_{2x}$.

З цих рівнянь випливає, що $\underline{A}_{11}=\dfrac{\underline{U}_{1x}}{\underline{U}_{2x}}$, $\underline{A}_{21}=\dfrac{\underline{I}_{1x}}{\underline{U}_{2x}}$, а вхідний опір чотириполюсника зі сторони первинних затискачів:

$$\underline{Z}_{1x}=\frac{\underline{U}_{1x}}{\underline{I}_{1x}}=\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}}. \tag{8.6}$$

Режим зворотного короткого замикання

В цьому режимі чотириполюсник живиться зі сторони вторинних затискачів при короткому замиканні первинних. При зміні напрямку передавання енергії міняються місцями коефіцієнти $\underline{A}_{11}$ та $\underline{A}_{22}$, тому вхідний опір зі сторони вторинних затискачів знайдемо з (8.5), замінюючи $\underline{A}_{22}$ на $\underline{A}_{11}$:

$$\underline{Z}_{2к}=\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}}. \tag{8.7}$$

З виразів (8.3), (8.5), (8.6), (8.7) випливає:

$$\underline{A}_{11}=\sqrt{\frac{\underline{Z}_{1x}\underline{Z}_{1к}}{\underline{Z}_{2к}\left(\underline{Z}_{1x}-\underline{Z}_{1к}\right)}},\ \underline{A}_{12}=\underline{A}_{11}\underline{Z}_{2к},\ \underline{A}_{21}=\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{Z}_{1x}},\ \underline{A}_{22}=\underline{A}_{11}\frac{\underline{Z}_{2к}}{\underline{Z}_{1к}}. \tag{8.8}$$

8.3. Найпростіші чотириполюсники

Знайдемо $\underline{A}$-параметри найпростіших чотириполюсників, що складаються лише з одного елемента (рис. 8.2).

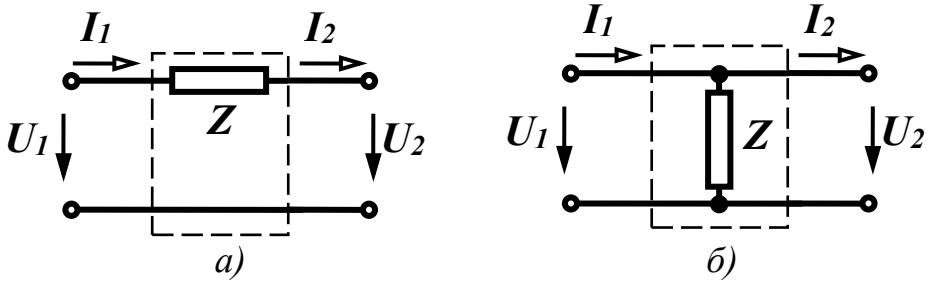


Рисунок 8.2. Електричні схеми найпростіших чотириполюсників

Знання $\underline{A}$-параметрів таких чотириполюсників дозволить отримувати параметри чотириполюсників багатьох типових структур. Відзначимо, що обидва чотириполюсники симетричні, тому вони характеризуються двома незалежними параметрами.

Знайдемо $\underline{A}$-параметри першого чотириполюсника (рис. 8.2(*а*)) за допомогою дослідів короткого замикання та холостого ходу. Із схеми видно, що $\underline{Z}_{1к}=\underline{Z}$, $\underline{Z}_{1x}=\infty$.

Підставивши ці значення в (8.5) і позбувшись невизначеності, отримаємо $\underline{A}_{11}=1,\ \underline{A}_{12}=\underline{Z},\ \underline{A}_{21}=0,\ \underline{A}_{22}=1$, тобто $[\underline{A}]=\begin{bmatrix}1 & \underline{Z}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

Для чотириполюсника (рис. 8.2(*б*)) $\underline{Z}_{1к}=0,\ \underline{Z}_{1x}=\underline{Z}$. Звідси $\underline{A}_{11}=1,\ \underline{A}_{12}=0,$ $\underline{A}_{21}=\dfrac{1}{\underline{Z}},\ \underline{A}_{22}=1$ і матриця $\underline{A}$-параметрів $[\underline{A}]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \dfrac{1}{\underline{Z}} & 1\end{bmatrix}$.

Визначимо тепер $\underline{A}$-параметри більш складного чотириполюсника (рис. 8.3).

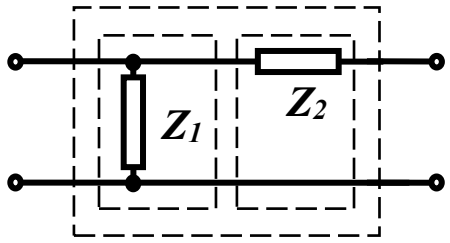


Рисунок 8.3. Електрична схема Г-подібного чотириполюсника

Цей чотириполюсник вже не є симетричним, тому для нього визначимо три параметри: $\underline{Z}_{1к}=\dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2},\ \underline{Z}_{2к}=\underline{Z}_2,\ \underline{Z}_{1x}=\underline{Z}_1$.

Тоді:

$$\underline{A}_{11}=\sqrt{\frac{\underline{Z}_1\dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}}{\underline{Z}_2\left(\underline{Z}_1-\dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}\right)}}=\sqrt{\frac{\underline{Z}_1^2}{\left(\underline{Z}_1^2+\underline{Z}_1\underline{Z}_2-\underline{Z}_1\underline{Z}_2\right)}}=1,$$

$$\underline{A}_{12}=\underline{Z}_2,\ \underline{A}_{21}=\frac{1}{\underline{Z}_1},\ \ \underline{A}_{22}=1+\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}$$

і матриця $\underline{A}$-параметрів:

$$[\underline{A}]=\begin{bmatrix}1 & \underline{Z}_2\\ \dfrac{1}{\underline{Z}_1} & 1+\dfrac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}\end{bmatrix}.$$

8.4. Характеристичні параметри чотириполюсників

Чотириполюсники як складові частини складного електричного кола часто застосовують в пристроях передавання інформації, і в цих випадках важливо знати, яким чином чотириполюсник впливає на проходження сигналу, тобто як змінюється його амплітуда та фаза. Для такого оцінювання $\underline{A}$-параметри чотириполюсника малоінформативні, тому вводять інші параметри – *характеристичні*.

Визначимо їх лише для симетричних чотириполюсників. Незалежних $\underline{A}$-параметрів у симетричного чотириполюсника два, тому і характеристичних параметрів теж два. Одним з них є *характеристичний опір* $\underline{Z}_c$.

Це такий опір, при приєднанні якого до вихідних затискачів чотириполюсника (як навантаження), його вхідний опір також дорівнює $\underline{Z}_c$ (рис. 8.4).

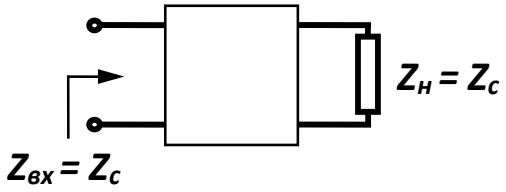


Рисунок 8.4. Схема чотириполюсника з навантаженням

Характеристичний опір визначається, як:

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}} = \sqrt{\underline{Z}_{1к}\,\underline{Z}_{1x}}\ . \qquad (8.9)$$

Якщо чотириполюсник навантажений характеристичним опором, його режим роботи називають *узгодженим*.

Другим характеристичним параметром є *стала передачі* (*transfer constant*), яка знаходиться як:

$$\underline{g} = ln\left(\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21}}\right). \qquad (8.10)$$

Це комплексне число, яке в алгебраїчній формі можна записати у вигляді $\underline{g} = a + jb$, де величина a показує, як змінюється величина напруги чи струму при проходженні через чотириполюсник, і називається *коефіцієнтом згасання*, а b характеризує зміну фази напруги або струму і називається *фазовим коефіцієнтом*.

Основні рівняння чотириполюсника можна також виразити через характеристичні параметри:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 ch\underline{g} + \underline{Z}_c \underline{I}_2 sh\underline{g} \\ \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} sh\underline{g} + \underline{I}_2 ch\underline{g} \end{aligned} . \qquad (8.11)$$

Контрольні запитання до розділу 8

1. Що називається чотириполюсником?
2. Що відображають основні рівняння чотириполюсника?
3. Що таке характеристичні параметри чотириполюсника?
4. Для чого використовуються $\underline{A}$-параметри?
5. Яку розмірність мають $\underline{A}$-параметри чотириполюсника?
6. Як можна визначити $\underline{A}$-параметри чотириполюсника?
7. Чим відрізняється симетричний чотириполюсник від несиметричного?
8. Що таке схема заміщення чотириполюсника?
9. Запишіть основне рівняння читириполюсника.
10. Яке коло можна представити у вигляді чотириполюсника?
11. Зобразіть електричні схеми найпростіших чотириполюсників.
12. Що розуміють під коефіцієнтом згасання? Фазовим коефіцієнтом?
13. Який режим роботи чотириполюсника називають узгодженим?

9. ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ТРИФАЗНОГО ЗМІННОГО СТРУМУ

9.1. Основні поняття та співвідношення

Для генерації та передачі електромагнітної енергії великої потужності широке практичне застосування набули електричні кола трифазного струму.

Трифазне електричне коло являє собою сукупність трьох електричних кіл, що називають фазами, в яких діють три ЕРС однакової частоти, що зміщені одна відносно другої за фазою та утворені єдиним джерелом енергії. Таким джерелом зазвичай є електромашинний генератор з трьома однаковими обмотками, зміщеними одна відносно одної на 1/3 оберту.

Якщо ЕРС генератора мають однакову амплітуду та зміщені за фазою між собою на один і той самий кут ($2\pi/3$)

$$\begin{aligned} e_A(t) &= E_m \sin(\omega t), \\ e_B(t) &= E_m \sin(\omega t - 120°), \\ e_C(t) &= E_m \sin(\omega t - 240°). \end{aligned} \tag{9.1}$$

то така система ЕРС називається симетричною. Фази трифазної системи позначають буквами *A, B, C (інколи 1,2,3).*

Зміну в часі ЕРС та векторну діаграму трифазного генератора подано на рис. 9.1 та рис. 9.2.

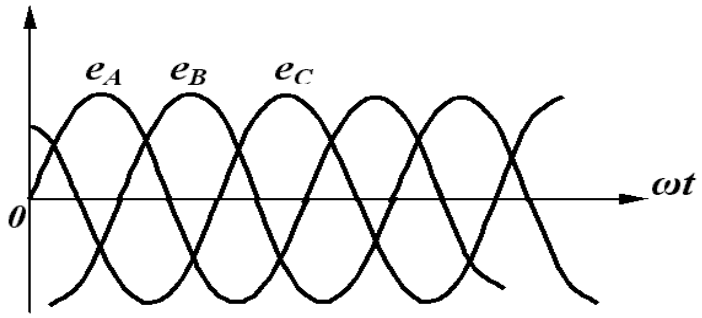


Рисунок 9.1. Хвильова діаграма напруг у симетричному трифазному колі

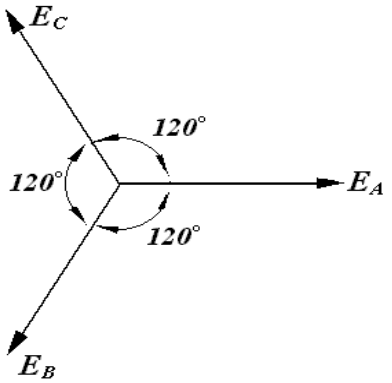


Рисунок 9.2. Векторна діаграма напруг у симетричному трифазному колі

На рис. 9.3 зображена трифазна система, фази якої не мають електричного зв'язку між собою.

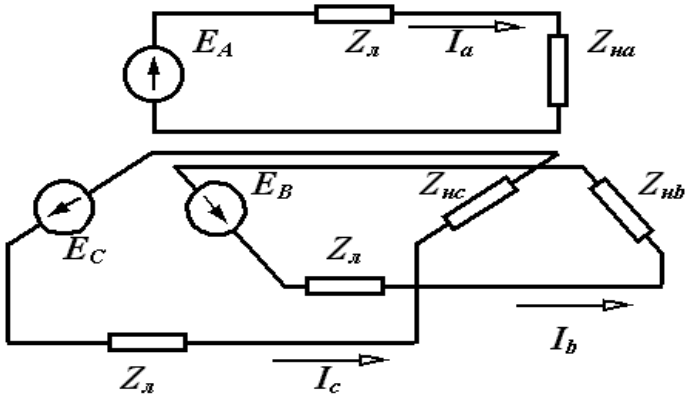


Рисунок 9.3. Трифазна система, фази якої не мають електричного зв'язку між собою

Струми кожної фази можна визначити за законом Ома:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{E}_A}{\underline{Z}_л + \underline{Z}_A},\ \underline{I}_B = \frac{\underline{E}_B}{\underline{Z}_л + \underline{Z}_B},\ \underline{I}_C = \frac{\underline{E}_C}{\underline{Z}_л + \underline{Z}_C}. \qquad (9.2)$$

Якщо з'єднати фази в точках О та О', то одержимо чотирипровідне трифазне електричне коло (рис. 9.4(а)).

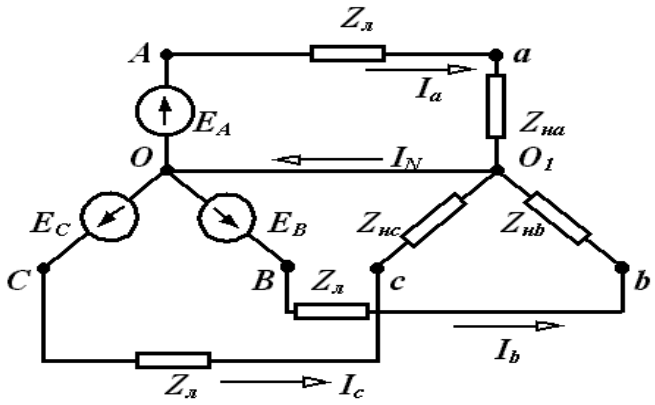
Провід, що з'єднує точки О та О', називається нейтральним або НУЛЬОВИМ, а струм у ньому дорівнює сумі струмів усіх трьох фаз:

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C .$$

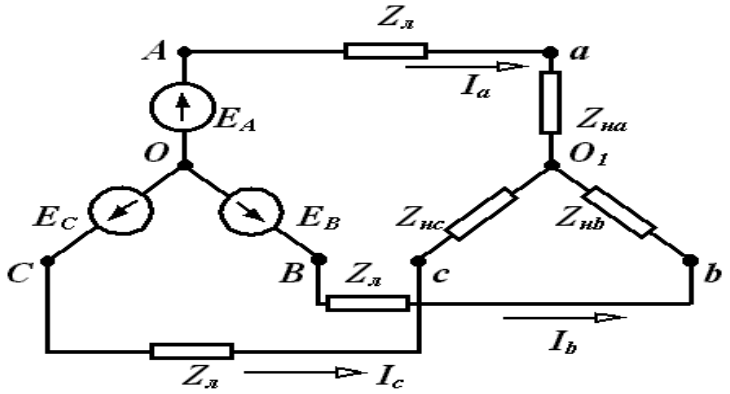
Якщо в трифазному колі діє симетрична трифазна система ЕРС, а опори в кожній фазі однакові ($\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = ze^{j\varphi}$), то таке трифазне електричне коло називається симетричним.

Струми у фазах в такому випадку будуть однакові за величиною та зміщені на кут φ відносно ЕРС відповідних фаз, тобто утворюватимуть симетричну трифазну систему струмів. В цьому випадку струм у нульовому проводі, який визначається за (9.3), буде дорівнювати нулю, і чотирипровідне коло можна замінити трипровідним (рис. 9.4(б)). Це так зване сполучення зіркою. Схеми на рис. 9.4 доводять, що передача однієї і тієї самої потужності трифазною системою струмів набагато вигідніша, ніж за допомогою трьох однофазних кіл (замість шести проводів потрібно тільки три).

Теоретично можливе й інше сполучення генератора в трифазній системі – сполучення трикутником. На перший погляд здається, що в цьому випадку обмотки генератора закорочені, проте варто пам'ятати, що ми маємо симетричну трифазну систему ЕРС.



а)



б)

Рисунок 9.4. Трифазне електричне коло (з'єднання навантаження в зірку): а) з нульовим проводом; б) без нульового проводу

Отже, сумарна ЕРС трикутника $\underline{E} = \underline{E}_{AB} + \underline{E}_{BC} + \underline{E}_{CA}$ буде дорівнювати нулю. На практиці схема з'єднання генератора трикутником не застосовується.

Варто відзначити, що крім схем сполучення генератора і навантаження, наведених вище, можна застосувати і комбіновані схеми, з'єднуючи, наприклад, генератор зіркою, а споживачі енергії – трикутником.

В трифазних електричних колах розрізняють лінійні та фазні напруги і струми.

Проводи, що сполучаються, фази генератора та споживача, називаються лінійними. Відповідні струми в них називаються лінійними ($I_{ЛА}$, $I_{ЛВ}, I_{ЛС}$, рис. 9.5)

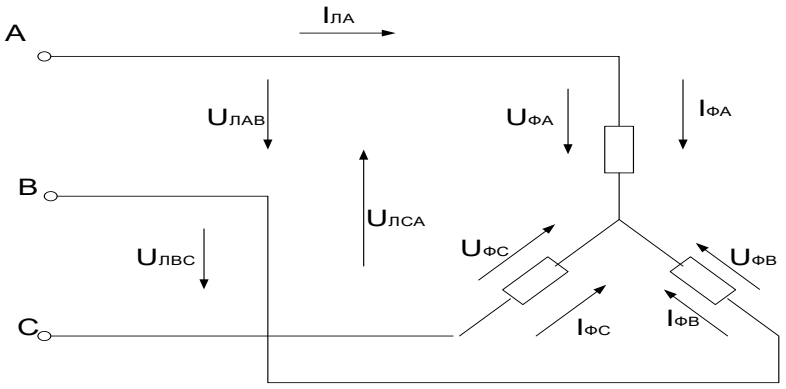
Напруги між лінійними проводами ($U_{ЛАВ}$, $U_{ЛВС}, U_{ЛСА}$, рис. 9.5) називають лінійними напругами.

Струми, що протікають в фазах споживача ($I_{ФА}$, $I_{ФВ}$, $I_{ФС}$, рис. 9.5), а також ($I_{ФАВ}$, $I_{ФВС}$, $I_{ФСА}$, рис. 9.4(б)), називають фазними струмами. Напруги на фазах споживача $U_{ФА}$, $U_{ФВ}, U_{ФС}$, (рис. 9.5(а)) та $U_{ФАВ}$, $U_{ФВС}, U_{ФСА}$, (рис. 9.5(б)) називаються фазними напругами.

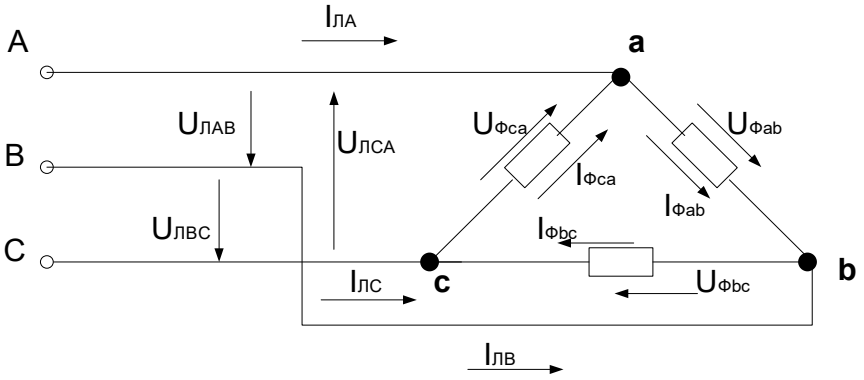
Зв'язок міх фазними і лінійними напругами при з'єднанні зіркою визначається, як видно з рис. 9.5(а), співвідношеннями:

$$\underline{I}_{ЛА} = \underline{I}_{ФА};\ \underline{I}_{ВЛ} = \underline{I}_{ФВ};\ \underline{I}_{ЛС} = \underline{I}_{ФС};\tag{9.4}$$

$$\underline{U}_{ЛАВ} = \underline{U}_{ФА} - \underline{U}_{ФВ};\ \underline{U}_{ЛВС} = \underline{U}_{ВФ} - \underline{U}_{ФС};\ \underline{U}_{ЛСА} = \underline{U}_{ФС} - \underline{U}_{ФА};.\tag{9.5}$$



а)



б)

Рисунок 9.5. Схеми з’єднання навантаження у трифазних електричних колах: а) з’єднання в зірку; б) з’єднання в трикутник

Лінійний струм в цьому випадку дорівнює фазному, а лінійна напруга – різниці відповідних фазних напруг. Якщо трифазне коло симетричне, то фазні напруги за модулем однакові, а за фазою зміщені одна від одної на кут $\frac{2\pi}{3}$, тобто для діючих значень напруг маємо:

$$U_{Л} = \sqrt{3}U_{Ф}.\tag{9.6}$$

Для сполучення трикутником (рис. 9.5(б))

$$\underline{U}_{ЛАВ} = \underline{U}_{ФАВ};\ \underline{U}_{ЛВС} = \underline{U}_{ФВС};\ \underline{U}_{ЛСА} = \underline{U}_{ФСА};\tag{9.7}$$

$$\underline{I}_{ЛА} = \underline{I}_{ФЛВ} - \underline{I}_{ФСА};\ \underline{I}_{ЛВ} = \underline{I}_{ФВС} - \underline{I}_{ФАВ};\ \underline{I}_{ЛС} = \underline{I}_{ФСА} - \underline{I}_{ФВС};\tag{9.8}$$

тобто лінійні напруги дорівнюють фазним, а лінійні струми – різниці відповідних фазних струмів. У випадку симетричного трикутника діюче значення лінійного струму в $\sqrt{3}$ разів більше за фазне:

$$I_{Л} = \sqrt{3} I_{Ф}. \tag{9.9}$$

9.2. Розрахунок трифазних кіл

Трифазне електричне коло може розглядатися як розгалужене з кількома джерелами, і до нього можуть бути застосовані усі відомі методи розрахунків електричних кіл.

У випадку симетричного трифазного кола розрахунок значно спрощується. Так, для симетричного сполучення «зірка – зірка» (рис. 9.4), як показано вище, потенціали точок O та O' однакові незалежно від наявності нульового проводу. Для розрахунку такого кола достатньо визначити струм тільки в одній фазі (частіше в фазі A):

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{E}_A}{\underline{Z}_Л + \underline{Z}_A}.$$

Якщо ввести $a = e^{j120°}$ - оператор оберту на 120° ($a^2 = e^{-j120°}$; $a^3 = 1$), то струми в фазах В та С можуть бути визначені за допомогою співвідношень:

$$\underline{I}_B = \underline{I}_A \cdot e^{-j120°} = \underline{I}_A \cdot a^2;\ \underline{I}_C = \underline{I}_A \cdot e^{j120°} = \underline{I}_A \cdot a;. \tag{9.10}$$

Якщо симетричний споживач сполучений трикутником, то фазні струми можуть бути знайдені з таеих виразів:

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{E}_A - \underline{E}_B}{\underline{Z}_{AB}};\ \underline{I}_{BC} = \underline{I}_{AB} \cdot e^{-j120°} = \underline{I}_{AB} \cdot a^2;\ \underline{I}_{CA} = \underline{I}_{AB} \cdot e^{-j120°} = \underline{I}_{AB} \cdot a^2.$$

Лінійний струм I_A знаходяться за першим законом Кірхгофа:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{CA}.$$

Струми в фазах В і С можуть бути визначені за допомогою співвідношень (9.10). В симетричній схемі при з'єднанні «трикутником» лінійний струм більший за фазний в $\sqrt{3}$ рази. На рис. 9.6 наведені векторні діаграми струмів та напруг для випадків з'єднання симетричними «зіркою» (а) та «трикутником» (б).

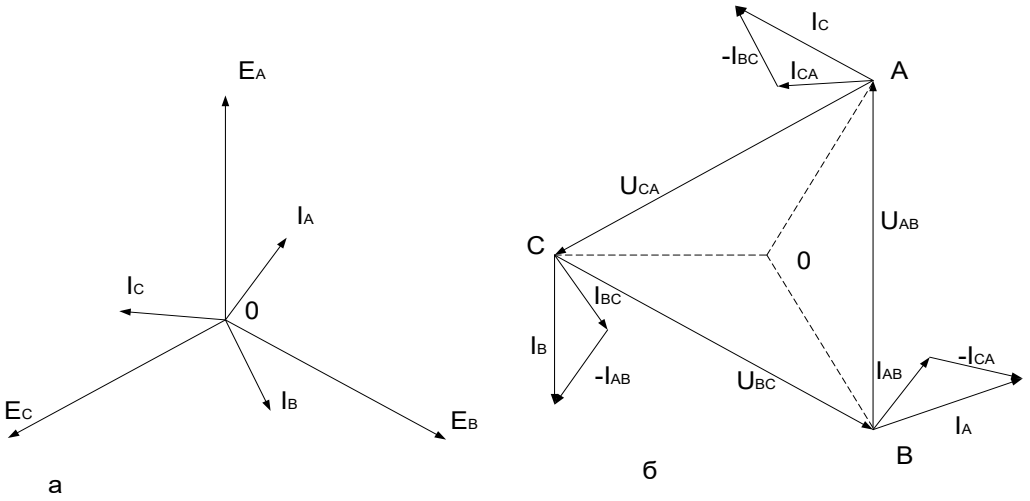


Рисунок 9.6. Векторні діаграми струмів та напруг для: а) з'єднання симетричною зіркою; б) симетричним трикутником

9.3. Розрахунок несиметричних трифазних кіл

Трифазне коло несиметричне, якщо опори його фаз неоднакові. Несиметричною може бути діюча в колі система ЕРС. Для розрахунку несиметричного кола застосовують різні методи залежно від його схеми і виду несиметрії. Випадок, коли маємо з'єднання «зіркою» (рис. 9.7).

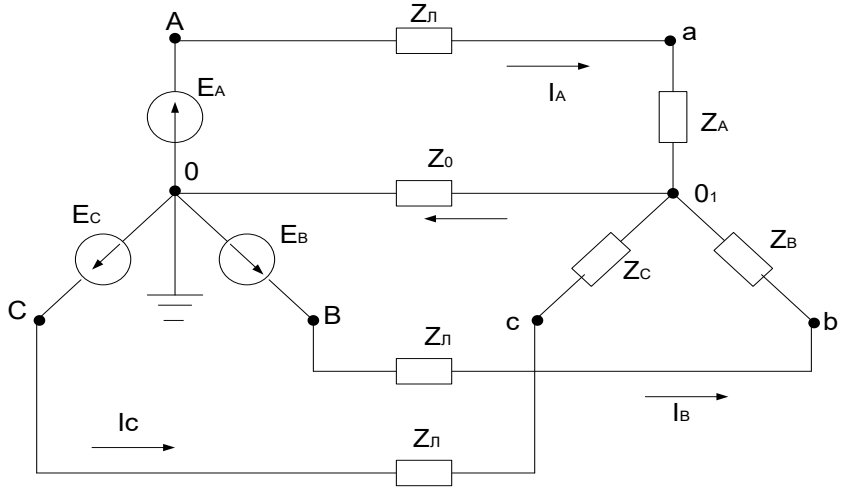


Рисунок 9.7. Трифазне електричне коло, з'єднане в зірку з нульовим проводом

Найзручнішим методом розрахунку є метод двох вузлів (частинний випадок методу вузлових потенціалів).

Напруга між вузлами $\underline{U}_{0_1 0}$ (так зване зміщення нейтралі) може бути обчислена за допомогою співвідношення:

$$\underline{U}_{0_1 0} = \underline{\phi}_{0_1} - \underline{\phi}_0 = \frac{\underline{E}_A \underline{Y}_A + \underline{E}_B \underline{Y}_B + \underline{E}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_0}, \qquad (9.11)$$

де $\underline{Y}_A$, $\underline{Y}_B$, $\underline{Y}_C$ та $\underline{Y}_0$ – комплекси провідностей фаз та нульового проводу відповідно.

Лінійні струми, які в цьому випадку дорівнюють фазним, та струм нульового проводу обчислюються за допомогою закону Ома:

$$\begin{aligned}
\underline{I}_A &= (\underline{E}_A - \underline{U}_{0_1 0})\underline{Y}_A; \\
\underline{I}_B &= (\underline{E}_B - \underline{U}_{0_1 0})\underline{Y}_B; \\
\underline{I}_C &= (\underline{E}_C - \underline{U}_{0_1 0})\underline{Y}_C; \\
\underline{I}_0 &= \underline{U}_{0_1 0}\underline{Y}_0.
\end{aligned} \tag{9.12}$$

Якщо опором нульового проводу можна знехтувати ($Z \approx 0$, $Y_0 \approx \infty$), тоді $\underline{U}_{0_1 0} \approx 0$ і струми визначаються за законом Ома.

$$\begin{aligned}
\underline{I}_A &= \underline{E}_A \underline{Y}_A; \\
\underline{I}_B &= \underline{E}_B \underline{Y}_B; \\
\underline{I}_C &= \underline{E}_C \underline{Y}_C; \\
\underline{I}_0 &= \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C.
\end{aligned} \tag{9.13}$$

У випадку відсутності нульового проводу в співвідношенні (9.11) приймаємо $Y_0 = 0$ та $I_0 = 0$.

На рис. 9.8 показана векторна діаграма напруг та струмів для з'єднання несиметричною зіркою.

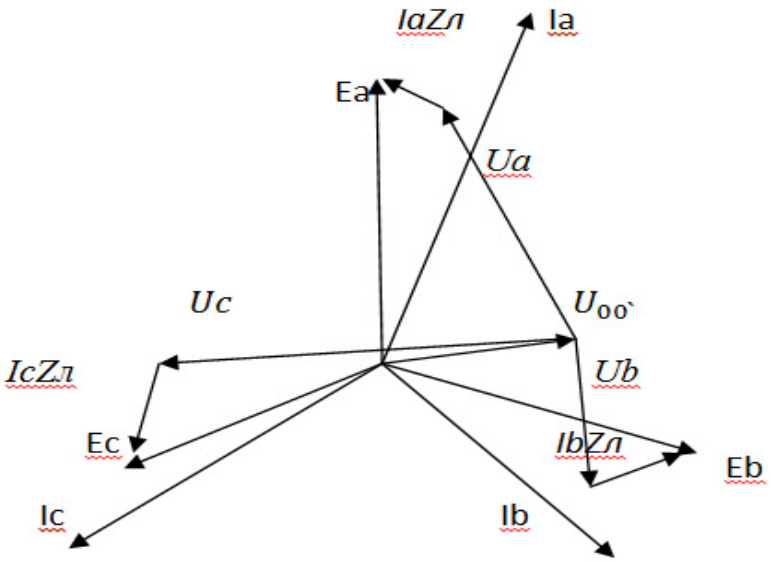


Рисунок 9.8. Векторна діаграма напруг та струмів для з'єднання несиметричною зіркою.

9.4. Потужність у трифазних електричних колах

Миттєва потужність у трифазному симетричному колі складається з потужностей окремих фаз:

$$p = u_{A\Phi} i_{A\Phi} + u_{B\Phi} i_{B\Phi} + u_{C\Phi} i_{C\Phi},$$

де

$$\begin{aligned} u_{A\Phi}(t) &= U_{m\phi} \sin(\omega t), & i_{A\Phi}(t) &= I_{m\phi} \sin(\omega t - \phi), \\ u_{B\Phi}(t) &= U_{m\phi} \sin(\omega t - 120°), & i_{B\Phi}(t) &= I_{m\phi} \sin(\omega t - 120° - \phi), \\ u_{C\Phi}(t) &= U_{m\phi} \sin(\omega t + 120°), & i_{C\Phi}(t) &= I_{m\phi} \sin(\omega t + 120° - \phi). \end{aligned}$$

З урахуванням цього:

$$\begin{aligned} p = U_{m\phi} \sin \omega t \, I_{m\phi} \sin(\omega t - \phi) + U_{m\phi} \sin(\omega t - 120^o) \times I_{m\phi} \sin(\omega t - 120^o - \phi) + \\ + U_{m\phi} \sin(\omega t - 240^o) \times I_{m\phi} \sin(\omega t - 240^o - \phi) = \frac{U_{m\phi} I_{m\phi}}{2} [\cos\phi - \cos(2\omega t - \phi) + \\ + \cos\phi - \cos(2\omega t - 240^o - \phi) + \cos(\phi) - \cos(2\omega t - 480^o - \phi)] = \\ = \frac{3}{2} U_{m\phi} I_{m\phi} \cos(\phi) = 3 U_{\phi} I_{\phi} \cos(\phi). \end{aligned} \tag{9.14}$$

Тобто, миттєва потужність є сталою величиною. Ця обставина дає ще одну перевагу трифазним системам. Двигуни, що мають сталу миттєву потужність та незмінний пусковий момент, працюють у більш сприятливих умовах.

Середня потужність за період, тобто активна потужність, дорівнює миттєвій:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = 3 U_{\phi} I_{\phi} \cos\phi. \tag{9.15}$$

Оскільки потужність однієї фази $P_{\phi} = U_{\phi} I_{\phi} \cos\varphi$, то потужність симетричного трифазного кола дорівнює потрійному значенню потужності однієї фази. Через те, що у симетричному трифазному колі при з'єднанні «зіркою» $I_л = I_{\phi}$, $U_л = \sqrt{3} \cdot U_{\phi}$, а при з'єднанні «трикутником» $I_л = \sqrt{3} I_{\phi}$, $U_л = U_{\phi}$, активну потужність можна виразити за допомогою лінійних величин незалежно від виду з'єднання:

$$P = \sqrt{3} \cdot U_л I_л \cos(\phi). \tag{9.16}$$

Якщо трифазне коло несиметричне, то активна потужність дорівнює сумі активних потужностей окремих фаз:

$$P=P_A+P_B+P_C. \quad (9.17)$$

Аналогічно визначаються реактивні потужності.

Контрольні запитання до розділу 9

1. Що називається трифазним електричним колом?
2. Які переваги передачі енергії за допомогою трифазної мережі порівняно з однофазною?
3. Яке трифазне електричне коло називається симетричним?
4. Що означає термін «послідовність чергування фаз»?
5. На який кут повернуто вектор електрорушійної сили фази В відносно фази А у симетричному трифазному колі?
6. На який кут повернуто вектор електрорушійної сили фази С відносно фази А у симетричному трифазному колі?
7. Які існують типи з'єднання навантаження в трьохфазних електричних колах?
8. Яке призначення нейтрального проводу і коли його використовувати недоцільно?
9. Як співвідносяться діючі значення фазних те лінійних напруг у симетричному трифазному колі при з'єднанні «зіркою»?
10. Як співвідносяться діючі значення фазних та лінійних напруг у симетричному трифазному колі при з'єднанні «трикутником»?
11. Як співвідносяться діючі значення фазних та лінійних струмів у симетричному трифазному колі при з'єднанні «зіркою»?
12. Як співвідносяться діючі значення фазних та лінійних струмів у симетричному трифазному колі при з'єднанні «трикутником»?
13. Чому дорівнює струм нейтралі при з'єднанні в «зірку» з нульовим проводом за умови, що трифазне електричне коло є симетричним?
14. Як зазвичай здійснюється розрахунок струмів у трифазних симетричних колах?
15. Які методи розрахунку можна застосовувати для визначення струмів у трифазному несиметричному колі?
16. Чому дорівнює оператор оберту *a*?
17. Як розрахувати потужність у трифазному електричному колі?
18. Як зміниться активна потужність з'єднаного «зіркою» симетричного трифазного споживача, якщо його з'єднати «трикутником»?
19. Чим відрізняється розрахунок несиметричного трифазного кола від симетричного?
20. Які є види несиметрії в трифазних лініях передавання електричної енергії?

10 ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПЕРІОДИЧНОГО НЕСИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

10.1 Подання періодичних несинусоїдних функцій рядами Фур'є

Наявність в електричних колах джерел енергії, напруга яких хоч і періодична, але відрізняється від гармонічної (рис. 1.1), не дозволяє для розрахунку таких кіл використовувати безпосередньо комплексний символічний метод. Тому звичайно періодичну несинусоїдну функцію зображають у вигляді ряду Фур'є.

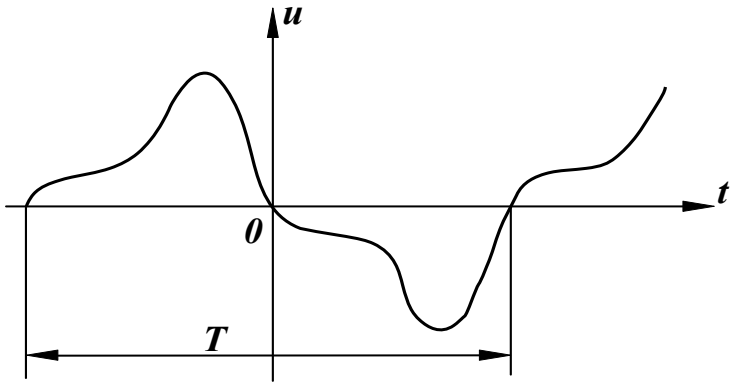


Рисунок 10.1. Приклад періодичного несинусоїдального сигналу напруги

Така несинусоїдна періодична напруга $u(t)$, яка задовольняє умови Діріхле (функція має за період скінченну кількість розривів першого роду і скінченну кількість максимумів та мінімумів), може бути описана гармонічним рядом:

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \sin\frac{2k\pi}{T}t + B_k \cos\frac{2k\pi}{T} \right), \tag{10.1}$$

де коефіцієнти ряду Фур'є визначаються виразами:

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt, \\ A_k &= \frac{2}{T}\int_0^{2\pi} u(t) sin\frac{2k\pi}{T}\,tdt \\ B_k &= \frac{2}{T}\int_0^T u(t) cos\frac{2k\pi}{T}\,tdt. \end{aligned}, \tag{10.2}$$

Запишемо ряд Фур'є для напруги, зобразивши вираз в дужках (10.1) у вигляді однієї синусоїди:

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \sin\left(k\omega t + \beta_k\right), \tag{10.3}$$

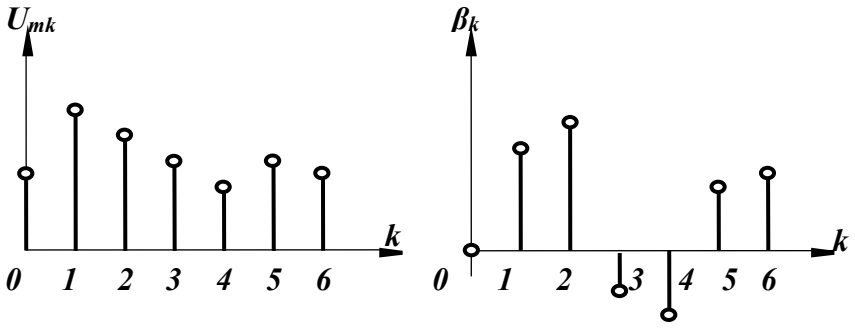
де $U_{mk} = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$,

$\beta_k = arctg \dfrac{B_k}{A_k}$.

Члени ряду (10.3) називають гармонічними складовими або гармоніками. Перша складова U_0 – нульова гармоніка або стала складова. Складова $U_{m1} sin(\omega t + \beta_1)$ – основна або перша гармоніка. Всі інші складові – вищі гармоніки. Кожна гармоніка може мати амплітуду (U_{mk}) і початкову фазу $(\beta_к)$, які відрізняються від інших, але головною відмінністю гармонік є частота, тобто кожна гармоніка має свою частоту. Можна зобразити на графіку значення амплітуд і початкових фаз гармонік залежно від номера гармоніки (рис. 10.2).

Закон розподілу амплітуд гармонічних складових за частотою називається спектром амплітуд або амплітудно-частотним спектром. Закон розподілу початкових фаз називають спектром фаз або фазочастотним спектром.

Спектр, який складається з ряду окремих ліній, називають дискретним або лінійним. Амплітудно-частотний (рис. 10.2, *а*) і фазочастотний (рис. 10.2, *б*) спектри повністю визначають періодичну функцію.



а) *б)*

Рисунок 10.2. Приклад амплітудно-частотного (а) та фазо-частотного (б) спектрів

10.2 Особливості розкладання в ряд Фур'є періодичних функцій зі специфічними властивостями

При визначенні коефіцієнтів ряду Фур'є корисними виявляються деякі попередні знання про характер періодичної функції.

На рис. 10.3 зображена періодична функція, яка симетрична відносно осі ординат. Умови симетрії визначаються рівністю:

$$f(x) = f(-x). \tag{10.4}$$

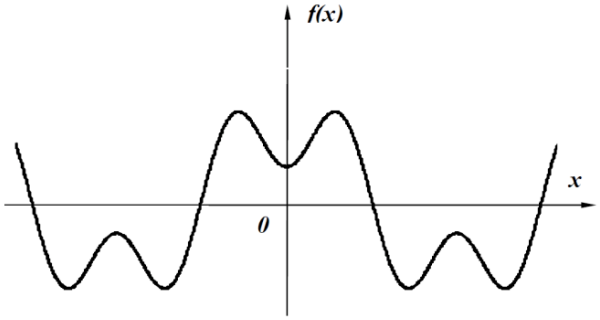


Рисунок 10.3. Періодична функція, симетрична відносно осі ординат

Функції, які задовольняють умову (10.4), називають парними, тому при розкладанні функції *f (x)* в ряд Фур'є будуть присутніми лише парні функції, тобто косинусоїдні:

$$f(x) = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(B_k \cos(kx) \right). \tag{10.5}$$

У випадку симетрії кривої відносно початку координат (рис. 10.4) *f (x) = -f (-x)* функція є непарною, і в її розкладі присутні тільки синусоїдні складові, тобто:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \sin(kx) \right). \tag{10.6}$$

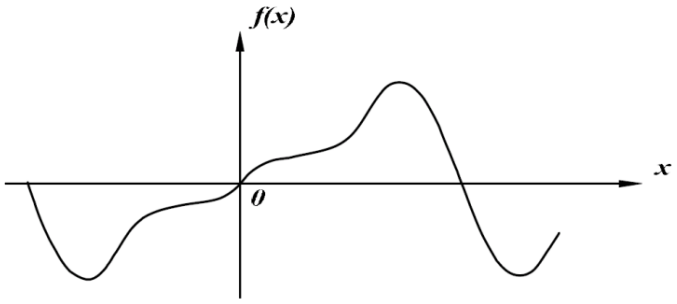


Рисунок 10.4. Періодична функція, симетрична відносно початку координат

Якщо крива симетрична відносно осі абсцис (рис. 10.5) *f (x) = -f (x+π),* то при розкладанні *f (x)* в ряд Фур'є присутні тільки непарні гармоніки:

$$\begin{aligned} f(x) = A_1 \sin(x) + B_1 \cos(x) + A_3 \sin(3x) + B_3 \cos(3x) + \\ + A_5 \sin(3x) + B_5 \cos(3x)... \end{aligned} \tag{10.7}$$

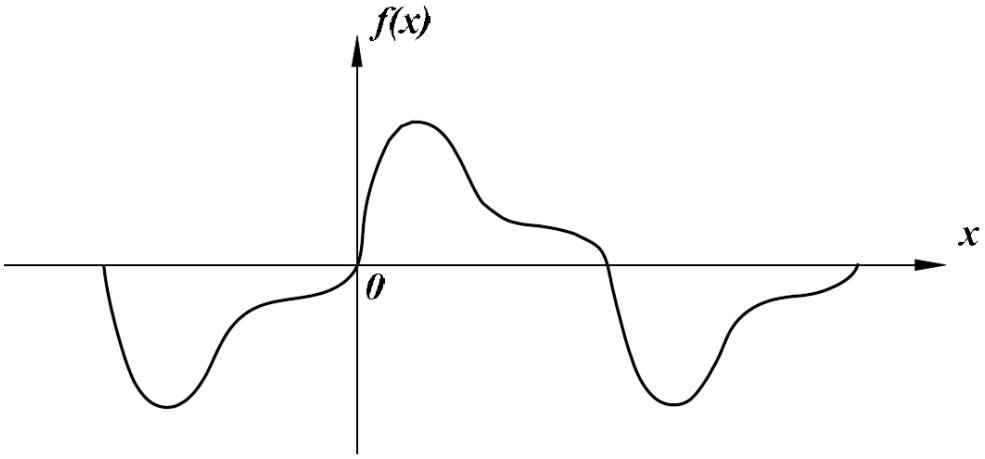


Рисунок 10.5. Періодична функція, симетрична відносно осі абсцис

Доведемо це. Нехай функція *f (x)* містить всі гармоніки:

$$f(x) = B_0 + A_1 \sin(x) + B_1 \cos(x) + A_2 \sin(2x) + B_2 \cos(2x) + ...$$

Підставимо функції *f (x)* та *f (x +π)* в умову симетрії кривої.

$$A_1 \sin(x) + B_1 \cos(x) + A_2 \sin(2x) + B_2 \cos(2x) + ... = -A_1 \sin(x + \pi) - \\ - B_1 \cos(x + \pi) - A_2 \sin(2x + 2\pi) - B_2 \cos(2x + 2\pi) - ...$$

Враховуючи, що для непарних k:

$$\sin(kx + k\pi) = -\sin(kx),$$
$$\cos(kx + k\pi) = -\cos(kx),$$

а для парних k:

$$\sin(kx + k\pi) = \sin(kx),$$
$$\cos(kx + k\pi) = \cos(kx),$$

отримаємо:

$$A_1 \sin(x) + B_1 \cos(x) + A_2 \sin(2x) + B_2 \cos(2x) + ... = A_1 \sin(x) - \\ - B_1 \cos(x) - A_2 \sin(2x) - B_2 \cos(2x) + ...$$

Або:

$$2A_2 \sin(2x) + 2B_2 \cos(2x) + 2A_4 \sin(4x) + 2B_4 \cos(4x)... = 0$$

Отриманий ряд може тотожно дорівнювати нулю лише тоді, коли всі коефіцієнти цього ряду дорівнюють нулю, що і доводить правильність виразу (10.7).

10.3 Наближені методи визначення коефіцієнтів ряду Фур'є

Використання виразів (10.2) для визначення коефіцієнтів ряду Фур'є можливе лише у випадку задання функції *f(x)* у вигляді аналітичного виразу хоча б на окремих інтервалах. В багатьох же випадках криві задані таблично або графічно, що змушує шукати коефіцієнти A_k і B_k наближеними методами.

Одним із таких методів є спосіб заміни інтеграла сумою скінченного числа складових.

Нехай задана графічно періодична функція *f(x)* з періодом 2π (рис. 10.6). Розіб'ємо весь період на *n* однакових частин:

$$\Delta x = \frac{2\pi}{n}. \tag{10.8}$$

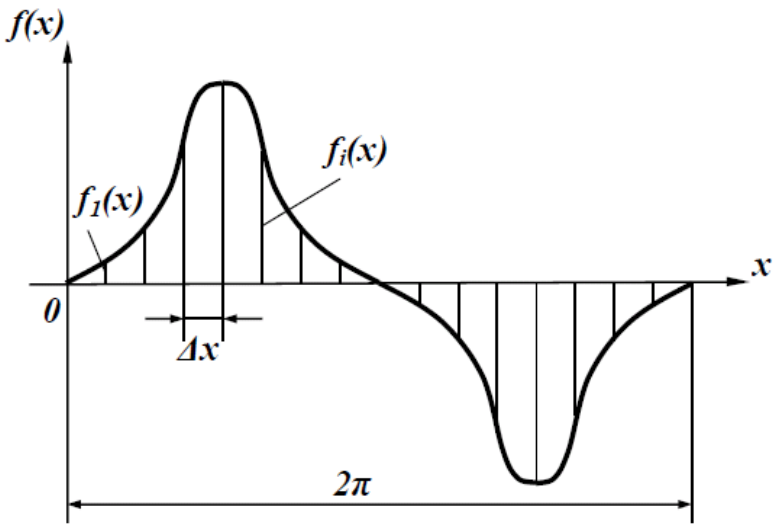


Рисунок 1.6. Задана графічно періодична функція

Позначимо значення функції в точках розбиття через $f_i(x)$. Замінивши в першому виразі (10.2) інтеграл сумою, неперервні значення *f(x)* дискретними значеннями $f_i(x)$ і нескінченно малі величини *dx* малими, але скінченними величинами Δ*x*, отримаємо:

$$B_0 \approx \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\Delta x, \tag{10.9}$$

або з урахуванням (10.8):

$$B_0 \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(x). \tag{10.10}$$

Таким же чином, враховуючи, що:

$$\mathrm{x} \approx \mathrm{i}\Delta\mathrm{x} = \mathrm{i}\frac{2\pi}{\mathrm{n}},$$

Отримаємо:

$$\mathrm{A_k} \approx \frac{2}{\mathrm{n}}\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{f_i(x)}\sin\left(\mathrm{ki}\frac{2\pi}{\mathrm{n}}\right), \qquad (10.11)$$

$$A_k \approx \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\cos\left(ki\frac{2\pi}{n}\right).$$

При розрахунках з використанням рядів звичайно обмежуються скінченним числом гармонік.

10.4 Діючі значення несинусоїдних струмів і напруг

У першій частині курсу ми ознайомилися з поняттям діючого значення струму, та встановили, що його значення розраховується за виразом:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}. \qquad (10.12)$$

Визначимо діюче значення несинусоїдного струму:

$$i(t) = I_0 + I_{m1}\sin\left(\omega t + \alpha_1\right) + I_{m2}\sin\left(2\omega t + \alpha_2\right) + \ldots \quad . \qquad (10.13)$$

Отриманий ряд необхідно піднести до квадрата і підставити у вираз для діючого значення. Після необхідних перетворень отримаємо:

$$I = \sqrt{I_0^2 + \frac{I_{m1}^2}{2} + \frac{I_{m2}^2}{2} + \frac{I_{m3}^2}{2} + \ldots} \qquad (10.14)$$

Або:

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \ldots}. \qquad (10.15)$$

Таким чином, діюче значення несинусоїдного струму дорівнює кореню квадратному з суми квадратів діючих значень окремих гармонік.

Аналогічно, діюче значення несинусоїдної напруги:

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \ldots}. \qquad (10.16)$$

Відзначимо, що діючі значення несинусоїдних струмів та напруг залежать лише від амплітуд гармонік та не залежать від їх початкових фаз.

10.5 Розрахунок електричних кіл при несинусоїдних напругах

Якщо прикладена напруга описується періодичною несинусоїдною функцією, то ця функція може бути зображена рядом Фур'є:

$$u = U_0 + U_{m1}\sin\left(\omega t + \beta_1\right) + U_{m2}\sin\left(2\omega t + \beta_2\right) + \ldots \quad . \tag{10.17}$$

Вхідну напругу можна розглядати такою, що забезпечується окремими джерелами гармонічних напруг різних частот.

Згідно з теоремою накладання, можна стверджувати, що струми у вітках лінійного електричного кола можна визначати як алгебраїчну суму струмів від дії кожного джерела окремо. Таким чином, розрахунок електричного кола виконується для кожної гармоніки окремо. Оскільки в цьому випадку напруги джерел синусоїдні, то може використовуватися символічний метод, а через те, що частоти гармонік різні, то й опори віток кола для різних гармонік також відрізняються.

Розглянемо методику розрахунку на прикладі електричного кола, зображеного на 10.7.

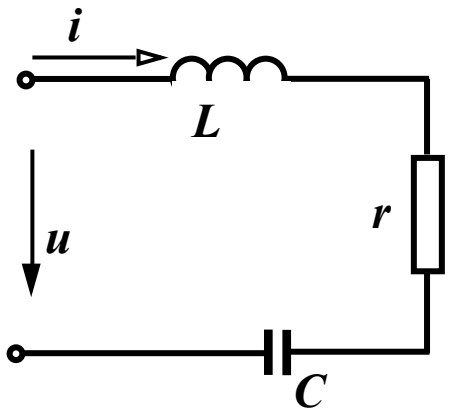


Рисунок 10.7. Розрахункове електричне коло

Нехай до цього кола прикладена напруга (10.17).

Для першої гармоніки запишемо:

$$\underline{U}_1 = \frac{U_{m1}}{\sqrt{2}} e^{j\beta_1},\ \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{r + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}.$$

Для k-ї гармоніки змінюються опори індуктивності і ємності:

$$x_L^{(k)} = k\omega L = k x_L^{(1)},\ \ x_C^{(k)} = \frac{1}{k\omega C} = \frac{x_C^{(1)}}{k}. \tag{10.18}$$

Тому:

$$\underline{U}_k = \frac{U_{mk}}{\sqrt{2}} e^{j\beta_k},\ \underline{I}_k = \frac{\underline{U}_k}{r + j\left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)}. \qquad (10.19)$$

Очевидно, що для сталої складової ($k = 0$) з виразів (10.18) випливає:

$$x_L^{(0)} = 0 \cdot \omega L = 0,\quad x_C^{(0)} = \frac{1}{0 \cdot \omega C} = \infty,\quad \underline{I}_0 = \frac{\underline{U}_k}{r + j(0 - \infty)} = 0.$$

Миттєве значення струму знаходиться як сума миттєвих значень струмів різних гармонік.

Якщо коло складне, то для кожної гармоніки можна використовувати всі відомі методи розрахунку в комплексній формі.

10.6 Потужності в колах несинусоїдного струму

В колах несинусоїдного струму активна потужність дорівнює сумі активних потужностей окремих гармонік, а реактивна потужність – алгебраїчній сумі реактивних потужностей окремих гармонік, тобто:

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos\phi_1 + U_2 I_2 \cos\phi_2 + U_3 I_3 \cos\phi_3 + \ldots, \qquad (10.20)$$

$$Q = U_1 I_1 \sin\phi_1 + U_2 I_2 \sin\phi_2 + U_3 I_3 \sin\phi_3 + \ldots. \qquad (10.21)$$

Повна потужність визначається як:

$$S = UI = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_3^2 + \ldots}\ \cdot \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \ldots}. \qquad (10.22)$$

На відміну від кіл синусоїдного струму в колах з несинусоїдними струмами і напругами не виконується рівність $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$. Щоб пов'язати певним співвідношенням ці потужності між собою, вводять поняття потужності спотворення Т, яка характеризує ступінь відмінності у формах кривих напруги і струму, і тоді:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2 + T^2}. \qquad (10.23)$$

Відзначимо, що баланс активних і реактивних потужностей виконується і для цього класу кіл.

Відношення активної потужності до повної називають коефіцієнтом потужності:

$$k_n = \frac{P}{S} = \frac{U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos\phi_1 + U_2 I_2 \cos\phi_2 + U_3 I_3 \cos\phi_3 + \ldots}{\sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_3^2 + \ldots} \cdot \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \ldots}}.$$

Для кіл синусоїдного струму $k_n = \frac{UI\cos\varphi}{UI} = \cos\varphi$, тобто коефіцієнт потужності в цьому випадку дорівнює косинусу кута зсуву фаз φ напруги та струму.

10.7 Коефіцієнти, які характеризують відмінність кривої від синусоїди

Для оцінювання ступеня відмінності негармонічної кривої від синусоїдної вводять низку різних коефіцієнтів.

Коефіцієнт амплітуди визначається як відношення максимального значення функції до її діючого значення, тобто:

$$K_a = \frac{I_m}{I} = \frac{I_m}{\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \ldots}}. \qquad (10.24)$$

Коефіцієнтом спотворення називається відношення діючого значення першої гармоніки до діючого значення всієї функції:

$$K_c = \frac{I_1}{I} = \frac{I_1}{\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \ldots}}. \qquad (10.25)$$

Під коефіцієнтом нелінійних спотворень розуміють відношення діючого значення вищих гармонік до діючого значення першої гармоніки:

$$K_{н.с} = \frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2 + I_4^2 + \ldots}}{I_1}. \qquad (10.26)$$

Зазвичай, ці коефіцієнти вводять для кривих, які не мають сталих складових. Тому в них немає складової I_0.

Визначимо можливі межі зміни цих коефіцієнтів. Мінімальне значення $K_a = 1$ при $I = I_m$. У всіх інших випадках $K_a > 1$. Для синусоїди $K_a = \frac{I\sqrt{2}}{I} = 1{,}41$.

Максимальне значення коефіцієнт спотворення набуває при синусоїдній формі кривої, коли відсутні вищі гармоніки. В цьому випадку $K_c = \frac{I_1}{I_1} = 1$. В інших випадках $K_c < 1$. Причому, чим менший K_c, тим сильніше крива відрізняється від синусоїди.

Мінімальне значення коефіцієнта нелінійних спотворень можливе також при синусоїдній формі кривої, якщо відсутні вищі гармоніки: $K_{н.с.} = 0$.

Контрольні запитання до розділу 10

1. Якими параметрами відрізняються одна від одної гармонічні складові?
2. Як визначити частоту n-ї гармоніки при відомій частоті 1-ї гармоніки?
3. Які гармонічні складові присутні у розкладанні в ряд Фур'є парних функцій?
4. Які гармонічні складові присутні у розкладанні в ряд Фур'є непарних функцій?
5. Які гармонічні складові присутні у розкладанні в ряд Фур'є функцій, симетричних відносно осі абсциз?
6. У чому суть наближеного методу розрахунку коефіцієнтів ряду Фур'є?
7. Як залежить діюче значення струму від початкових фаз гармонічних складових?
8. Визначити діюче значення напруги: $u = 30 + 80\sin\omega t + 40\sin 3\omega t$ В.
9. В яких випадках вхідний опір кола залишається однаковим для всіх гармонік?
10. Що називають потужністю спотворення?
11. Як визначається коефіцієнт амплітуди?
12. Як визначається коефіцієнт спотворення?
13. Як визначається коефіцієнт нелінійних спотворень?

11 ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ

11.1 Причини виникнення перехідних процесів. Закони комутації

Електричне коло, до складу якого входять ємності та індуктивності, в усталеному режимі містить деяку енергію, яка накопичена в електричному й магнітному полях. Величина цієї енергії в будь-який момент часу визначається за допомогою виразів:

- в електричному полі ємності $W_e = \frac{Cu^2}{2}$;
- в магнітному полі індуктивності $W_м = \frac{Li^2}{2}$.

При зміні усталеного режиму, який відбувається під впливом будь-яких перемикань, що призводять до зміни параметрів кола або зовнішніх дій, змінюється кількість енергії в полях. Оскільки енергія не може змінитися за одну мить, то і зміна одного усталеного режиму іншим проходить також протягом деякого часу. Процес переходу від одного усталеного стану кола до іншого називається перехідним процесом. Таким чином, основною причиною виникнення перехідного процесу є зміна енергетичного стану кола.

Введемо деякі поняття, які характеризують перехідні процеси. Будь-яку зміну параметрів кола або зовнішніх дій звичайно називають комутацією (*switching*), в розрахунках вважають, що усяка комутація відбувається миттєво.

Установлені два закони комутації.

Оскільки енергія магнітного поля в індуктивності не може змінитися за мить, то при постійному значенні L не може змінитися за мить і струм через індуктивність.

Перший закон комутації

Струм через індуктивність в перший момент часу після комутації дорівнює струму через індуктивність в останній момент часу перед комутацією.

Якщо перший момент часу після комутації будемо позначати $t = 0+$, а час безпосередньо перед комутацією через $t = 0-$, то перший закон комутації запишеться як:

$$i_L(0+) = i_L(0-). \qquad (11.1)$$

Другий закон комутації

Напруга на ємності в перший момент часу після комутації дорівнює напрузі на ємності в останній момент часу перед комутацією:

$$u_C(0+) = u_C(0-). \tag{3.2}$$

Практична тривалість перехідних процесів залежить від параметрів кола і в багатьох випадках складає частки секунди. Проте під час перехідних процесів на окремих елементах кола можуть виникати великі напруги або протікати великі струми.

11.2 Перехідні процеси у простих нерозгалужених електричних колах

11.2.1 Вмикання кола rL на постійну напругу

Розглянемо методику розрахунку перехідного процесу на простому прикладі (рис. 11.1).

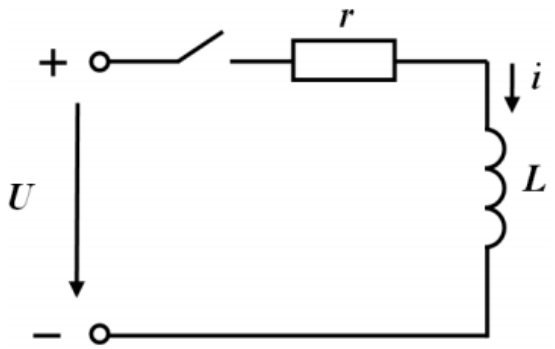


Рисунок 11.1. Просте електричне коло rL-типу

При замиканні ключа в колі виникає перехідний процес, оскільки коло переходить із одного усталеного режиму в інший. Під час перехідного процесу струми і напруги в колі змінюються залежно від часу, тому, складаючи рівняння, яке описує процес в колі, використаємо другий закон Кірхгофа:

$$L\frac{di}{dt} + ri = U. \tag{11.3}$$

Отримано неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку з постійними коефіцієнтами. Його розв'язок складається з двох складових – загального і часткового розв'язків. Загальний розв'язок отримаємо при розв'язанні однорідного диференціального рівняння, коли права частина дорівнює нулю. В електротехніці цю складову прийнято називати *вільною* складовою $i_в$, оскільки вона не залежить від зовнішнього впливу. Частковий розв'язок, який називається примусовою складовою $i_{пр}$, залежить від вигляду правої частини.

Таким чином:

$$i = i_{пр} + i_{в}. \tag{11.4}$$

Для визначення $i_{в}$ рівняння (11.3) має вигляд:

$$L\frac{di_{в}}{dt} + ri_{в} = 0. \tag{11.5}$$

Його розв'язок:

$$i_{в} = Ae^{pt}, \tag{3.6}$$

де p – корінь характеристичного рівняння,

A – стала інтегрування.

Характеристичне рівняння можна отримати, якщо в однорідному рівнянні (11.5) замінити змінну на одиницю і першу похідну на p, тобто $Lp + r = 0$, звідки $p = -\frac{r}{L}$.

Зазначимо, що корінь характеристичного рівняння може бути лише від'ємним.

Оскільки права частина рівняння (11.3) є сталою величиною, то примусова складова теж стала, тому $i_{пр} = I$. Тоді $L\frac{dI}{dt} + rI = U$ або $rI = U,$ тому що в новому усталеному режимі $\frac{dI}{dt} = 0$.

Звідси:

$$i_{пр} = I = \frac{U}{r}. \tag{11.7}$$

Зрозуміло, що примусова складова є струмом в новому усталеному режимі. Тому, зазвичай, числові значення цієї складової і визначаються з розрахунку нового усталеного режиму.

Повний розв'язок рівняння (11.4) має вигляд:

$$i = \frac{U}{r} + Ae^{-\frac{r}{L}t}. \tag{11.8}$$

Для визначення сталої інтегрування використаємо початкові умови. Знайдемо значення струму в момент часу $t = 0+$, використавши перший закон комутації. Оскільки до комутації струму в колі не було $i_L(0-) = 0$ (ключ розімкнутий), то, згідно з першим законом комутації, $i_L(0+) = 0$.

Тоді $i(0+) = \frac{U}{r} + Ae^{-\frac{r}{L}\cdot 0} = \frac{U}{r} + A = 0$, звідки $A = -\frac{U}{r}$.

Таким чином:

$$i = \frac{U}{r} - \frac{U}{r}e^{-\frac{r}{L}t} = \frac{U}{r}\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right). \qquad (11.9)$$

Графіки зміни струму через індуктивність показані на рис. 11.2.

Примусова складова на графіку має вигляд прямої лінії, а вільна складова – експоненти. Повний розв'язок теж являє собою експоненту, яка починається з нуля і асимптотично наближається до усталеного значення.

Коефіцієнт при *t* в показнику експоненти має розмірність 1/с, тому обернена величина має розмірність часу, позначається літерою τ і називається сталою часу перехідного процесу.

$$\tau = \frac{1}{|p|} = \frac{L}{r}. \qquad (11.10)$$

Стала часу залежить від параметрів кола і характеризує тривалість перебігу перехідного процесу.

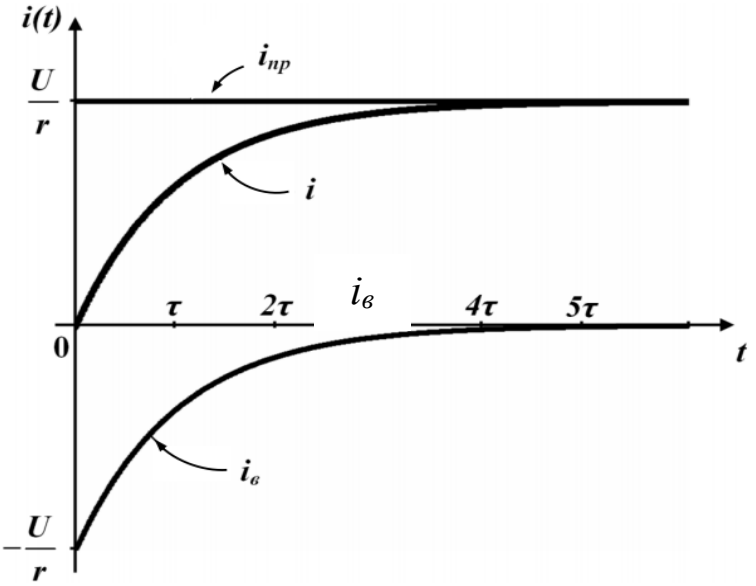


Рисунок 3.2. Графік перехідного процесу у простому електричному колі rL-типу

Не зважаючи на те, що теоретично перехідний процес триває нескінченно довго (лише при $t \to \infty$ вільна складова наближається до нуля), можна вважати, що перехідний процес практично закінчується, коли вільна складова стає меншою 1% від усталеного значення. Тому практична тривалість перехідного процесу $t_{пер.проц.} = (4 \div 5)\tau$.

11.2.2 Вмикання кола rC на постійну напругу

Складемо рівняння за другим законом Кірхгофа для кола з послідовно з'єднаними ***r*** і ***C*** при вмиканні на постійну напругу (рис. 11.3).

$$ri + u_C = U\,. \tag{11.11}$$

Оскільки $i = C\dfrac{du_C}{dt}$, отримаємо:

$$rC\frac{du_C}{dt} + u_C = U\,. \tag{11.12}$$

Повний розв'язок цього рівняння $u_C = u_{Cпр} + u_{Cв}$.

Із розрахунку нового усталеного режиму визначаємо $u_{Cпр} = U$.

Вільна складова розв'язку диференціального рівняння першого порядку $u_{Cв} = Ae^{pt}$.

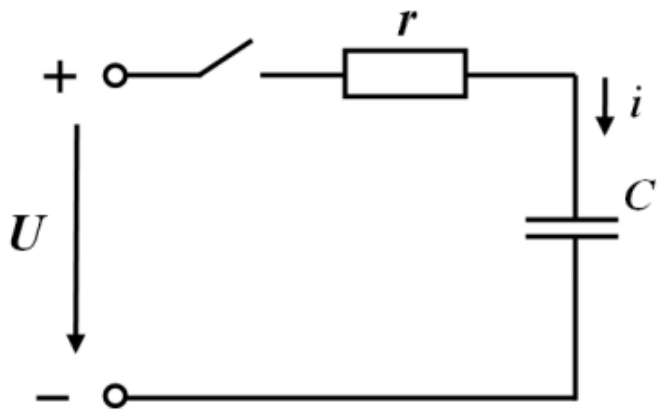


Рисунок 11.3. Просте електричне коло rC-типу

Характеристичне рівняння:

$$rCp + 1 = 0\,, \tag{11.13}$$

звідки $p = -\dfrac{1}{rC}$, а $\tau = \dfrac{1}{|p|} = rC$. Тоді повний розв'язок $u_C = U + Ae^{-\frac{t}{rC}}$.

Постійну інтегрування A знаходимо, використовуючи початкові умови.

Відповідно до другого закону комутації $u_C(0+)=u_C(0-)$, тому $u_C(0-)=U+A$ і $A=u_C(0-)-U$. Якщо до комутації конденсатор не був заряджений, то $u_C(0-)=0$ і $A=-U$.

Остаточний повний розв'язок:

$$u_c = U\left(1-e^{-\frac{t}{rC}}\right). \tag{11.14}$$

Визначимо закон зміни струму в ємності:

$$i = C\frac{du_C}{dt} = C\left[-U\left(-\frac{1}{rC}\right)e^{-\frac{1}{rC}}\right] = \frac{U}{r}e^{-\frac{1}{rC}}. \tag{11.15}$$

Графіки зміни струму і напруги на ємності показані на рис. 11.4 та 11.5.

Із графіків видно, що u_c в момент комутації нерозривна лінія, а i змінюється стрибком від нуля до величини $\frac{U}{r}$.

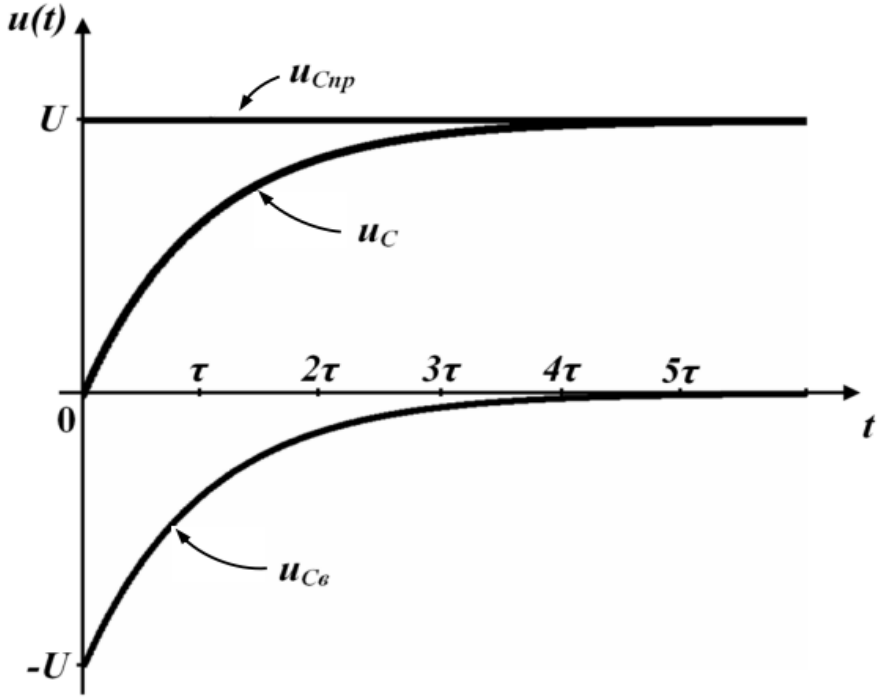


Рисунок 11.4. Графіки зміни струму в простому електричному колі rC-типу

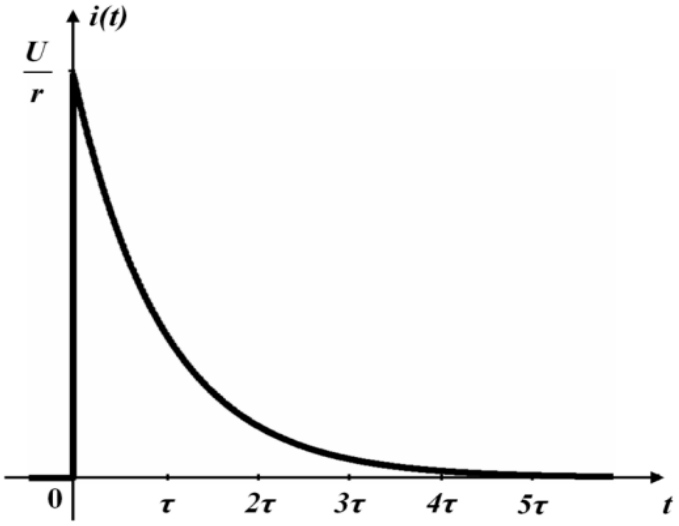


Рисунок 11.5. Графік зміни напруги в простому електричному колі rC-типу

11.3 Незалежні і залежні початкові умови

Як видно з матеріалу попередніх розділів, стала інтегрування завжди визначається, виходячи з початкових умов. При цьому для довільного параметра режиму кола X (це може бути напруга чи струм в будь-якому елементі) стала інтегрування дорівнює:

$$A = X(0+) - X_{пр}. \tag{11.16}$$

Існують два методи визначення $X(0+)$.

1. Якщо $X(0+)$ це струм в індуктивності або напруга на ємності, то ця величина визначається, виходячи з законів комутації (11.1), (11.2). В цьому випадку $X(0+)$ називають *незалежними початковими умовами* (*independent entry conditions*).

2. Якщо $X(0+)$ це будь-який інший параметр, тоді цю величину називають *залежними початковими умовами* (*dependent entry conditions*). Для визначення $X(0+)$ в цьому випадку необхідно скласти і розв'язати систему рівнянь за законами Кірхгофа, в яку мають входити всі незалежні початкові умови цього кола.

11.4 Класичний метод розрахунку перехідних процесів

11.4.1 Вмикання кола rLC на постійну напругу

Проведемо аналіз перехідного процесу в колі з двома реактивними елементами, яке зображене на рис. 11.6.

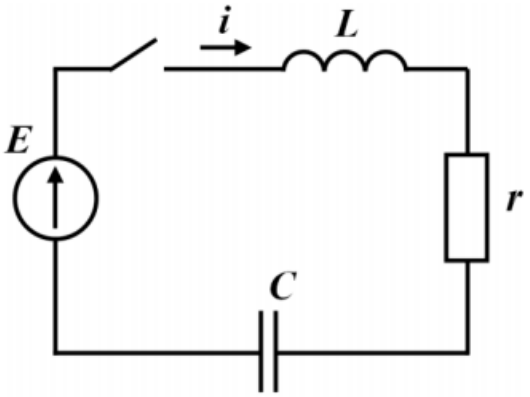


Рисунок 11.6. Нерозгалужене електричне коло rLC-типу

Згідно з другим законом Кірхгофа для кола можна скласти систему рівнянь:

$$\begin{aligned} ir + L\frac{di}{dt} + u_C = E, \\ i = C\frac{du_C}{dt}. \end{aligned} \tag{11.7}$$

Після перетворень отримаємо рівняння другого порядку:

$$rC\frac{du_C}{dt} + LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = E\,. \tag{11.8}$$

Характеристичне рівняння:

$$rCp + LCp^2 + 1 = 0 \tag{11.9}$$

має корені:

$$p_{1,2} = -\frac{r}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\,. \tag{11.10}$$

Залежно від співвідношення складових під знаком радикала будемо мати три види коренів:

1. $\left(\frac{r}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$ – корені комплексно-спряжені;
2. $\left(\frac{r}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC}$ – корені дійсні різні;
3. $\left(\frac{r}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC}$ – корені дійсні однакові.

Перед тим, як розглянути всі три випадки, знайдемо для кола незалежні початкові умови та примусову складову напруги на ємності.

Оскільки ключ до комутації було вимкнено, то очевидно, що:

$$i(0+)=i(0-)=0,\ u_C(0+)=u_C(0-)=0.$$

Струм в колі після комутації дорівнює нулю (конденсатор не пропускає постійний струм), тому з першого рівняння системи (11.7) випливає, що $u_{Cпр}=E$.

1. *Нехай корені будуть комплексно-спряженими.*

Тоді їх можна подати у вигляді $p_1=-\delta+j\omega_0$, $p_2=-\delta-j\omega_0$, де $\delta=\dfrac{r}{2L}$, $\omega_0=\sqrt{\dfrac{1}{LC}-\left(\dfrac{r}{2L}\right)^2}$, а перехідний процес буде періодичним (коливальним).

Перехідна напруга на ємності може бути записана як:

$$u_C(t)=E+e^{-\delta t}\left(A_1\operatorname{Sin}\omega_0 t+A_2\operatorname{Cos}\omega_0 t\right). \qquad (11.11)$$

Знайдемо сталі інтегрування A_1, A_2.

Підставляючи $t=0$ і $u_C(0)=0$ в (11.11), маємо $0=E+1(A_1\cdot 0+A_2\cdot 1)$, звідки $A_2=-E$.

Для визначення A_1 виразимо струм в колі через сталі інтегрування:

$$i(t)=C\frac{du_C(t)}{dt}=C\frac{d\left[E+e^{-\delta t}\left(A_1 Sin\omega_0 t+A_2 Cos\omega_0 t\right)\right]}{dt}=$$
$$=Ce^{-\delta t}\left[(-\delta)\left(A_1 Sin\omega_0 t+A_2 Cos\omega_0 t\right)+\omega_0\left(-A_2 Sin\omega_0 t+A_1 Cos\omega_0 t\right)\right].$$

Підставивши $t=0$ і $i(0)=0$, отримаємо:

$$0=C\cdot 1\left[(-\delta)\left(A_1\cdot 0+A_2\cdot 1\right)+\omega_0\left(-A_2\cdot 0+A_1\cdot 1\right)\right],\ \text{або}\ 0=-\delta A_2+\omega_0 A_1.$$

Враховуючи, що $A_2=-E$, отримаємо $A_1=-\dfrac{\delta}{\omega_0}E$.

Отже:

$$u_C(t)=E-e^{-\delta t}\left(\frac{\delta}{\omega_0}E\operatorname{Sin}\omega_0 t+E\operatorname{Cos}\omega_0 t\right). \qquad (11.12)$$

2. *Нехай корені будуть дійсними різними.*

Тоді перехідна напруга на ємності може бути записана як:

$$u_C(t)=E+A_1e^{p_1 t}+A_2e^{p_2 t}. \qquad (11.13)$$

Перехідний процес буде аперіодичним (неколивальним).

Тоді для знаходження сталих інтегрування треба скласти систему рівнянь. Перше з цих рівнянь отримаємо, підставивши $t=0$ і $u_C(0)=0$ в (11.13)

$$0 = E + A_1 + A_2 \tag{11.14}$$

Друге рівняння знайдемо з виразу:

$$i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} = C\frac{d\left(E + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}\right)}{dt} = C\left(A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}\right).$$

Підставивши $t = 0$ і $i(0) = 0$, отримаємо $0 = C(A_1 p_1 + A_2 p_2)$ або:

$$0 = A_1 p_1 + A_2 p_2 . \tag{14.15}$$

Розв'язок системи рівнянь (11.14), (11.15): $A_1 = \dfrac{Ep_2}{p_1 - p_2}$, $A_2 = -\dfrac{Ep_1}{p_1 - p_2}$.

Таким чином:

$$u_C(t) = E + \frac{Ep_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} - \frac{Ep_1}{p_1 - p_2} e^{p_2 t} . \tag{11.16}$$

3. *Якщо корені однакові*, тобто $\left(\dfrac{r}{2L}\right)^2 = \dfrac{1}{LC}$, то перехідний процес є критичним. Він перехідний між аперіодичним та коливальним процесами.

В цьому випадку $p_1 = p_2 = -\dfrac{r}{2L}$ і напруга на ємності записується як:

$$u_C = E + (A_1 + A_2 t) e^{pt} \tag{11.17}$$

Знайдемо сталі інтегрування. Підставляючи $t = 0$ і $u_C(0) = 0$ в (11.17), маємо $0 = E + A_1$, звідки $A_1 = -E$.

Виразимо струм в колі через сталі інтегрування:

$$i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} = C\frac{d\left[E + (A_1 + A_2 t)e^{pt}\right]}{dt} = Ce^{pt}\left[p(A_1 + A_2 t) + A_2\right].$$

Підставивши $t = 0$ і $i(0) = 0$, отримаємо $0 = C(pA_1 + A_2)$, звідки, з урахуванням $A_1 = -E$, отримаємо $A_2 = pE$.

Отже:

$$u_C(t) = E + (pEt - E)e^{pt} . \tag{11.18}$$

11.4.2 Формування характеристичного рівняння методом вхідного опору

В попередніх прикладах характеристичне рівняння формувалося на основі однорідного диференціального рівняння. В цьому дифрівнянні потрібно виконувати заміну змінної на одиницю, першої похідної – на p, другої похідної – на p^2, k-ї похідної – на p^k тощо.

Разом з тим, для складного кола формування диференціального рівняння є непростою задачею, оскільки потребує іноді досить трудомістких алгебраїчних перетворень. Тому в складних колах доцільного застосовувати *метод вхідного опору* (*method of entrance resistance*).

За цим методом характеристичне рівняння формується за алгоритмом:

1. Для кола визначається вхідний опір кола як функція комплексної частоти $\underline{Z}_{вх}(j\omega)$;

2. В отриманій функції виконується заміна комплексної частоти $j\omega$ на параметр p;

3. Функцію $Z_{вх}(p)$ прирівнюють до нуля і розв'язують отримане характеристичне рівняння:

$$Z_{вх}(p)=0. \tag{11.19}$$

11.4.3 Аналіз складного кола другого порядку

Розглянемо приклад розрахунку перехідного процесу в складному колі з двома реактивними елементами.

Знайти перехідні струми i_1, i_2, i_3 та напруги на ємності u_C та на індуктивності u_L в колі постійного струму, яке зображене на рис. 11.7. Побудувати графіки цих величин в часі. Параметри кола: $U=200$ В, $L=100$ мГн, $C=50$ мкФ, $r_1=200$ Ом, $r_2=50$ Ом.

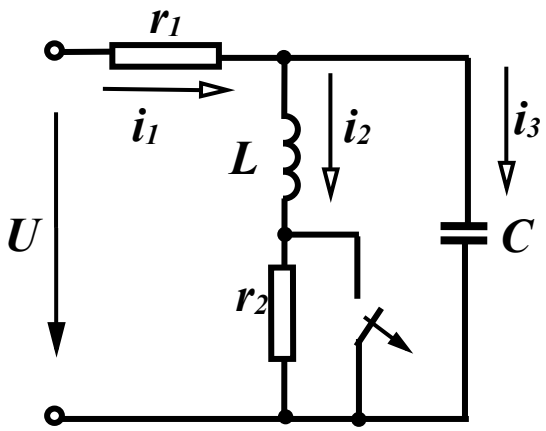


Рисунок 11.7. Розгалужене електричне коло постійного струму

Спочатку визначимо перехідний струм через індуктивність i_2.

В загальному вигляді $i_2(t) = i_{2пр} + i_{2в}$.

Знайдемо примусову складову. Оскільки в післякомутаційний період $i_{3пр} = 0$, то $i_{1пр} = i_{2пр} = \dfrac{U}{r_1 + r_2}$.

Вигляд вільної складової можна буде записати лише після визначення коренів характеристичного рівняння, яке ми запишемо за методом вхідного опору:

$$Z(p) = r_1 + \frac{(r_2 + pL)\dfrac{1}{pC}}{r_2 + pL + \dfrac{1}{pC}} = 0.$$

Реалізуємо ці вирази в MathCAD.

U := 200 L := 0.1 C := $50 \cdot 10^{-6}$ r1 := 200 r2 := 50

$$i2pr := \frac{U}{r1 + r2} \qquad i2pr = 0.8$$

$$r1 + \frac{(r2 + p \cdot L) \cdot \dfrac{1}{p \cdot C}}{r2 + p \cdot L + \dfrac{1}{p \cdot C}} \text{ solve, p} \rightarrow \begin{pmatrix} -300. - 400. \cdot i \\ -300. + 400. \cdot i \end{pmatrix}$$

p1 := −300. − 400.·i p2 := −300. + 400.·i

Оскільки коренями характеристичного рівняння є два спряжених комплексних числа, то вільна складова $i_{2в} = e^{-\delta t}(A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t)$, де $\delta = 300$, $\omega_0 = 400$.

Повний розв'язок:

$$i_2(t) = \frac{U}{r_1 + r_2} + e^{-\delta t}(A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t). \qquad (11.20)$$

Для визначення сталих інтегрування A_1, A_2 знайдемо незалежні початкові умови.

Значення $i_2(0_-)$ і $u_C(0_-)$ можна знайти, якщо розрахувати коло до комутації. Оскільки прикладена до кола напруга постійна, то в колі до комутації (при замкненому ключі) текли постійні струми. Струм у вітці з ємністю не протікав. Також не протікав струм і через опір R_2, оскільки він закорочений ключем, тому $i_2(0_+) = i_2(0_-) = \dfrac{U}{r_1}$.

Напруга на ємності при замкненому ключі дорівнює напрузі на індуктивності (паралельно з'єднані вітки). Оскільки опір індуктивності при постійному струмі дорівнює нулю, то і напруга на індуктивності дорівнює нулю, і, відповідно, $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$.

Сталі інтегрування можна визначити, розв'язавши систему рівнянь (за умови $t=0$): $i_2(0_+)=i_2(t)|_{t=0}$, $L\frac{di_2(t)}{dt}/_{t=0}+r_2 i_2(t)/_{t=0}=u_C(0_+)$.

Виконаємо ці процедури в MathCAD, використавши для розв'язання системи рівнянь блок «*Given-Find*» і одну з процедур символьних перетворень «*simplify*». Разом з нею доцільно застосовувати процедуру «*float*», яка дасть можливість задати кількість цифр після десяткової точки.

$$i20 := \frac{U}{r1} \qquad UC0 := 0 \qquad \delta := \mathrm{Re}(p2) \qquad \omega := \mathrm{Im}(p2)$$

$$iv(t, A1, A2) := e^{\delta \cdot t} \cdot (A1 \cdot \sin(\omega \cdot t) + A2 \cdot \cos(\omega \cdot t)) \qquad t := 0$$

Given

$$i2pr + iv(t, A1, A2) = i20$$

$$(i2pr + iv(t, A1, A2)) \cdot r2 + L \cdot \frac{d}{dt}(iv(t, A1, A2)) = 0$$

$$\mathrm{Find}(A1, A2)\ \mathrm{simplify}\ \mathrm{float}, 3 \rightarrow \begin{pmatrix} -1.10 \\ .200 \end{pmatrix}$$

$$A1 := -1.1 \qquad A2 := 0.2$$

$$i2(t) := i2pr + e^{\delta \cdot t} \cdot (A1 \cdot \sin(\omega \cdot t) + A2 \cdot \cos(\omega \cdot t))$$

$$i2(t)\ \mathrm{simplify}\ \mathrm{float}, 3 \rightarrow .800 - 1.10 \cdot \exp(-300. \cdot t) \cdot \sin(400. \cdot t) + .200 \cdot \exp(-300. \cdot t) \cdot \cos(400. \cdot t)$$

Знайдемо струми $i_1(t)$, $i_3(t)$ та напруги $u_L(t)$, $u_C(t)$. Напруги визначаються як: $u_L(t)=L\frac{di_2(t)}{dt}$, $u_C(t)=u_L(t)+r_2 i_2(t)$. Струм в конденсаторній вітці: $i_3(t)=C\frac{du_C(t)}{dt}$. Вхідний струм: $i_1(t)=i_2(t)+i_3(t)$.

В MathCAD це виглядатиме так.

$$uL(t) := \left(L \cdot \frac{d}{dt} i2(t)\right) \qquad uC(t) := uL(t) + i2(t) \cdot r2 \qquad i3(t) := C \cdot \frac{d}{dt} uC(t) \qquad i1(t) := i2(t) + i3(t)$$

$$uL(t)\ \mathrm{simplify}\ \mathrm{float}, 3 \rightarrow 25. \cdot \exp(-300. \cdot t) \cdot \sin(400. \cdot t) - 50. \cdot \exp(-300. \cdot t) \cdot \cos(400. \cdot t)$$

$$uC(t)\ \mathrm{simplify}\ \mathrm{float}, 3 \rightarrow -30. \cdot \exp(-300. \cdot t) \cdot \sin(400. \cdot t) - 40. \cdot \exp(-300. \cdot t) \cdot \cos(400. \cdot t) + 40.$$

$$i1(t)\ \mathrm{simplify}\ \mathrm{float}, 3 \rightarrow .800 + .150 \cdot \exp(-300. \cdot t) \cdot \sin(400. \cdot t) + .200 \cdot \exp(-300. \cdot t) \cdot \cos(400. \cdot t)$$

$$i3(t)\ \mathrm{simplify}\ \mathrm{float}, 3 \rightarrow 1.25 \cdot \exp(-300. \cdot t) \cdot \sin(400. \cdot t)$$

Побудуємо графіки знайдених параметрів (рис. 11.8–11.12), для чого визначимо докомутаційні значення параметрів $u_L(t)$, $i_1(t)$, $i_3(t)$

$$u_L(0_-)=0,\ i_1(0_-)=i_2(0_-),\ i_3(0_-)=0.$$

$$UC(t) := \begin{cases} UC0 & \text{if } t < 0 \\ uC(t) & \text{if } t \geq 0 \end{cases}$$

UC(t)

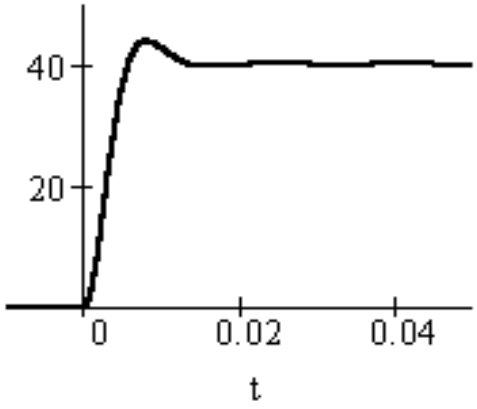


Рисунок 11.8. Перехідний процес напруги на ємності

$$i10 := i20$$

$$I1(t) := \begin{cases} i10 & \text{if } t < 0 \\ i1(t) & \text{if } t \geq 0 \end{cases}$$

I1(t)

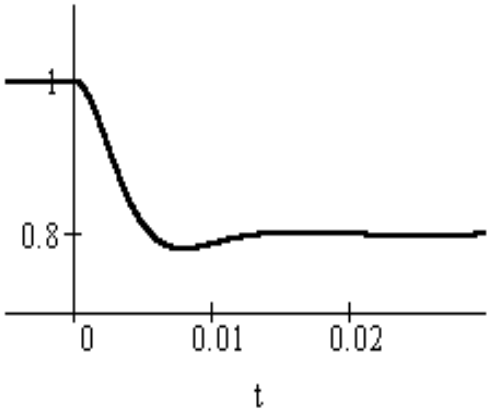


Рисунок 11.9. Перехідний процес струму в першій вітці

$$I2(t) := \begin{cases} i20 & \text{if } t < 0 \\ i2(t) & \text{if } t \geq \end{cases}$$

I2(t)

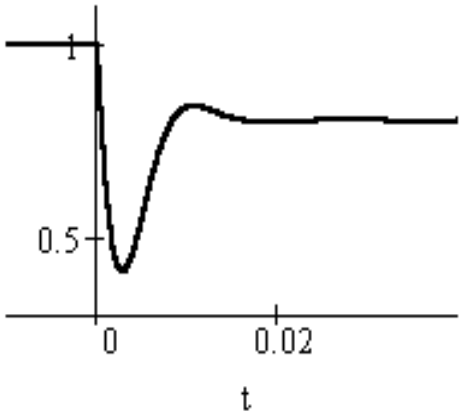


Рисунок 11.10. Перехідний процес струму в другій вітці

$$i30 := 0$$

$$I3(t) := \begin{cases} i30 & \text{if } t < 0 \\ i3(t) & \text{if } t \geq 0 \end{cases}$$

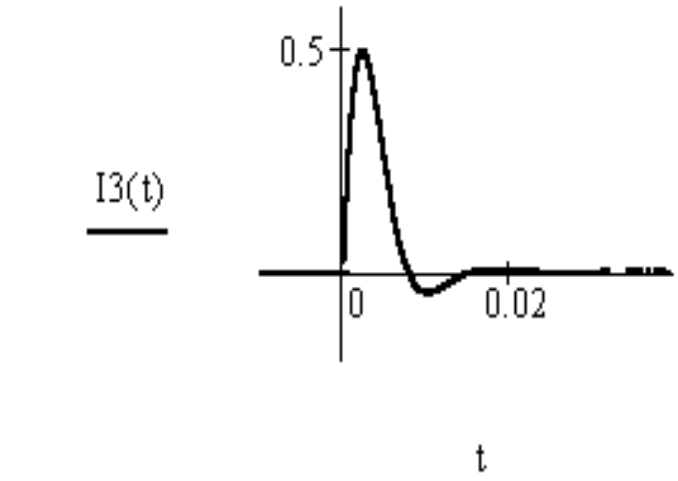


Рисунок 11.11. Перехідний процес струму в третій вітці

$$uL0 := 0$$

$$UL(t) := \begin{cases} uL0 & \text{if } t < 0 \\ uL(t) & \text{if } t \geq 0 \end{cases}$$

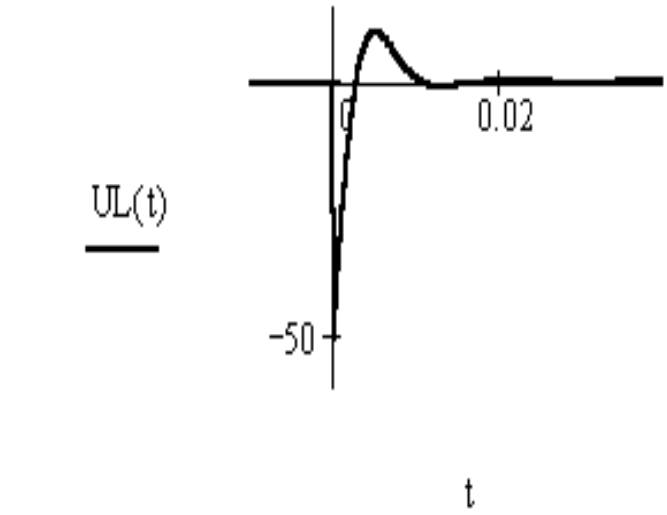


Рисунок 11.12. Перехідний процес напруги на індуктивності

11.5 Операторний метод розрахунку перехідних процесів

11.5.1 Суть та деякі властивості перетворення Лапласа

В попередніх лекціях було показано, що розрахунок перехідних процесів класичним методом зводиться до розв'язування неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь при заданих початкових умовах.

Основою операторного методу є те, що диференціальні рівняння в області дійсної змінної t перетворюються в алгебраїчні рівняння в області комплексної змінної $s = \sigma + j\omega$, $(\sigma > 0)$.

Такий перехід здійснюється за допомогою перетворення Лапласа, яке має вигляд:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt. \qquad (11.21)$$

Перетворення Лапласа однозначно переводить функцію дійсної змінної $f(t)$, яку називають оригіналом, в функцію комплексної змінної $F(s)$, яку називають зображенням $f(t)$. Таке перетворення умовно записують в формі $F(s) \doteq f(t)$ або $f(t) \doteq F(s)$.

Часто використовують і другу умовну форму запису $F(s) = L[f(t)]$ і $f(t) = L^{-1}[F(s)]$.

Перетворенню Лапласа властива єдиність, яка доводиться в курсі математики і яка може бути сформульована таким чином: якщо функція $f(t)$ має перетворення Лапласа $F(s)$, то це перетворення єдине; з іншого боку, якщо задана функція $F(s)$ і знайдена функція $f(t)$, яка задовольняє перетворення (11.21), то функція $f(t)$ єдина.

Функція $f(t)$ має зображення, якщо вона задовольняє умови Діріхле (має кінцеве число розривів першого роду і кінцеве число мінімумів і максимумів), при $t < 0$ тотожна нулю і є функцією обмеженого зростання, тобто:

$$|f(t)| < Ae^{at}, \qquad (11.22)$$

де A і a – постійні додатні величини, причому $a > \sigma$.

Відмітимо, що функції, які описують можливі реальні зовнішні дії на електричні кола, струми і напруги, які при цьому виникають, завжди задовольняють вказані умови і можуть бути перетворені за Лапласом.

Припустимо, що оригінал $f(t)$ має зображення $F(s)$, знайдемо зображення функції:

$$f_1(t) = Cf(t), \qquad (11.23)$$

де C – постійна величина.

Підставимо (6.3) в (6.1), тоді:

$$f_1(t) \doteqdot F_1(s) = \int_0^\infty f_1(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty Cf(t)e^{-st}dt = C\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = CF(s). \quad (11.24)$$

Таким чином, зображення функції *f(t)*, помножене на постійну величину (11.23), дорівнює постійній величині, помноженій на зображення цієї функції (11.24).

Нехай є декілька функцій $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_n(t)$, які мають, відповідно, зображення $F_1(s)$, $F_2(s)$,..., $F_n(s)$. Знайдемо зображення суми цих функцій:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + ... + f_n(t). \quad (11.25)$$

Використовуючи (11.21), отримуємо:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty \left(f_1(t) + f_2(t) + ... + f_n(t)\right)e^{-st}dt = \int_0^\infty f_1(t)e^{-st}dt + \\ + \int_0^\infty f_2(t)e^{-st}dt + ... + \int_0^\infty f_n(t)e^{-st}dt = F_1(s) + F_2(s) + ... + F_n(s), \quad (11.26)$$

тобто зображення суми функцій дорівнює сумі зображень цих окремих функцій.

Така властивість перетворення Лапласа, коли виконуються умови (11.24) і (11.26), називається властивістю лінійності.

Знайдемо зображення деяких функцій, які широко використовуються в теорії кіл.

Нехай $f(t)=A$, де A є сталою величиною. Знайдемо зображення цієї функції, використовуючи (11.21).

$$F(s) = A\int_0^\infty e^{-st}dt = A\frac{e^{-st}}{-s}\Bigg|_0^\infty = \frac{A}{s}, \quad (11.27)$$

$$\text{тобто } A \doteqdot \frac{A}{s}.$$

Якщо $f(t)=e^{-\alpha t}$, (α може бути дійсним або комплексним числом), то:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(\alpha+s)t}dt = \frac{e^{-(\alpha+s)t}}{-(\alpha+s)}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{s+\alpha}.$$

Таким чином:

$$e^{-\alpha t} \doteqdot \frac{1}{s+\alpha}. \quad (11.28)$$

Якщо $f(t)=e^{\alpha t}$, то, змінивши знак перед α в (11.28), отримуємо:

$$e^{\alpha t} \doteqdot \frac{1}{s-\alpha}. \tag{11.29}$$

Використаємо вираз (11.29) для знаходження зображення синусоїдної і косинусоїдної функцій, прийнявши $\alpha=j\,\omega$.

$$e^{j\omega\cdot t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t). \tag{11.30}$$

Зображення $e^{j\omega\cdot t}$:

$$\frac{1}{s-j\omega} = \frac{s+j\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{s}{s^2+\omega^2} + j\frac{\omega}{s^2+\omega^2}. \tag{11.31}$$

Порівнюючи (11.30) і (11.31), отримуємо:

$$\cos(\omega t) \doteqdot \frac{s}{s^2+\omega^2}, \tag{11.32}$$

$$\sin(\omega t) \doteqdot \frac{\omega}{s^2+\omega^2}. \tag{11.33}$$

Нехай функція $f(t)$ має зображення $F(s)$. Знайдемо зображення похідної цієї функції.

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt.$$

Візьмемо інтеграл частинами. Як відомо:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Позначимо $u = e^{-st}$, $v = f(t)$, тоді $du = (-s)e^{-st}dt$ і підставимо отримані значення:

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)(-s)e^{-st}dt = \frac{f(t)}{e^{st}}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt.$$

Згідно з умовою (11.22), функція $f(t)$ зростає не швидше ніж функція e^{st}, тому при підстановці верхньої межі в першу складову вона перетворюється на нуль, а при підстановці нижньої межі перша складова перетворюється в $f(0)$, тобто в значення функції $f(t)$ при $t = 0$. Інтеграл в другій складовій, відповідно до (6.1), є зображенням функції $f(t)$, тобто $F(s)$. Таким чином:

$$\frac{df(t)}{dt} \doteqdot sF(s) - f(0). \tag{11.34}$$

Знайдемо зображення інтеграла від попередньої функції *f(t)*. Позначимо:

$$\phi(t) = \int f(t)dt = \int_0^t f(t)dt + \phi(0), \tag{11.35}$$

де φ(0) є значення функції φ(t) при *t = 0*.

Враховуючи (11.35) і властивість лінійності, запишемо:

$$L\left[\int f(t)dt\right] = L\left[\int_0^t f(t)dt\right] + L\left[\phi(0)\right]. \tag{11.36}$$

Оскільки:

$$\left[\int_0^t f(t)dt\right]' = f(t),$$

то:

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right]' = L\left[f(t)\right] = F(s) \tag{11.37}$$

і, відповідно до (11.34),

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right]' = sL\left[\int_0^t f(t)dt\right] - \int_0^0 f(t)dt \tag{11.38}$$

.

Оскільки останній інтеграл дорівнює нулю, то, з врахуванням (11.37),

$$F(s) = sL\left[\int_0^t f(t)dt\right],$$

і

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}\ . \tag{11.39}$$

У виразі (11.36) $\varphi(0)$ – постійна величина, тому, згідно з (11.27), і

$$L\left[\phi(0)\right] = \frac{\phi(0)}{s}\ .$$

Таким чином:

$$\phi(t) = \int f(t)dt \doteq \frac{F(s)}{s} + \frac{\phi(0)}{s}. \tag{11.40}$$

Вирази (11.34) і (11.40) показують, що операціям диференціювання та інтегрування функцій дійсної змінної t відповідають алгебраїчні операції множення і ділення зображень цих функцій на комплексну змінну s (за нульових початкових умов). Якщо початкові умови не нульові, їх враховують так, як показано в (11.34) і (11.40). Це означає, що диференціальним рівнянням оригіналів відповідають алгебраїчні рівняння зображень.

Відмітимо ще деякі теореми, які відомі з курсу математики.

Теорема про запізнення. Якщо $f(t) \rightleftharpoons F(s)$, то:

$$\mathrm{f}\left(\mathrm{t}-\mathrm{t}_0\right) \rightleftharpoons e^{-st_0} F\left(s\right). \tag{11.41}$$

Теорема зсуву. Якщо $f(t) \rightleftharpoons F(s)$, то:

$$e^{-\alpha \cdot t} f\left(t\right) \rightleftharpoons F\left(s+\alpha\right). \tag{11.42}$$

11.5.2 Операторні зображення електротехнічних параметрів та операторні схеми заміщення

Вхідна напруга кола $u(t)$ або діюча в ньому е.р.с. $e(t)$ зображуються в операторному вигляді як $U(s)$ або $E(s)$.

Для кіл постійного струму можна записати:

$$U\left(s\right)=\frac{U}{s}, \quad E\left(s\right)=\frac{E}{s}. \tag{11.43}$$

Для кіл синусоїдного струму:

$$u\left(t\right)=U_m \sin\left(\omega t\right) \rightarrow U\left(s\right)=\frac{U_m \omega}{s^2+\omega^2}. \tag{11.44}$$

Розглянемо операторні зображення пасивних елементів і закон Ома в операторному вигляді для них.

Резистор

Операторне зображення резистора показане на рис. 11.13.

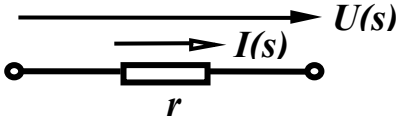


Рисунок 11.13. Операторний еквівалент резистивного елемента

Закон Ома в операторному вигляді:

$$U_r\left(s\right)=I\left(s\right)r. \tag{11.45}$$

Індуктивність

Операторне зображення індуктивності (рис. 11.14), окрім операторного опору, може містити в собі і тимчасову додаткову е.р.с, яка є наслідком накопиченої в елементі енергії магнітного поля (якщо, звичайно, через індуктивність до комутації протікав струм). Напрямок цієї е.р.с. збігається з напрямком струму в індуктивності до комутації.

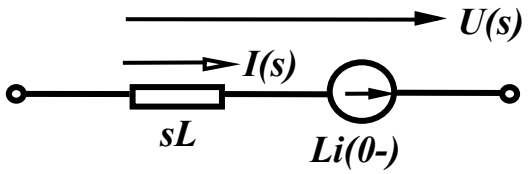


Рисунок 11.14. Операторний еквівалент індуктивності

Закон Ома в операторному вигляді:

$$U_L(s) = I(s)sL - Li(0-). \tag{11.46}$$

Ємність

Операторне зображення ємності (рис. 11.15), окрім операторного опору, може містити в собі і тимчасову додаткову е.р.с, яка є наслідком накопиченої в елементі енергії електричного поля (якщо, звичайно, напруга на ємності до комутації не дорівнювала нулю). Напрямок цієї е.р.с. протилежний напрямку струму.

Закон Ома в операторному вигляді:

$$U_C(s) = \frac{I(s)}{sC} + \frac{u_C(0-)}{s}. \tag{11.47}$$

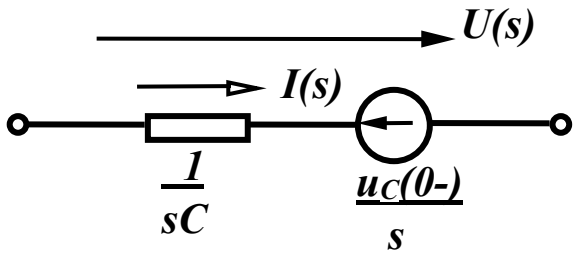


Рисунок 11.15. Операторний еквівалент ємності

Операторні схеми – це такі схеми, у вітках яких діють зображення джерел енергії, містяться операторні елементи і протікають зображення струмів.

При складанні операторної схеми треба враховувати такі правила.

1. Операторна схема складається для післякомутаційного стану, тому в операторній схемі не показується ключ і вилучаються елементи, в яких *одразу піс-*

ля комутації перестає протікати струм. Можуть існувати кола, для яких операторні схеми складаються з окремих, не пов'язаних між собою частин.

2. Додаткові тимчасові е.р.с. в реактивних елементах доцільно показувати на операторних схемах лише у випадку ненульових початкових умов.

Розглянемо приклад.

Розглянемо ще один приклад (рис. 11.16).

Операторна схема, яка відповідає заданій, зображена на рис. 11.16, б. Визначимо початкові значення $i_3(0)$ і $u_C(0)$ та, відповідно, додаткові е.р.с.

У колі до комутації протікали постійні струми I_1, I_2. I_3, у вітці з розімкнутим ключем і у вітці, яка містить послідовно з'єднані елементи С і R_4, струми не протікали, тому:

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Отже,

$$i_3(0_+) = i_3(0_-) = i_3(0) = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

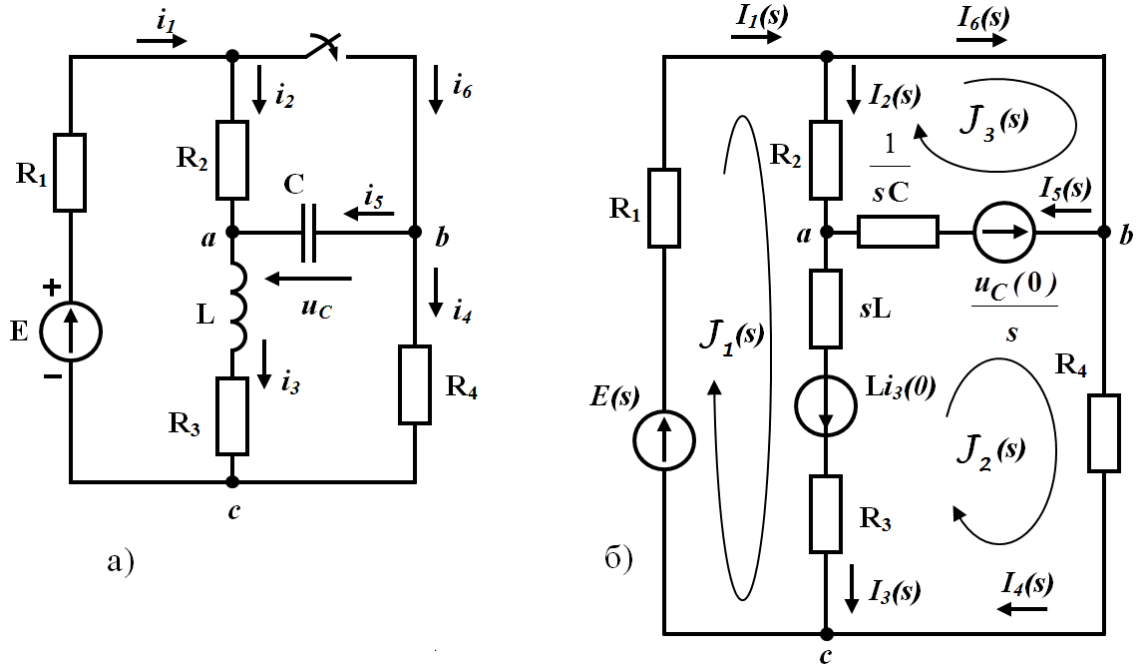


Рисунок 11.16. Електрична схема та її операторна схема заміщення

Напруга на ємності до комутації дорівнює напрузі між точками a і b , а оскільки при відсутності струму через опір R_4, потенціал точки b дорівнює потенціалу точки c, то:

$$U_{ab} = U_{ac} = I_3 R_3 = \frac{E R_3}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Перехідна напруга u_C при вибраних напрямах струмів після комутації направлена назустріч напрузі U_{ab}, тому:

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = u_C(0) = -U_{ab} = \frac{ER_3}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Складемо для знаходження зображень струмів систему рівнянь за методом контурних струмів. В схемі три незалежних контури і при вибраних напрямах контурних струмів отримуємо:

$$J_1(s)(R_1 + R_2 + sL + R_3) - J_2(s)(sL+R_3) - J_3(s)R_2 = \frac{E}{s} + Li_3(0),$$

$$- J_1(s)(sL+R_3) - J_2(s)(R_3 + sL + \frac{1}{sC} + R_4) - J_3(s)\frac{1}{sC} = - Li_3(0) + \frac{u_C(0)}{s},$$

$$- J_1(s)R_2 - J_2(s)\frac{1}{sC} + J_3(s)(R_2 + \frac{1}{sC}) = -\frac{u_C(0)}{s}.$$

Розв'язуючи цю систему, можна знайти зображення контурних струмів, зображення струмів у вітках визначаються через зображення контурних струмів:

$$I_1(s) = J_1(s), \quad I_2(s) = J_1(s) - J_3(s), \quad I_3(s) = J_1(s) - J_2(s),$$

$$I_4(s) = J_2(s), \quad I_5(s) = - J_2(s) + J_3(s), \quad I_6 = J_3(s).$$

11.5.3 Закони Кірхгофа в операторній формі

Операторна форма запису першого закону Кірхгофа виглядає як:

$$\sum_{k=1}^{n} I_k(s) = 0. \tag{11.48}$$

Перед записом другого закону Кірхгофа введемо поняття повного операторного опору ділянки кола *rLC:*

$$Z(s) = r + sL + \frac{1}{sC}. \tag{11.49}$$

Тоді другий закон Кірхгофа запишеться як:

$$\sum_{k=1}^{n} I_k(s) Z_k(s) = \sum_{k=1}^{n} \left[E_k(s) + L_k i_{Lk}(0-) - \frac{u_{Ck}(0-)}{s} \right]. \tag{11.50}$$

Розглянемо приклад.

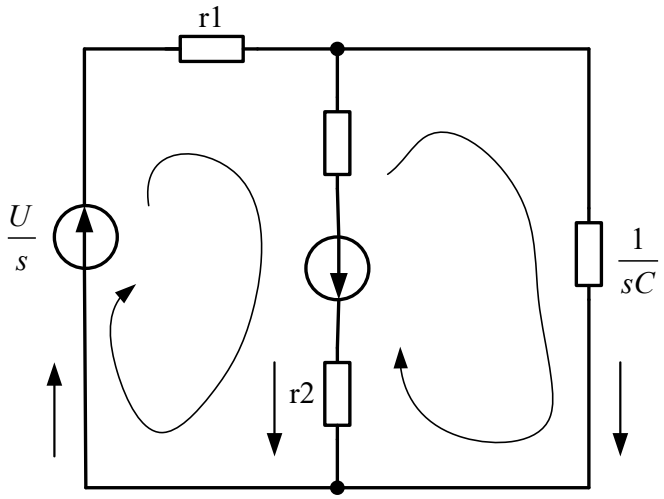


Рисунок 11.17. Операторна схема заміщення електричного кола

Складемо систему рівнянь за законами Кірхгофа в операторному вигляді для схеми (рис. 11.17). Приймемо напрямок обходу контурів за годинниковою стрілкою.

$$\begin{aligned} &I_1(s)-I_2(s)-I_3(s)=0,\\ &I_1(s)r_1+I_3(s)\frac{1}{sC}=\frac{U}{s},\\ &I_1(s)r_1+I_2(s)(r_2+sL)=\frac{U}{s}+Li_2(0). \end{aligned} \qquad (11.51)$$

11.5.4 Перехід від зображення до оригіналу

Отримані операторні значення шуканих параметрів потрібно записати у вигляді функцій часу, тобто знайти оригінал отриманих зображень. Існують різні шляхи знаходження оригіналів. В теорії кіл, зазвичай, використовують теорему розкладання.

Теорема розкладання використовується в тих випадках, коли зображення деякої функції *F(s)* записано у вигляді відношення двох правильних поліномів:

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{a_m s^m+a_{m-1}s^{m-1}+\ldots+a_1 s+a_0}{b_n s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\ldots+b_1 s+b_0}, \qquad (11.52)$$

при цьому $m<n$.

Як правило, зображення величин, які визначаються при розрахунку перехідних процесів в лінійних колах, задовольняють цю умову.

Далі перехід до оригіналу здійснюється за таким алгоритмом:

1. Визначаються корені рівняння $Q(s)=0$. Максимально можлива кількість коренів на одиницю більша за кількість реактивних елементів в колі.

2. Знаходиться перша похідна знаменника $Q'(s)$.

3. Оригінал функції $F(s)$ визначається за формулою:

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{P(s_k)}{Q'(s_k)}e^{s_k t}, \qquad (11.53)$$

де s_k – корінь знаменника;

$P(s_k)$ – значення чисельника функції $F(s)$ при $s=s_k$;

$Q'(s_k)$ – значення похідної знаменника функції $F(s)$ при $s=s_k$;

n – кількість коренів знаменника.

Розглянемо приклад.

Нехай зображення деякої функції має вигляд:

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{s^2+4s+8}{s(s^2+6s+8)}.$$

Знайти оригінал цієї функції.

Знаходимо корені знаменника:

$$s\left(s^2+6s+8\right)=0 \Rightarrow s_1=0,\ s_2=-2,\ s_3=-4.$$

Визначаємо значення чисельника для $s=s_k$:

$$P(s_1)=8;\ \ P(s_2)=4-8+8=4;\ \ P(s_3)=16-16+8=8.$$

Знаходимо похідну знаменника $Q'(s)=s^2+6s+8+s(2s+6)$ і її значення для $s=s_k$: $Q'(s_1)=8;\ Q'(s_2)=-4;\ Q'(s_3)=8$.

Підставляємо отримані значення в (11.53):

$$f(t)=\sum_{k=1}^{3}\frac{P(s_k)}{Q'(s_k)}e^{s_k t}=\frac{P(s_1)}{Q'(s_1)}e^{s_1 t}+\frac{P(s_2)}{Q'(s_2)}e^{s_2 t}+\frac{P(s_3)}{Q'(s_3)}e^{s_3 t}=$$

$$=\frac{8}{8}e^{0t}+\frac{4}{4}e^{-2t}+\frac{8}{8}e^{-4t}=1-e^{-2t}+e^{-4t}.$$

Розглянемо тепер розрахунок переходного процесу в колі (див. рис. 11.17) операторним методом. Операторна система рівнянь записана вище (11.51).

Розв’яжемо цю систему рівнянь у середовищі MathCAD, застосувавши процедурний блок «*Given-Find*» разом з функцією символьних перетворень «→».

$$U := 200 \quad L := 0.1 \quad C := 50 \cdot 10^{-6} \quad r1 := 200 \quad r2 := 50 \quad i20 := \frac{U}{r1}$$

Given

$$I1 - I2 - I3 = 0 \qquad I1 \cdot r1 + I3 \cdot \frac{1}{s \cdot C} = \frac{U}{s} \qquad I1 \cdot r1 + I2 \cdot (r2 + s \cdot L) = \frac{U}{s} + L \cdot i20$$

$$\text{Find}(I1, I2, I3) \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{\left(600. \cdot s + s^2 + 200000.\right)}{s \cdot \left(250000. + 600. \cdot s + s^2\right)} \\ \dfrac{\left(s^2 + 100. \cdot s + 200000.\right)}{s \cdot \left(250000. + 600. \cdot s + s^2\right)} \\ \dfrac{500.}{\left(250000. + 600. \cdot s + s^2\right)} \end{bmatrix}$$

$$I1(s) := \frac{\left(600. \cdot s + s^2 + 200000.\right)}{s \cdot \left(250000. + 600. \cdot s + s^2\right)} \qquad I2(s) := \frac{\left(s^2 + 100. \cdot s + 200000.\right)}{s \cdot \left(250000. + 600. \cdot s + s^2\right)}$$

$$I3(s) := \frac{500.}{\left(250000. + 600. \cdot s + s^2\right)}$$

Таким чином, ми отримали операторні зображення струмів $I_1(s), I_2(s), I_3(s)$. Операторні зображення напруг на індуктивності та ємності знайдемо за формулами:

$$u_L(s) = I_2(s)sL - Li_2(0), \quad u_C(s) = u_L(s) + I_2(s)r_2.$$

Повернутися до оригіналів, тобто знайти функції $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$, $u_C(t)$, $u_L(t)$ в Mathcad можна зробити за допомогою процедури оберненого перетворення Лапласа «*invlaplace*», наприклад,

$$UL(s) := I2(s) \cdot s \cdot L - L \cdot i20 \qquad UC(s) := UL(s) + I2(s) \cdot r2$$

$$i3(t) := I3(s)\ \text{invlaplace}, s\ \ \text{float}, 3 \rightarrow 1.25 \cdot \exp(-300. \cdot t) \cdot \sin(400. \cdot t)$$

$$i1(t) := I1(s)\ \text{invlaplace}, s\ \ \text{float}, 3 \rightarrow .800 +$$

$$+ .200 \cdot \exp(-300. \cdot t) \cdot \cos(400. \cdot t) + .150 \cdot \exp(-300. \cdot t) \cdot \sin(400. \cdot t)$$

$$i2(t) := I2(s)\ \text{invlaplace}, s\ \ \text{float}, 3 \rightarrow .800 +$$

$$+ .200 \cdot \exp(-300. \cdot t) \cdot \cos(400. \cdot t) - 1.10 \cdot \exp(-300. \cdot t) \cdot \sin(400. \cdot t)$$

$$uL(t) := UL(s)\ \text{invlaplace}, s\ \rightarrow$$

$$-50. \cdot \exp(-300. \cdot t) \cdot \cos(400. \cdot t) + 25. \cdot \exp(-300. \cdot t) \cdot \sin(400. \cdot t)$$

$$uC(t) := UC(s)\ \text{invlaplace}, s\ \rightarrow$$

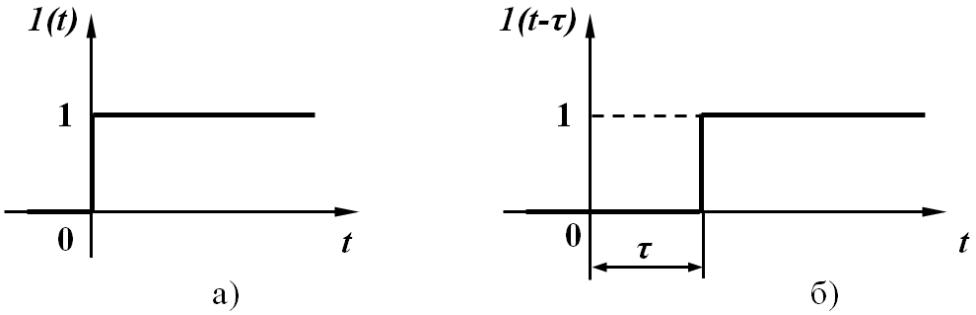
$$-40. \cdot \exp(-300. \cdot t) \cdot \cos(400. \cdot t) - 30. \cdot \exp(-300. \cdot t) \cdot \sin(400. \cdot t) + 40.$$

11.6 Перехідні процеси при довільному вхідному сигналі

11.6.1 Основи теорії сигналів

Одинична східчаста функція (рис. 11.18, а), яка називається функцією Хевісайда, визначається так:

$$1(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \ ; \\ 1, & t>0 \ . \end{cases} \tag{11.54}$$



а) б)

Рисунок 11.18. Графічне зображення функції Хевісайда

За допомогою одиничної функції діяння будь-якої напруги на коло може бути описано за допомогою добутку:

$$\mathrm{f(t)\cdot 1(t)}=\begin{cases} 0, & \mathrm{t<0} \ ; \\ \mathrm{f(t)}, & \mathrm{t>0} \ . \end{cases}$$

Якщо коло в момент t = 0 вмикається на постійну напругу U_0, то це можна описати добутком:

$$\mathrm{U_0\cdot 1(t)}=\begin{cases} 0, & \mathrm{t<0} \ ; \\ \mathrm{U_0}, & \mathrm{t>0} \ . \end{cases}$$

Цей вираз вказує на те, що напруга зростає від нуля до U_0 стрибком в момент вмикання (t= 0), далі діє безперервно, залишаючись постійною, тобто відпадає необхідність у використанні ключа.

Якщо діяння подається на коло не в момент t = 0 , а із запізненням на час τ, то його слід записувати за допомогою одиничної функції (рис. 11.18 ,б) з аргументом з запізненням (t - τ):

$$1(t-\tau)=\begin{cases} 0, & t<\tau \ ; \\ 1, & t>\tau \ . \end{cases} \tag{11.55}$$

Добуток:

$$U_0 \cdot 1(t-\tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ U_0, & t > \tau \end{cases};$$

вказує на те, що напруга величиною U_0 вмикається в коло в момент часу $t = \tau$.

Реакція кола на одиничну східчасту функцію при нульових початкових умовах називається перехідною характеристикою кола і позначається h(t). Під нульовими початковими умовами розуміють нульові значення незалежних початкових умов.

З електротехнічної точки зору дія одиничної східчастої напруги на коло рівноцінна вмиканню кола в момент t = 0 під постійну напругу 1 В. Таким чином, для визначення перехідної характеристики кола h(t) слід знайти необхідну реакцію (згідно з умовою задачі), розрахувавши перехідний процес в колі, схема якого наведена на рис. 11.19 (початкові умови нульові).

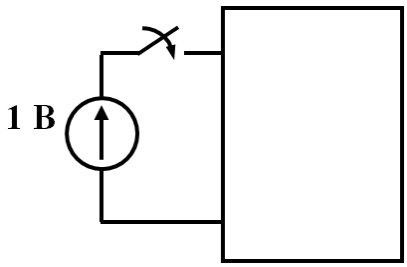


Рисунок 11.19. Схема розрахункового кола

Такий розрахунок можна проводити як класичним, так і операторним методом. Знайдена реакція і буде шуканою перехідною характеристикою h(t).

Наприклад, при вмиканні кола, яке складається з послідовно з'єднаних опору R і індуктивності L, на напругу складної форми, де як реакції треба знайти струм, перехідною характеристикою є струм від дії постійної напруги на вході 1 В. Оскільки струм в такому колі від дії постійної напруги U визначається, як відомо, за формулою:

$$i = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right),$$

то перехідна характеристика:

$$h(t) = \frac{1}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right). \qquad (11.56)$$

В складних колах зручно спочатку знаходити зображення перехідної характеристики H(s), а потім за теоремою розкладання визначити h(t).

Подамо будь-яке коло у вигляді чотириполюсника (рис. 11.20, а), до якого прикладене деяке діяння f(t), і реакція на це діяння на виході x(t). Для знаход-

ження зображення реакції X(s) перекреслимо схему в операторній формі (рис. 11.20, б).

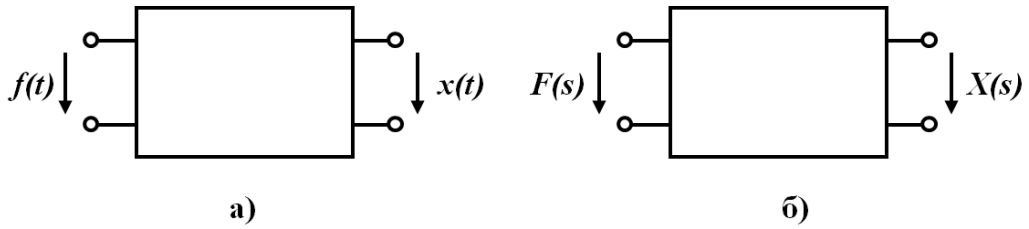


Рисунок 11.20. Чотириполюсник (а) та його операторна схема заміщення (б)

Оскільки початкові умови нульові, то ніяких додаткових е.р.с. в чотириполюснику не з'являється, а зв'язок між зображеннями реакції X(s) і діяння F(s) записується у вигляді:

$$X(s) = K(s)F(s), \tag{11.57}$$

де K(s) – передатна функція кола, яка залежить тільки від параметрів кола і виду їх з'єднання між собою.

Якщо діяння є одиничною східчастою функцією 1(t), то її зображення можна знайти, використовуючи інтеграл Лапласа:

$$L\left[1(t)\right] = \int_0^\infty 1(t)e^{-st}dt = \frac{1}{s} \quad ; \quad 1(t) \rightleftharpoons \frac{1}{s}. \tag{11.58}$$

Тоді зображення перехідної характеристики визначається за виразом:

$$H(s) = \frac{K(s)}{s}. \tag{11.59}$$

Приклад. Знайти перехідну характеристику для напруги на ємності в колі, яке зображене на рис. 11.21, а.

Наведемо схему в операторній формі (початкові умови нульові, рис. 11.21, б) і виразимо напругу $U_C(s)=U_2(s)$ через вхідну напругу $U_1(s)$.

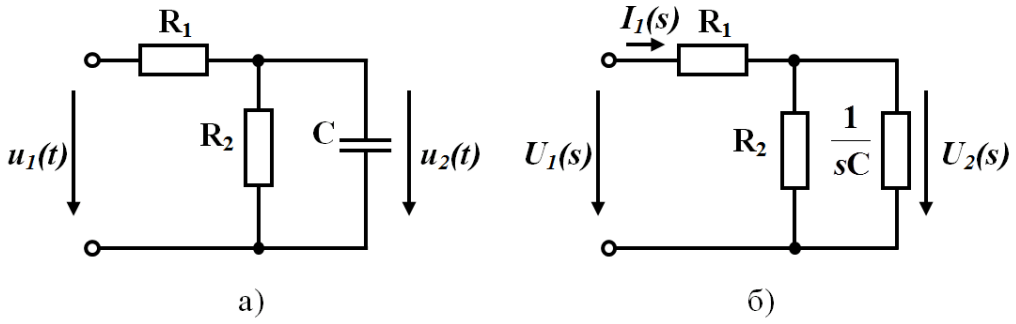


Рисунок 11.21. Електрична схема (а) та її операторна схема заміщення з нульовими початковими умовами (б)

Вхідний струм:

$$I_1(s)=\frac{U_1(s)}{R_1+\dfrac{R_2\dfrac{1}{sC}}{R_2+\dfrac{1}{sC}}}=\frac{U_1(s)}{R_1+\dfrac{R_2}{R_2Cs+1}}=\frac{U_1(s)(R_2Cs+1)}{R_1R_2Cs+R_1+R_2}.$$

Невідома напруга:

$$U_2(s)=I_1(s)\frac{R_2\dfrac{1}{sC}}{R_2+\dfrac{1}{sC}}=I_1(s)\frac{R_2}{R_2Cs+1}=\frac{U_1(s)R_2}{R_1R_2Cs+R_1+R_2}.$$

Враховуючи, що $F(s) = U_1(s)$, $X(s) = U_2(s)$, передаточна функція кола:

$$K(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=\frac{R_2}{R_1R_2Cs+R_1+R_2}.$$

і зображення перехідної характеристики для напруги на ємності, згідно з (8.6):

$$H_U(s)=\frac{K(s)}{s}=\frac{R_2}{s\left(R_1R_2Cs+R_1+R_2\right)}.$$

Використовуючи теорему розкладання, знаходимо оригінал перехідної характеристики:

$$h_U(t)=\frac{R_2}{R_1+R_2}-\frac{R_2}{R_1+R_2}e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}\cdot t}.$$

Знаючи перехідну характеристику, легко визначити значення $u_C(t)$ при будь-якій величині постійної вхідної напруги. Дійсно, якщо на вході увімкнена постійна напруга U_1, то:

$$u_2(t)=U_1h_U(t).$$

Імпульсною характеристикою кола або ваговою характеристикою називають реакцію кола на одиничну імпульсну функцію при нульових початкових умовах.

Одинична імпульсна функція, її називають функцією Дірака або δ-функцією, визначається тим, що її площа дорівнює одиниці, величина імпульсна прямує до нескінченності при $t \to 0$, а при всіх інших значеннях t вона дорівнює нулю:

$$\delta(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \infty, & t=0\\ 0, & t>0\,.\end{cases} \tag{11.60}$$

На рис. 11.22 показаний імпульс шириною *T* і висотою *1/T*, площа якого дорівнює одиниці.

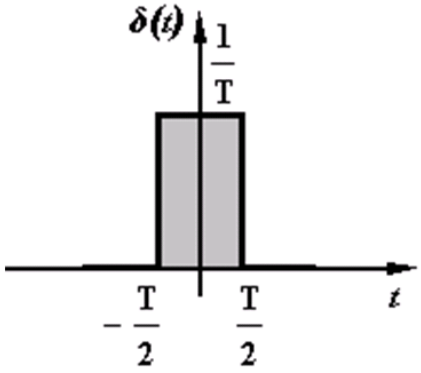


Рисунок 11.22. Графічне зображення функції Дірака

Одиничну імпульсну функцію *δ(t)* отримують із цього імпульсу при *T→ 0.* Для *δ*-функції справедливе співвідношення:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=\int_{t_1}^{t_2}\delta(t)dt=1\,, \tag{11.61}$$

якщо $t_1<0$, $t_2>0$.

Зрозуміло, що:

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(t)dt=\begin{cases}0, & t<0;\\ 1, & t>0,\end{cases}$$

отже,

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(t)dt=1(t),$$

або:

$$\delta(t)=\frac{d1(t)}{dt}\,. \tag{11.62}$$

Якщо взяти добуток функцій f(t) на δ(t), то цей добуток при всіх t ≠ 0 перетворюється на нуль, а при t = 0 має значення $f(0)\delta(t)$, тобто:

$$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)\,.$$

Згідно з цим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(0)\delta(t)dt = f(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = f\left(0\right). \qquad (11.63)$$

Операторне зображення δ-функції:

$$L\left[\delta(t)\right] = \int_{0}^{\infty} \delta(t)e^{-s\cdot t}dt = e^{-s\cdot 0}\int_{0}^{\infty} \delta(t)dt = 1. \qquad (11.64)$$

Враховуючи отримане співвідношення і визначення імпульсної характеристики можна стверджувати, що операторне зображення імпульсної характеристики дорівнює зображенню передатної функції.

Якщо позначити зображення імпульсної характеристики $g(t)$ через $G(s)$, то:

$$G_U\left(s\right) = K\left(s\right). \qquad (11.65)$$

Для кола, яке розглядалося вище (рис. 8.4, а),

$$G_U(s) = K(s) = \frac{R_2}{R_1R_2Cs + R_1 + R_2} \quad \text{і} \quad g_U(t) = \frac{1}{R_1C}e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t}.$$

Якщо на вході кола (рис. 11.21, а) діє імпульс напруги, площа якого дорівнює А, тобто $u_1(t)=A\delta(t)$, то напруга на ємності $u_2(t) = Ag_U(t)$.

11.6.2 Розрахунок перехідних процесів при довільних вхідних сигналах з використанням перехідної характеристики

Нехай до деякого кола, для якого відома перехідна характеристика $h(t)$, прикладене східчасте діяння $u(t)$ (рис. 11.23).

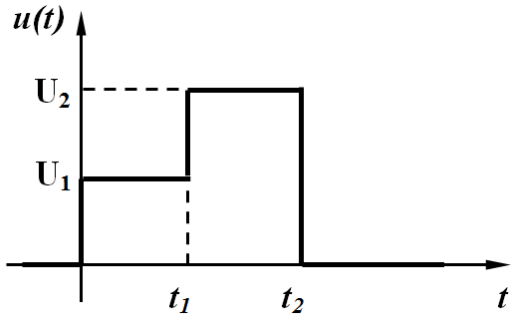


Рисунок 11.23. Східчата функція напруги

Визначимо реакцію кола через перехідну характеристику. Підкреслимо ще раз, що всі подальші міркування стосуються кіл з нульовими початковими умовами.

Перехідний процес у цих випадках визначають окремо на різних інтервалах часу.

На інтервалі $0 < t < t_1$ до кола прикладена постійна напруга U_1, тому:

$$x(t) = U_1 h(t), \quad 0 < t < t_1. \tag{11.66}$$

На інтервалі $t_1 < t < t_2$ продовжує діяти постійна напруга U_1 і, відповідно, існує реакція на цю напругу $U_1 h(t)$. В момент часу t_1 додатково підключається постійна напруга $(U_2 – U_1)$ і з'являється складова реакції від цього стрибка напруги, яка зміщена на час t_1, тобто $(U_2 – U_1)h(t – t_1)$. Таким чином, загальна реакція на цьому інтервалі:

$$x(t) = U_1 h(t) + (U_2 - U_1)\, h(t - t_1), \quad t_1 < t < t_2. \tag{11.67}$$

На інтервалі $t_2 < t < \infty$ реакція кола складається з трьох складових (рис. 11.24):

- продовжує діяти напруга U_1 – реакція $U_1 h(t)$;
- продовжує діяти постійна напруга $(U_2 – U_1)$, яка виникає в момент t_1 – реакція $(U_2 – U_1)h(t – t_1)$;
- в момент $t = t_2$ з'являється постійна напруга $(-U_2)$, реакція від якої – $(-U_2)h(t – t_2)$.

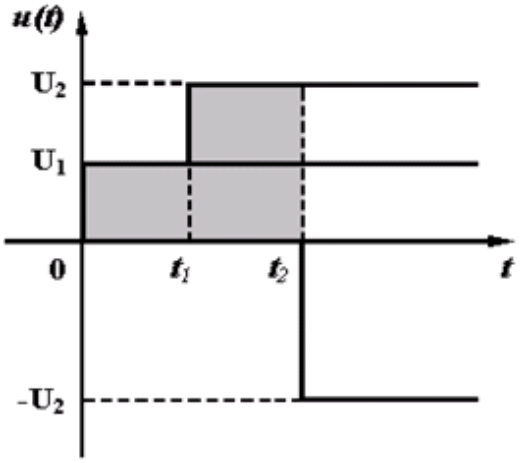


Рисунок 11.24. Розкладання східчатої функція напруги на елементарні складові

Таким чином, для $t_2 < t < \infty$

$$x(t) = U_1 h(t) + (U_2 - U_1) h(t - t_1) - U_2 h(t - t_2), \quad t > t_2. \tag{11.68}$$

Такий підхід до визначення реакції кола на східчасте діяння дозволяє розглядати перехідний процес при будь-яких складних діяннях.

Розглянемо знаходження реакції кола, перехідна характеристика h(t) якого відома, при вмиканні його до джерела напруги u(t) довільної форми (рис. 11.25) при нульових початкових умовах.

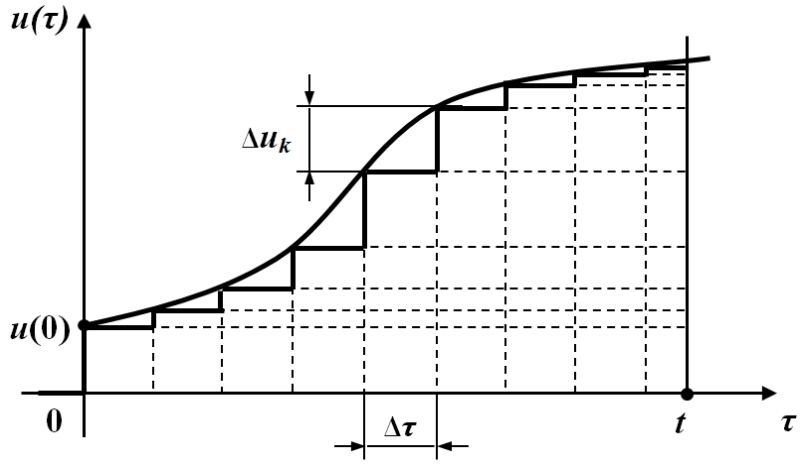


Рисунок 11.25. Заміна аналогової вхідної напруги функцією східчастого діяння

Виберемо деякий довільний фіксований момент спостереження t і розрахуємо реакцію (струм або напругу) до цього часу. Не дивлячись на те, що момент вибирається довільно, він фіксується і стає постійною величиною – параметром. В зв'язку з цим вводиться нове позначення змінного часу τ, який змінюється в межах $0 < \tau < t$.

Подамо прикладену напругу у вигляді східчастого діяння (рис. 11.25), коли через однакові проміжки часу $\Delta\tau = \frac{t}{n}$ додаються сходинки напруги Δu_k (*n* відповідає числу сходинок, за допомогою яких подається вихідне діяння).

Діяння сходинок на коло описуємо з допомогою одиничних функцій. На проміжку часу $0 < t < \Delta\tau$ реакція кола від дії напруги $u(0)1(t)$, тобто від нульової сходинки, яка наближено заміняє напругу на цьому проміжку,

$$x(t) \approx u(0)h(t);$$

на проміжку $\Delta\tau < t < 2\Delta\tau$ додається реакція від напруги $\Delta u_1 1(t - \Delta\tau)$, тобто від першої сходинки:

$$x(t) \approx u(0)h(t) + \Delta u_1 h(t - \Delta\tau);$$

на проміжку $2\Delta\tau < t < 3\Delta\tau$ додається реакція від напруги $\Delta u_2 1(t - 2\Delta\tau)$, тобто від другої сходинки:

$$x(t) \approx u(0)h(t) + \Delta u_1 h(t - \Delta\tau) + \Delta u_2 h(t - 2\Delta\tau);$$

на проміжку часу $n\ \Delta\tau < t < (n+1)\ \Delta\tau$ додається реакція від напруги $\Delta u_n 1(t - n\Delta\tau)$, тобто від дії *n*-ої сходинки:

$$x(t) \approx u(0)h(t) + \Delta u_1 h(t-\Delta\tau) + \Delta u_2 h(t-2\Delta\tau) + ... + \Delta u_k h(t-k\Delta\tau) + ... + \Delta u_n h(t-n\Delta\tau)$$

Або:

$$x(t) \approx u(0)h(t) + \sum_{k=1}^{n} \Delta u_k h(t-k\Delta\tau). \qquad (11.69)$$

Вираз (11.69) дає наближено значення реакції кола *x(t)*, оскільки справжня крива *x(t)* замінена східчастими діяннями.

Для отримання точного значення реакції кола спрямовуємо $\Delta\tau$ до нескінченно малої величини $d\tau$.

Тоді:

$$\Delta u_k = \frac{\Delta u_k}{\Delta\tau}\Delta\tau \to u'(\tau)d\tau ,$$

$$k\Delta\tau \to \tau .$$

Сума в (11.69) перетворюється на інтеграл з межами інтегрування від нуля до *t*, тобто:

$$x(t) = u(0)h(t) + \int_0^t u'(\tau)h(t-\tau)\,d\tau . \qquad (11.70)$$

Вираз (11.70) називають інтегралом накладання або інтегралом Дюамеля.

Приклад. Визначити закон зміни напруги на ємності в колі (рис. 11.26) при дії експоненційної напруги:

$$u(t) = Ue^{-\beta\cdot t}.$$

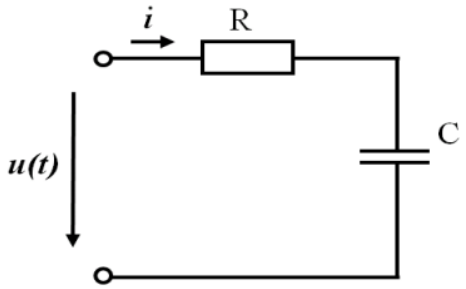


Рисунок 11.26. Схема розрахункового електричного кола

Перехідна характеристика цього кола для напруги на ємності:

$$h(t) = 1 - e^{-\alpha t};\ \alpha = \frac{1}{RC}.$$

Визначимо всі величини, які входять в інтеграл Дюамеля (11.70).

$$u(0) = U;\ u'(\tau) = \left(Ue^{-\beta\cdot\tau}\right)' = -\beta Ue^{-\beta\cdot\tau};$$

$$h(1-\tau) = 1 - e^{-\alpha(t-\tau)} .$$

Зауважимо, що змінною інтегрування в (11.70) є змінна τ, тому *t* при знахо-

дженні інтеграла розглядається як стала величина. Підставимо отримані величини в (11.70):

$$u_C(t) = U\left(1 - e^{-\alpha t}\right) + \int_0^t (-\beta) U e^{-\beta t}\left(1 - e^{-\alpha(t-\tau)}\right) d\tau =$$

$$= U\left(1 - e^{-\alpha t}\right) - \beta U\left(\int_0^t e^{-\beta t} d\tau - \int_0^t e^{-\beta t} e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau\right) =$$

$$= U\left(1 - e^{-\alpha t}\right) - \beta\, U\left(\left(\frac{1}{-\beta} e^{-\beta t}\right)_0^t - e^{-\alpha t} \int_0^t e^{(\alpha-\beta)\tau} d\tau\right) =$$

$$= U\left(1 - e^{-\alpha t}\right) - \beta U\left(\frac{e^{-\beta t}}{-\beta} + \frac{1}{\beta}\right) + \beta U e^{-\alpha t}\left(\frac{1}{\alpha - \beta} e^{(\alpha-\beta)\tau}\right)\Bigg|_0^t =$$

$$= U\left(1 - e^{-\alpha t}\right) + U e^{-\beta t} - U + \frac{\beta U e^{-\alpha t}}{\alpha - \beta}\left(e^{(\alpha-\beta)t} - 1\right) =$$

$$= U - U e^{-\alpha t} + U e^{-\beta t} - U + \frac{\beta U e^{-\beta t}}{\alpha - \beta} - \frac{\beta U e^{-\alpha t}}{\alpha - \beta} =$$

$$= U e^{-\beta t}\left(1 + \frac{\beta}{\alpha - \beta}\right) - U e^{-\alpha t}\left(1 + \frac{\beta}{\alpha - \beta}\right) = \frac{\alpha U}{\alpha - \beta}\left(U e^{-\beta t} - U e^{-\alpha t}\right).$$

Якщо прикладена напруга не може бути описана одним аналітичним виразом (рис. 11.27):

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t), & t < t_1, \\ u_2(t), & t_1 < t < t_2, \\ 0, & t > t_2 \end{cases},$$

то реакцію кола треба визначити для кожного інтервалу часу, де діє відповідна напруга.

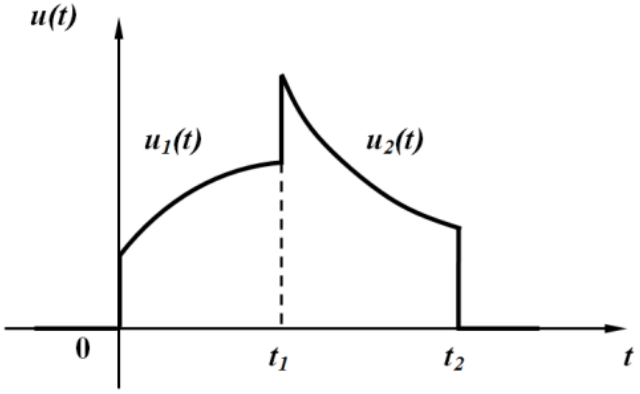


Рисунок 11.27. Вхідна напруга, що описується аналітично

Для $0 < t < t_1$:

$$x(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^t u_1'(\tau) h(t - \tau) d\tau.$$

При визначенні реакції кола на інтервалі $t_1 < t < t_2$ враховуємо такі обставини:

- продовжує діяти реакція кола на напругу $u_1(t)$, яка існує до моменту часу t_1, тому верхня межа цього інтеграла буде t_1;

- при визначенні реакції від напруги $u_2(t)$ варто мати на увазі, що ця напруга діє на коло з моменту часу t_1, тому нижня межа даного інтервалу t_1;

- в момент t_1 вхідна напруга стрибком змінюється від $u_1(t_1)$ до $u_2(t_1)$, тому цей стрибок враховується при визначенні реакції як дія постійної напруги $(u_2(t_1)-u_1(t_1))$ в момент t_1.

Таким чином, для $t_1 < t < t_2$:

$$x(t)=u_1(0)h(t)+\int_0^{t_1}u_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau+(u_2(t_1)-u_1(t_1))h(t-t_1)+\int_{t_1}^{t}u_2'(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

Для часу $t > t_2$ враховується стрибок напруги $(0-u_2(t_2))$ в момент t_2, і перестає діяти в цей же момент напруга $u_2(t)$.

Для $t > t_2$:

$$x(t)=u_1(0)h(t)+\int_0^{t_1}u_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau+(u_2(t_1)-u_1(t_1))h(t-t_1)+$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}u_2'(\tau)h(t-\tau)d\tau+(0-u_2(t_2))h(t-t_2).$$

11.6.3 Розрахунок перехідних процесів при довільних діяннях з використанням імпульсної функції

Знайдемо вираз за допомогою міркувань, аналогічних проведеним в попередньому пункті для знаходження реакції кола від дії напруги довільної форми з використанням імпульсної характеристики. В цьому випадку задане діяння розбиваємо на *n* прямокутних імпульсів (рис. 11.28) шириною $\Delta\tau$ і висотою u_k. Площа будь-якого імпульсу $u_k \times \Delta\tau$.

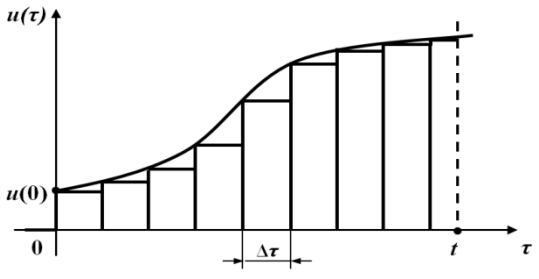


Рисунок 11.28. Заміна аналогової вхідної напруги функцією східчастого діяння

Реакція кола від дії окремого *k*-го імпульсу визначається як добуток площі імпульсу на імпульсну характеристику, яка зміщена на $k\Delta\tau$, тобто:

$$\Delta x_k = u_k \Delta\tau \cdot g(t-k\Delta\tau)\ . \qquad (11.71)$$

Реакція кола від заданого діяння в момент часу *t* наближено подається як сума реакцій від дії *n* імпульсів.

$$x(t) \cong \sum_{k=1}^{n} u_k \Delta\tau \cdot g(t - k\Delta\tau). \qquad (11.72)$$

При $\Delta\tau \to d\tau$ сума перетворюється на інтеграл, $k\Delta\tau \to \tau$, дискретні значення u_k стають неперервними миттєвими значеннями $u(\tau)$, тому:

$$x(t) = \int_0^t u(\tau) g(t - \tau) d\tau. \qquad (11.73)$$

Приклад. Визначимо напругу на ємності через імпульсну характеристику для кола (див. рис. 11.26) при вхідній напрузі $u(t) = Ue^{-\beta \cdot t}$.

Знайдемо імпульсну характеристику кола для напруги на ємності.

Напруга на ємності в операторній формі:

$$U_C(s) = \frac{U(s)\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{U(s)}{RCs + 1}.$$

Передатна функція кола і, отже, зображення імпульсної характеристики:

$$K(s) = G(s) = \frac{1}{RCs + 1}.$$

Оригінал цього зображення:

$$g(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC} t}.$$

Якщо позначити $\alpha = \frac{1}{RC}$, то $g(t) = \alpha e^{-\alpha t}$.

Підставляємо всі дані в (11.73), отримуємо:

$$u_c(t) = \int_0^t U e^{-\beta\tau} \alpha e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = U\alpha e^{-\alpha \cdot t} \int_0^t e^{(\alpha-\beta)\cdot\tau} d\tau = U\alpha e^{-\alpha \cdot t} \left(\frac{e^{(\alpha-\beta)\tau}}{\alpha - \beta} \right) \Bigg|_0^t =$$

$$= U\alpha e^{-\alpha t} \frac{1}{\alpha - \beta} \left(e^{(\alpha-\beta)\cdot t} - 1 \right) = \frac{U\alpha}{\alpha - \beta} \left(e^{-\beta \cdot t} - e^{-\alpha \cdot t} \right)$$

При розв'язанні задачі (див. рис. 11.26) з використанням інтеграла Дюамеля, записаного через імпульсну характеристику (11.73), стрибки напруги в моменти t_1 і t_2 враховуються самими функціями $u_1(t)$ і $u_2(t)$ безпосередньо при інтегруванні, тобто:

для $0 < t < t_1$:

$$x(t) = \int_0^t u_1(\tau) g(t-\tau) d\tau .$$

для $t_1 < t < t_2$:

$$x(t) = \int_0^{t_1} u_1(\tau) g(t-\tau) d\tau + \int_{t_1}^t u_2(\tau) g(t-\tau) d\tau .$$

для $t > t_2$:

$$x(t) = \int_0^{t_1} u_1(\tau) g(t-\tau) d\tau + \int_{t_1}^{t_2} u_2(\tau) g(t-\tau) d\tau .$$

Контрольні запитання до розділу 11

1. Що таке перехідний процес? Чому він виникає?
2. Сформулюйте перший закон комутації.
3. Сформулюйте другий закон комутації.
4. Запишіть компонентні співвідношення між струмом і напругою на ємності.
5. Запишіть компонентні співвідношення між струмом і напругою на індуктивності.
6. Що називається незалежними початковими умовами при розрахунку перехідного процесу?
7. Для яких параметрів у електричному колі знаходяться незалежні початкові умови?
8. Чи може струм в резисторі після комутації змінитися стрибком?
9. Чи може напруга на резисторі після комутації змінитися стрибком?
10. Чи може корінь характеристичного рівняння бути додатним?
11. Чи може дійсна частина комплексно-спряжених коренів характеристичного рівняння бути додатною?
12. Які існують три типи перехідного процесу другого порядку?
13. Якими є корені характеристичного рівняння при аперіодичному перехідному процесі другого порядку?
14. Якими є корені характеристичного рівняння при критичному перехідному процесі другого порядку?
15. Якими є корені характеристичного рівняння при коливальному перехідному процесі другого порядку?
16. Чи може коло другого порядку мати два однакових комплексних корені характеристичного рівняння?
17. Чи може коло другого порядку мати один комплексний та один дійсний корені характеристичного рівняння?
18. У якому місці потрібно розірвати електричне коло, щоб застосувати метод вхідного опору для складання характеристичного рівняння?
19. Як знаходиться фактична тривалість перехідного процесу при перехідному процесі другого порядку аперіодичного типу?

20. Що таке перетворення Лапласа? Як воно реалізується?

21. Як Ви розумієте «єдність» перетворення Лапласа?

22. Які основні властивості перетвореннння Лапласа?

23. Що таке забраження функції?

24. Що є операторним еквівалентом джерела е.р.с.?

25. Що є операторним еквівалентом резистивного елемента?

26. Що є операторним еквівалентом індуктивності?

27. Що є операторним еквівалентом ємності?

28. Що є причиною можливої появи в операторній схемі додаткової е.р.с. індуктивності?

29. Що є причиною можливої появи в операторній схемі додаткової е.р.с. індуктивності?

30. Чи можуть поліноми $P(s)$ або $Q(s)$ містити складову s^{-k}?

31. Чи потрібно в операторному методі розрахунку визначати примусові складові параметрів?

32. У чому полягає положення теореми розкладання?

33. Чи можуть поліноми, що використовуються у теоремі розкладання, мати від'ємний показник степеня?

34. Чи потрібно в операторному методі розрахунку визначати незалежні початкові умови?

35. Чи потрібно в операторному методі розрахунку визначати залежні початкові умови?

36. Що таке одинична східчаста функція або функція Хевісайда?

37. Що таке перехідна характеристика?

38. Що таке імпульсна функція або функція Дірака?

39. Як пов'язані між собою функції Хевісайда та Дірака?

40. Що таке вагова характеристика?

41. Чому для знаходження перехідної та вагової характеристик зручно використовувати операторний метод розрахунку?

42. Чому при розрахунку перехідної та вагової характеристик кола у операторних схемах заміщення не виникає тимчасових е.р.с.?

43. Як записується інтеграл Дюамеля з використанням перехідної харакетристики?

44. Як записується інтеграл Дюамеля з використанням вагової характеристики?

45. Як розрахувати перехідний процес за допомогою інтеграла Дюамеля, якщо прикладена напруга не може бути описана одним аналітичним виразом?

12 НЕЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА

12.1 Основні поняття та означення

Електричні кола, які вивчають в курсі теорії електричних та електронних кіл, поділяють на лінійні та нелінійні.

Лінійні електричні кола складаються тільки з лінійних елементів, для яких відповідні параметри їх опорів *R,* індуктивностей *L* і ємностей *C* мають певні й сталі значення, а між електричними та магнітними величинами на цих елементах існують лінійні пропорційні зв'язки:

$$\begin{cases} u = R \cdot i; \\ \psi = L \cdot i; \\ q = C \cdot u. \end{cases} \qquad (12.1)$$

Нелінійними колами називаються електричні кола, до складу яких входить хоча б один нелінійний елемент. Параметри нелінійних елементів не є сталими величинами, а залежать, явно чи опосередковано, або від струму, що через ці елементи проходить, або від прикладених до них напруг, або від зовнішніх умов роботи. Тому залежності між електричними та магнітними величинами для нелінійних елементів є більш складними і в загальному випадку їх можна подати у вигляді функціональних зв'язків:

$$\begin{cases} u = f_1(i); \\ \psi = f_2(i); \\ q = f_3(u), \end{cases} \qquad (12.2)$$

які називаються характеристиками нелінійних елементів. Такі характеристики, зазвичай, визначають експериментально й подають графічно, у табличний спосіб або аналітичними виразами.

Електричні властивості нелінійного резистивного елемента задає вольт-амперна характеристика u = f(i).

Характеристику нелінійного індуктивного елемента називають вебер-амперною характеристикою, оскільки та встановлює зв'язок між потокозчепленням котушки індуктивності та її електричним струмом ψ = f (i).

Нелінійна ємність характеризується кулон-вольтною характеристикою, яка задає зв'язок між накопиченим на електродах електричним зарядом і прикладеною напругою q = f(u).

Загальні позначення нелінійних елементів (опорів, ємностей, індуктивностей) в електричних схемах показано на рис. 12.1. Окремі з нелінійних елементів мають власні умовні графічні позначення, які обумовлені існуючою нормативною документацією.

Рисунок 12.1. Умовні позначення нелінійних елементів

Нелінійні елементи електричного кола за виглядом їх характеристики поділяють на такі, що мають:

- симетричну відносно початку координат характеристику (рис. 12.2, в, г), для якої виконується рівність y(x) = -y(-x), або несиметричну (рис. 12.2, а, б), якщо така рівність не виконується;

- монотонну, коли похідна $\frac{dy}{dx}$ завжди додатна і не змінює свого знака будь-де в межах всієї характеристики (рис. 12.2, б, в, г), та немонотонну (рис. 12.2, д), якщо ця похідна на окремих ділянках характеристики набуває від'ємного знака;

- однозначну, коли кожному значенню змінної x відповідає одне і тільки одне значення y (рис. 12.2, в), і неоднозначну, якщо одному значенню змінної x можуть відповідати декілька значень змінної y (рис. 12.2, е).

Окрім наведеної класифікації нелінійні елементи можуть бути керованими та некерованими.

Керованими нелінійними елементами є такі елементи електричного кола, характеристики яких залежать від деякої фізичної величини, яку називають керівною. Керівними можуть бути напруга, струм, температура, тиск, освітленість тощо.

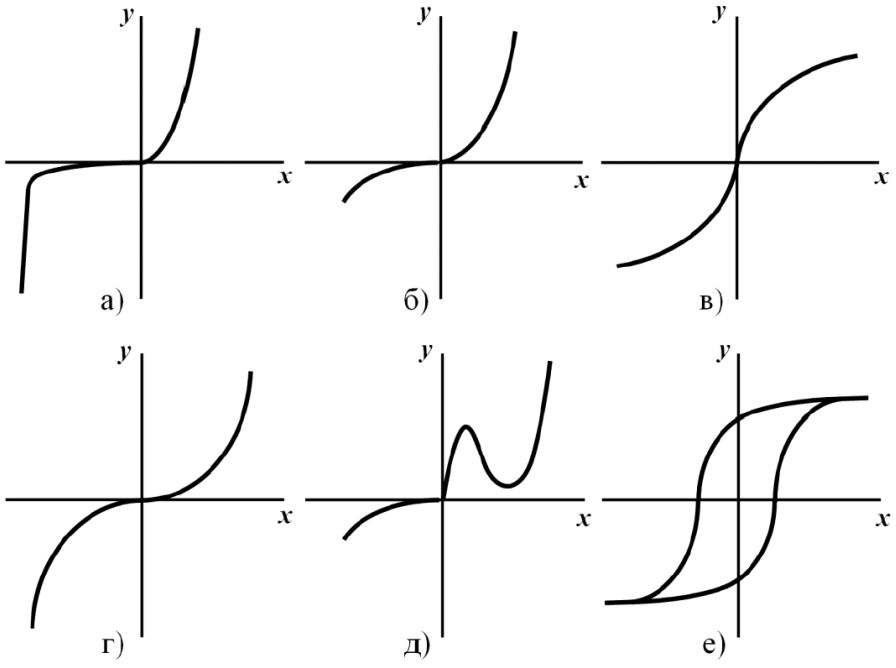


Рисунок 12.2. Характеристики нелінійних елементів

Кожен з керованих нелінійних елементів має сімейство характеристик, що визначені за деяких різних заданих сталих значень керівної величини. На рис. 12.3 наведено приклад такого сімейства характеристик y = f(x, k), де k – керівна фізична величина.

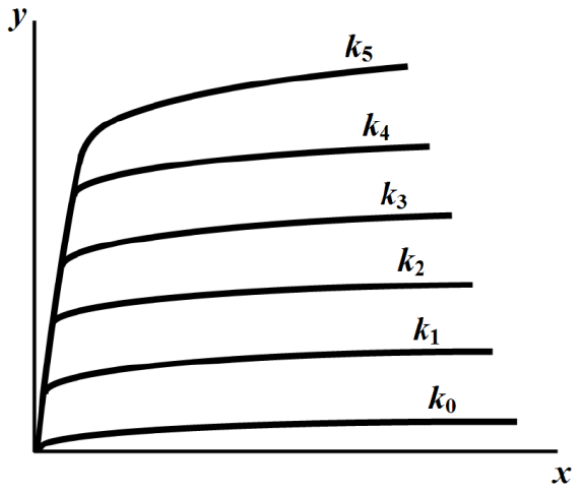


Рисунок 12.3. Ряд характеристик керованого нелінійного елемента

Для кожної точки нелінійної характеристики вводять поняття статичного та динамічного (диференціального) параметрів.

Так, статичним опором нелінійного резистивного елемента в точці *a* (рис. 12.4, а) називають відношення визначених в даній точці постійної напруги U_a нелінійного елемента і його постійного струму I_a.

$$R_a = \frac{U_a}{I_a}. \qquad (12.3)$$

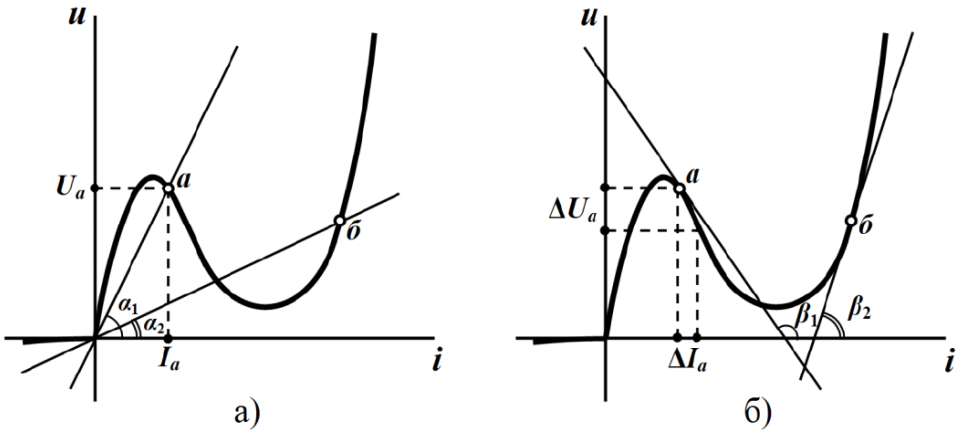


Рисунок 12.4. Геометричний зміст статичного (а) та динамічного (б) опору

Відповідно для статичної індуктивності та статичної ємності, співвідношення носять аналогічний характер.

$$\begin{cases} L_{cm} = \dfrac{\psi_0}{I_0}; \\ C_{cm} = \dfrac{q_0}{U_0}. \end{cases} \tag{12.4}$$

Статичні параметри пропорційні тангенсу кута між віссю абсцис і прямою, проведеною через початок координат та задану поточну точку. Наприклад, для точки *а* цим кутом буде кут α_1, а для точки *б* – кут α_2 (див. рис. 12.4, а).

Для опору віссю ординат має слугувати вісь напруг, для індуктивності – вісь потокозчеплень, а для ємності – вісь зарядів.

Статичні параметри залежать від положення точки, яка характеризує поточний стан елемента, і є завжди додатною.

Динамічним (диференціальним) опором нелінійного резистивного елемента називають відношення малого приросту напруги в точці а до відповідного приросту струму в цій же точці за умови, що останній прямує до нуля, тобто:

$$R_\partial = \lim_{\Delta I \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{dU}{dI}. \tag{12.5}$$

Аналогічно:

$$\begin{cases} L_\partial = \dfrac{d\psi}{dI}; \\ C_\partial = \dfrac{dq}{dU}. \end{cases} \tag{12.6}$$

Динамічні параметри пропорційні тангенсу кута нахилу дотичної в заданій точці до осі абсцис. Так, на рис. 12.4, б для точки *а* таким кутом є кут β_1, для точки *б* – кут β_2.

Динамічні параметри можуть набувати як додатного знака (наприклад, точка *б* на рис. 12.4, б), так і від'ємного – на ділянках спаду характеристики (точка *а* на тому ж рисунку).

Електромагнітні процеси в нелінійних електричних колах, порівняно з лінійними, є більш складними й різноманітними.

Назвемо деякі явища, які притаманні виключно нелінійним колам, спостерігати їх в лінійних колах неможливо в принципі:

- під час дії на коло синусоїдного сигналу реакція кола може бути несинусоїдною функцією від часу, що дозволяє здійснювати перетворення частоти або випрямлення змінної напруги;

- за зміни рівня вхідної напруги або величини навантаження в широкому діапазоні величина напруги або струму в навантаженні можуть залишатися практично незмінними. В цьому випадку здійснюється стабілізація вихідної напруги або струму;

- за дії на вході кола джерела постійної напруги на виході кола з'являється періодична напруга різної форми, тобто можливе виникнення автоколивань;

- за наявності різних початкових умов для того самого кола можуть існувати різні усталені режими;

- під час плавної зміни величини вхідної напруги або струму можлива стрибкоподібна зміна величини вихідної напруги або струму.

Наведений перелік можливостей нелінійних кіл далеко не повний, але і він дає змогу зрозуміти чому нелінійні кола знайшли широке застосування в електротехніці, радіоелектроніці, автоматиці та обчислювальній техніці.

Разом з тим, нелінійність характеристик елементів призводить до того, що електромагнітні процеси в нелінійних колах описуються нелінійними алгебраїчними або диференціальними рівняннями. Ще однією надзвичайно важливою властивістю нелінійних електричних кіл є неможливість застосування щодо них принципу накладання.

Тому аналіз процесів в нелінійних колах, зазвичай, проводять наближеними методами, оскільки на сьогодні не існує яких-небудь загальних прийомів аналітичного розв'язування нелінійних алгебраїчних та диференціальних рівнянь.

12.2 Аналітичне подання характеристик нелінійних елементів

Як було сказано, характеристики нелінійних елементів, зазвичай, подають у вигляді таблиць або графіків, які були отримані експериментально. Для аналітичних методів розрахунку нелінійні характеристики мають бути подані аналітичними виразами. Однак практично таке подання може бути тільки наближеним і тільки для окремої ділянки характеристики.

Звичайно, що точність наближення буде зростати, якщо тільки ускладнювати аналітичний вираз характеристики. Однак це, у свою чергу, призводить до ускладнень під час розв'язування математичних рівнянь, що описують процеси в нелінійних електричних колах. Тому на практиці під час аналізу нелінійного кола необхідно вибирати, з одного боку, між складністю подання аналітичної функції нелінійної характеристики, а з іншого – точністю її наближення.

Оцінюючи точність наближення, потрібно мати на увазі, що певні похибки з'являються вже на етапі експериментального визначення характеристики через нестабільність параметрів та характеристик елементів електричного кола під час його роботи. Таким чином, у всіх випадках бажано, щоб апроксимація (аналітичний опис) нелінійної характеристики, була, по можливості, більш точною та охоплювала всі її своєрідні якості.

В той же час, необхідно, щоб апроксимувальний вираз не був складним.

Виконання цих суперечливих вимог суттєво залежить від виду апроксимувальних функцій. Останніми можуть бути такі функції, як степеневі поліноми, експоненціальні поліноми, гіперболічні функції тощо. На вибір тієї чи іншої функції суттєво впливає вигляд конкретної характеристики нелінійного елемента.

Розглянемо деякі методи апроксимації нелінійної характеристики різними функціями.

Метод інтерполяції

Суть методу інтерполяції полягає в такому.

Нехай задано нелінійну характеристику (рис. 12.5), яку необхідно апроксимувати степеневим поліномом:

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n x^n, \tag{12.7}$$

тобто визначити невідомі коефіцієнти a_1, a_2, a_3, …, a_n.

Ці коефіцієнти розраховують з умови збігу значень апроксимувального полінома (12.7) та значень, які отримані за характеристикою в заданих чи наперед вибраних точках (рис. 12.5). Число вибраних точок характеристики має дорівнювати числу невідомих коефіцієнтів.

Якщо n = 3, то вибирають три точки 1, 2, 3, для яких з характеристики визначають значення x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3.

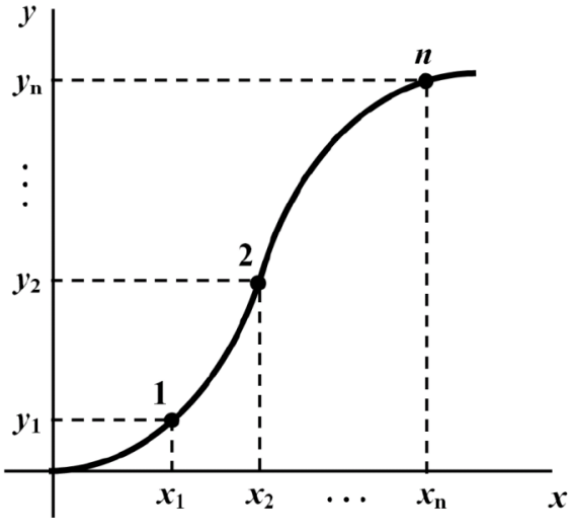


Рисунок 12.5. Характеристика нелінійного елемента з наведеними точками

Підставивши значення x_i, y_i в (12.7), отримують систему лінійних рівнянь для знаходження a_1, a_2, a_3.

$$\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 = y_1; \\ a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 = y_2; \\ a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 = y_3. \end{cases} \tag{12.8}$$

Недолік цього методу полягає в тому, що в проміжних точках похибка не контролюється й у деяких випадках може бути доволі великою, однак у вибраних точках апроксимувальний поліном (12.7) та характеристика дають значення, які збігаються абсолютно.

Метод найменших квадратів

Розглянемо метод найменших квадратів на прикладі апроксимації характеристики степеневим поліномом:

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3. \tag{12.9}$$

В цьому випадку кількість точок на характеристиці можна вибрати більше, аніж степінь полінома. Нехай їх буде m, тобто $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$.

Цей метод не вимагає абсолютного збігу значень апроксимувальної функції зі значеннями ординат характеристики нелінійного елемента у вибраних точках, тому для кожної точки аргумента x буде існувати деяка похибка між значеннями функції y, що були отримані за виразом (12.9), та значеннями y_i, взятими безпосередньо з нелінійної характеристики. Ця похибка для довільного i-го аргумента дорівнює:

$$\varepsilon_i = y_i - (a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3). \tag{12.10}$$

Піднесемо похибку ε_i до квадрата, додамо всі квадрати похибки:

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^2, \tag{12.11}$$

та накладемо умову мінімуму для цієї суми квадратів похибки, що дозволить визначити коефіцієнти a_1, a_2 і a_3. З цією метою прирівняємо до нуля часткові похідні від ε^2 за коефіцієнтами a_1, a_2 і a_3.

$$\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial a_2} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial a_3} = 0. \tag{12.12}$$

Для полінома третього степеня детально розписані рівняння (12.12) мають вигляд:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial a_1} &= \frac{\partial \left[\sum_{i=1}^{m} \left[y_i - (a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3) \right]^2 \right]}{\partial a_1} = \\
&= 2 \sum_{i=1}^{m} \left[y_i - (a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3) \right] \cdot x_i; \\
\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial a_2} &= 2 \sum_{i=1}^{m} \left[y_i - (a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3) \right] \cdot x_i^2; \\
\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial a_3} &= 2 \sum_{i=1}^{m} \left[y_i - (a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3) \right] \cdot x_i^2.
\end{aligned} \tag{12.13}$$

Після деяких перетворень отримаємо:

$$\begin{cases} a_1\sum_{i=1}^{m}x_i^2 + a_2\sum_{i=1}^{m}x_i^3 + a_3\sum_{i=1}^{m}x_i^3 = \sum_{i=1}^{m}x_i y_i; \\ a_1\sum_{i=1}^{m}x_i^3 + a_2\sum_{i=1}^{m}x_i^4 + a_3\sum_{i=1}^{m}x_i^5 = \sum_{i=1}^{m}x_i^2 y_i; \\ a_1\sum_{i=1}^{m}x_i^4 + a_2\sum_{i=1}^{m}x_i^5 + a_3\sum_{i=1}^{m}x_i^6 = \sum_{i=1}^{m}x_i^3 y_i \end{cases} \quad (12.14)$$

Система (12.14) дає можливість знайти невідомі коефіцієнти полінома.

Метод кусково-лінійної апроксимації

За методом кусково-лінійної апроксимації нелінійну характеристику на окремих ділянках замінюють прямолінійними відрізками. Означену заміну можна реалізувати за допомогою графічних побудов, як це, наприклад, показано на рис 12.6. Точність апроксимації залежатиме від кількості лінійних ділянок на заданому проміжку. Така кусково-лінійна заміна характеристики повністю визначається координатами (x_k, y_k) точок перелому, які задають межі між суміжними проміжками. Початкова (x_0, y_0) та кінцева (x_n, y_n) точки позначають робочу ділянку характеристики і не є точками перелому.

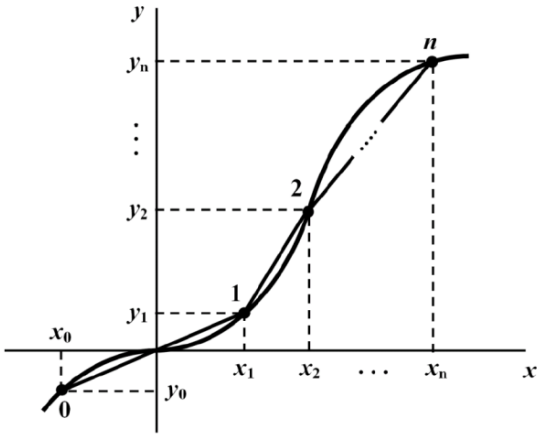


Рисунок 12.6. Приклад кусково-лінійної апроксимації функції

Рівняння відрізка прямої k-ої лінійної ділянки між двома сусідніми точками перелому (x_k, y_k) та (x_{k+1}, y_{k+1}) можна записати як:

$$\frac{y - y_k}{y_{k+1} - y_k} = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}.$$

Після перетворення:

$$y = \frac{y - y_k}{x_{k+1} - x_k}x + \frac{y_k x_{k+1} - y_{k+1}x_k}{x_{k+1} - x_k} = a_k x + b_k. \quad (12.15)$$

де a_k – кутовий коефіцієнт прямої; b_k – ордината точки перетину прямої з віссю y.

Перевага кусково-лінійної апроксимації полягає в тому, що на кожному проміжку нелінійний елемент розглядається як лінійний, і для аналізу такого кола на цих проміжках можна використовувати апарат теорії лінійних електричних кіл.

12.3 Графічний метод розрахунку нелінійних електричних кіл постійного струму

Під час розрахунку графічними методами характеристики нелінійних і лінійних елементів електричного кола подаються графічно, а розв'язок задачі шукається за допомогою відповідних графічних побудов.

Надалі будемо вважати, що характеристики нелінійних елементів є відомими.

12.3.1 Найпростіші схеми з'єднання нелінійних опорів

Розглянемо спочатку випадок, коли електричне коло складається з джерела постійної напруги та тільки одного нелінійного елемента (рис. 12.7). Назвемо таке коло початковим.

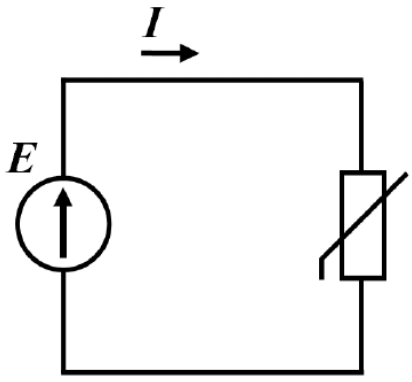


Рисунок 12.7 Початкове нелінійне електричне коло

Вольт-амперну характеристику нелінійного резистивного елемента показано на рис. 12.8.

Оскільки електрична напруга джерела U = E безпосередньо прикладена до нелінійного елемента, то за допомогою його вольт-амперної характеристики відразу ж можна визначити струм I, що проходить через цей елемент (рис. 12.7).

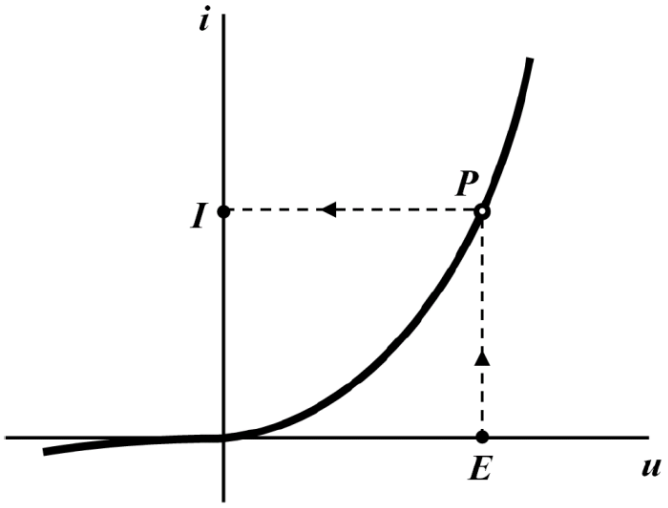


Рисунок 12.8. Приклад вольт-амперної характеристики нелінійного резистивного елемента початкового кола

Точку *P* на вольт-амперній характеристиці нелінійного резистивного елемента (рис. 12.8) називають робочою точкою. Вона визначає струм і напругу на нелінійному елементі в заданому робочому режимі.

Нехай тепер електричне коло має два нелінійних елементи: 1 і 2, з'єднаних між собою послідовно (рис. 12.9).

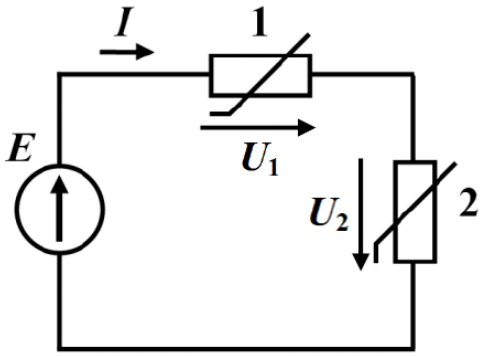


Рисунок 12.9. Послідовне нелінійне електричне коло

Вольт-амперні характеристики обох нелінійних опорів показано на рис. 12.10.

Задану схему можна привести до початкової, якщо ці два послідовно з'єднані опори замінити одним також з нелінійною вольт-амперною характеристикою, яку отримують методом додавання характеристик першого й другого опорів.

Оскільки опори з'єднані послідовно і через них проходить той самий електричний струм, то для знаходження підсумкової вольт-амперної характеристики еквівалентного опору необхідно задатися послідовністю точок, які відповідають різним можливим значенням струму i_1, i_2, i_3, … та i_k, після чого окремо для

кожного з цих струмів знайти значення напруг на обох нелінійних елементах і скласти їх між собою, як того вимагає другий закон Кірхгофа.

У такий спосіб визначають абсциси точок характеристики еквівалентного опору для відповідних значень ординат (рис. 12.10).

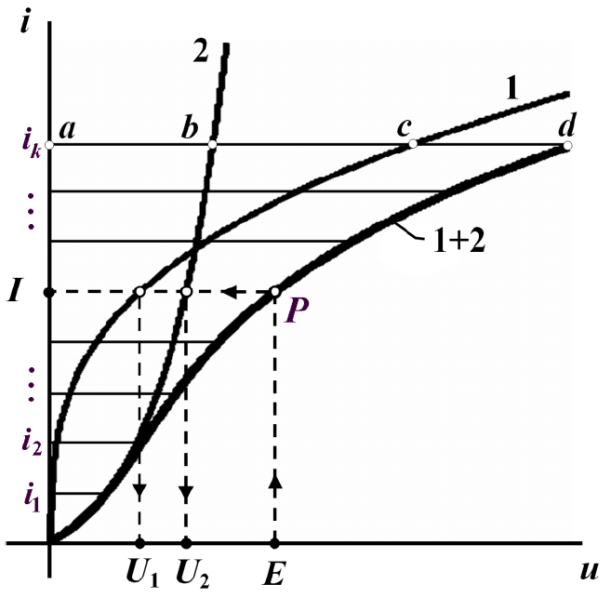


Рисунок 12.10. Приклад вольт-амперних характеристик резестивних елементів послідовного нелінійного кола

Наприклад, для струму i_k точку *d* отримано додаванням двох відрізків: *ab*, який відповідає напрузі на другому опорі, та *ac*, що в заданій системі координат є напругою на першому опорі.

Тоді шуканий електричний струм *I* знаходять безпосередньо за підсумковою вольт-амперною характеристикою (умовно її позначено 1+2 на рис. 12.4) еквівалентного опору за напруги U = E (точка *P*). Напруги U_1 і U_2 на кожному з двох опорів визначають абсцисами точок перетину їх власних вольт-амперних характеристик з горизонтальною прямою, що проходить через робочу точку *P* (див. рис. 12.10).

Вищенаведений метод є графічною інтерпретацією розв'язання нелінійного математичного рівняння, складеного за другим законом Кірхгофа:

$$u_1 + u_2 = E,$$

де $u_1 = f_1(i)$ та $u_2 = f_2(i)$ є вольт-амперними характеристиками нелінійних резистивних елементів.

Коли до складу електричного кола входить декілька послідовно з'єднаних опорів, серед яких можуть бути і лінійні, то точки загальної характеристики знаходять додаванням напруг на всіх елементах за однакових значень струму.

Якщо опори з'єднані паралельно (рис. 12.11), то загальна характеристика кола визначається шляхом додавання характеристик паралельно з'єднаних

опорів за довільно заданих однакових значень напруг u_1, u_2, u_3, … та u_k (рис. 12.12).

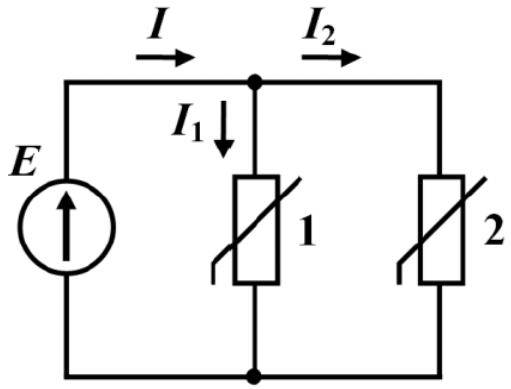


Рисунок 12.11. Паралельне нелінійне електричне коло

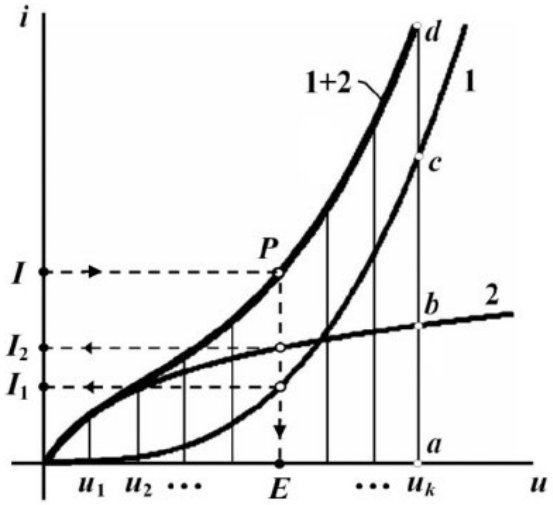


Рисунок 12.12. Приклад вольт-амперних характеристик резистивних елементів паралельного нелінійного кола

Це пояснюється дією двох чинників, першим з яких є перший закон Кірхгофа, внаслідок чого підсумковий (вхідний) струм має дорівнювати сумі струмів, що проходять паралельними вітками, а другим чинником є те, що до паралельних віток прикладена та сама електрична напруга.

Потім за заданим значенням, наприклад, вхідного струму I на загальній характеристиці кола знаходять прикладену до опорів напругу U = E, а струми через опори 1 та 2 визначають за відповідними характеристиками нелінійних опорів (рис. 12.12).

За змішаного з’єднання опорів (рис. 12.13) загальну характеристику електричного кола отримують шляхом його поступового спрощення і побудови для окремих ділянок за вищеописаними методиками допоміжних підсумкових вольт-амперних характеристик. Кінцевою метою таких еквівалентних перетворень є початкове коло (див. рис. 12.7) і загальна характеристика його еквівалентного нелінійного опору.

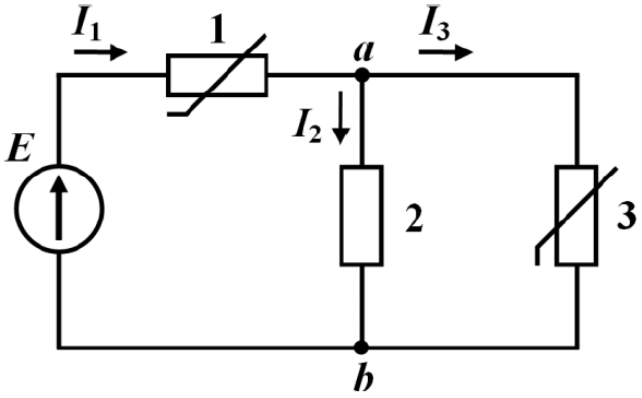


Рисунок 12.13. Нелінійне електричне коло з мішаним з’єднанням

Отже, наприклад, для кола, наведеного на рис. 12.3, спочатку необхідно визначити характеристику еквівалентного опору, яким заміщають ділянку кола між вузлами *a* і *b*. Оскільки опори 2 та 3 з’єднані паралельно, то ця характеристика знаходиться шляхом додавання ординат характеристик 2 і 3 за умови довільно заданих однакових абсцис u_1, u_2, u_3, … та u_k. На рис. 12.14 умовно криву отриманої у такий спосіб характеристики позначено як 2 + 3.

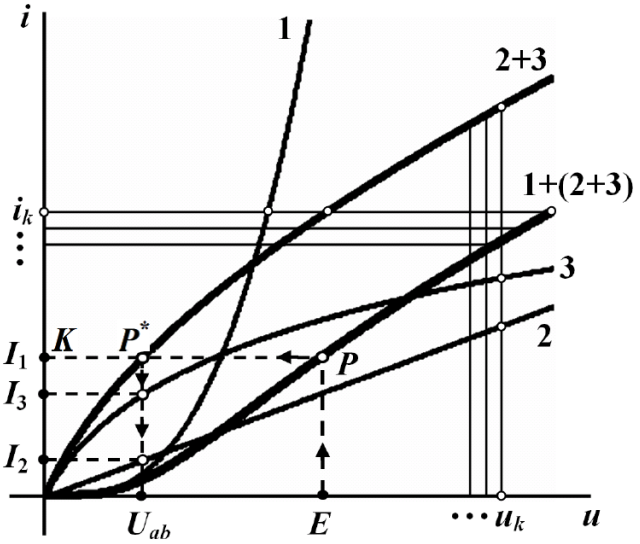


Рисунок 12.14. Приклад вольт-амперних характеристик резистивних елементів нелінійного кола з мішаним з’єднанням

Загальна ж характеристика всього кола знаходиться додаванням абсцис характеристик 1 і (2 + 3) за довільно заданих однакових значень ординат i_1, i_2, i_3, … та i_k, оскільки з’єднання є послідовним. Отриману характеристику наведено на рис. 12.14, її умовно позначено як криву 1 + (2 + 3).

Тоді, як видно з рисунка, безпосередньо на загальній характеристиці за заданої вхідної напруги U = E визначають вхідний струм I_1 та положення робочої точки *P* цієї характеристики. Перетин прямої *PK* з характеристикою 2 + 3 (точка P^*) дає напругу U_{ab}, за якої за допомогою характеристик 2 і 3 отримують, відповідно, електричні струми I_2 й I_3.

12.3.2 Метод еквівалентного генератора

Якщо в складному електричному колі є тільки один нелінійний елемент (рис. 12.15, а), то всю лінійну ділянку цього кола зручно подати еквівалентним генератором з е.р.с. $E_{екв}$ і внутрішнім опором $r_{екв}$ (рис. 12.15, б).

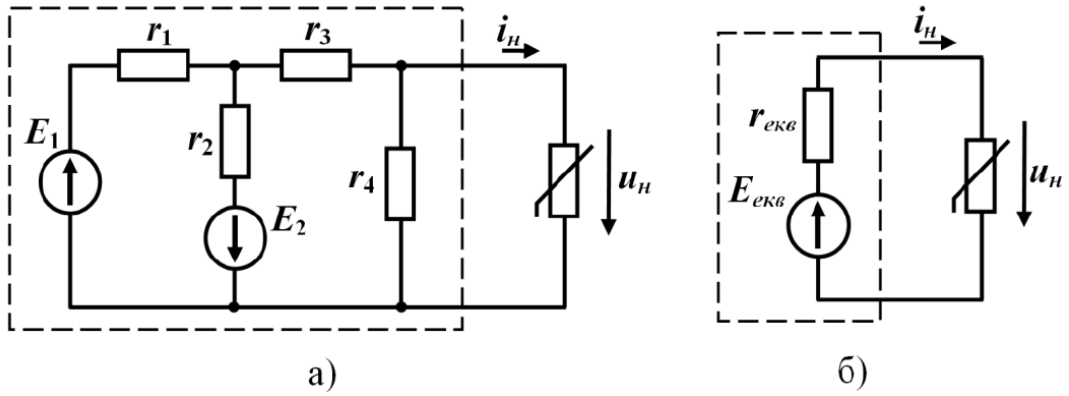


Рисунок 12.15. Складне електричне коло з одним нелінійним елементом (а) на його перетворення за методом еквівалентного генератора (б)

За такої еквівалентної заміни схема набуває простого вигляду і може бути легко розрахована у графічний спосіб.

Для знаходження струму $i_н$ в отриманому еквівалентному колі (рис. 12.15, б) використаємо дещо інший графічний метод, ніж той, який був наведений вище.

Для цього розв'яжемо у графічний спосіб нелінійну систему з двох рівнянь, перше з яких складене за другим законом Кірхгофа, а друге являє собою вольт-амперну характеристику нелінійного резистивного елемента (рис. 12.16).

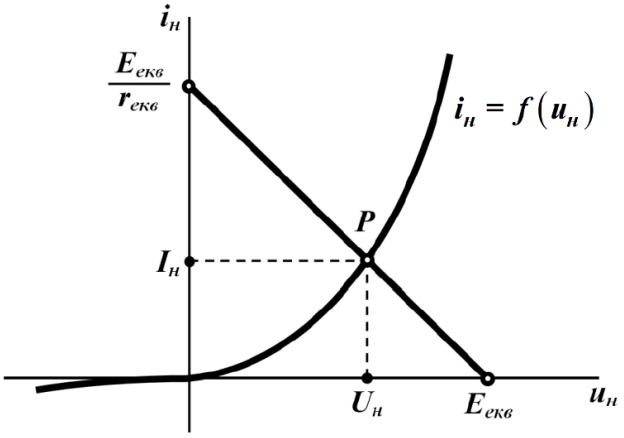


Рисунок 12.16. Приклад вольт-амперної характеристики нелінійного елемента:

$$\begin{cases} r_{екв} i_н + u_н = E_{екв}; \\ i_н = f(u_н). \end{cases} \qquad (12.16)$$

Перепишемо перше рівняння (12.16) відносно струму $i_н$:

$$i_н = \frac{E_{екв}}{r_{екв}} - \frac{u_н}{r_{екв}}, \qquad (12.17)$$

і побудуємо графік цієї функції в системі координат вольт-амперної характеристики нелінійного опору:

$$i_н = f(u_н).$$

Рівняння (12.17) є рівнянням прямої лінії, тому для її побудови в системі координат потрібно знати положення лише двох точок. Координати цих точок визначаємо з тих умов, що за струму $i_н = 0$ напруга $u_н = E_{екв}$, як це випливає з (12.17), а за напруги $u_н = 0$ струм $i_н = \frac{E_{екв}}{r_{екв}}$.

Точка перетину двох графіків (точка *P* на рис. 12.16), кожний з яких задано окремим рівнянням нелінійної системи (12.16), дає її графічний розв'язок. Тому координати $I_н$ і $U_н$ робочої точки *P* є шуканими значеннями струму $i_н$ та напруги $u_н$ на нелінійному опорі в заданому та еквівалентному електричних колах (рис. 12.15).

12.3.3 Метод двох вузлів

Метод двох вузлів застосовують для графічного розрахунку електричного кола, яке нараховує тільки два вузли, наприклад, як це показано на рис. 12.17. За такої умови кількість віток в електричному колі може бути необмеженою, як необмеженою може бути і кількість елементів (джерел електричної енергії, лінійних та нелінійних опорів тощо), що входять до його складу.

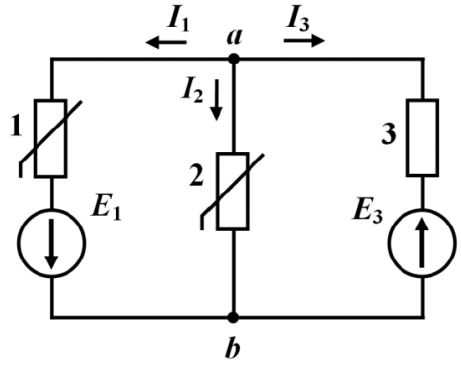


Рисунок 12.17. Приклад нелінійного електричного кола з двома вузлами

Нехай характеристики нелінійних опорів задано у вигляді графіків (рис 12.18), що показують функціональні залежності струмів від напруг на цих елементах $i_k = f_k(u_k)$.

Для розв'язання задачі методом двох вузлів потрібно задатися у вітках додатними напрямками струмів і побудувати в єдиній системі координат залежності цих струмів від спільної напруги, якою є напруга між вузлами *a* і *b*, тобто: $i_k = f_k(u_{ab})$.

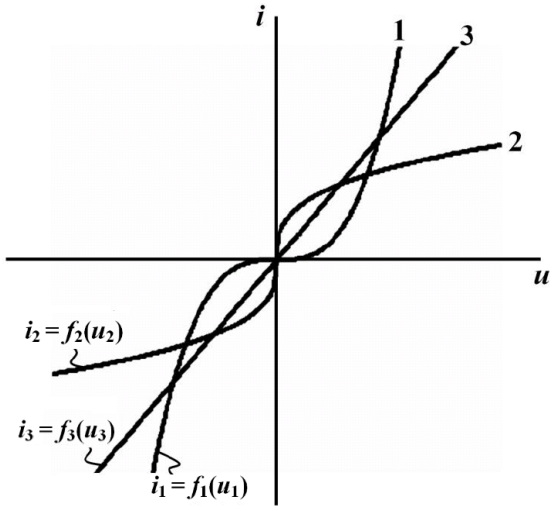


Рисунок 12.18. Приклад вольт-амперних характеристик нелінійних елементів

Так, за обраного напрямку струму I_1 для першої вітки маємо:

$$u_{ab} = u_1 - E_1. \tag{12.18}$$

Вираз (12.18) показує, що будь-якому значенню напруги u_1 на першому нелінійному опорі відповідає значення напруги u_{ab}, яке зменшене на E_1, тому кожна точка вольт-амперної характеристики опору під час переходу до напруги u_{ab} зміщується по осі абсцис вліво на величину E_1 (рис. 12.19).

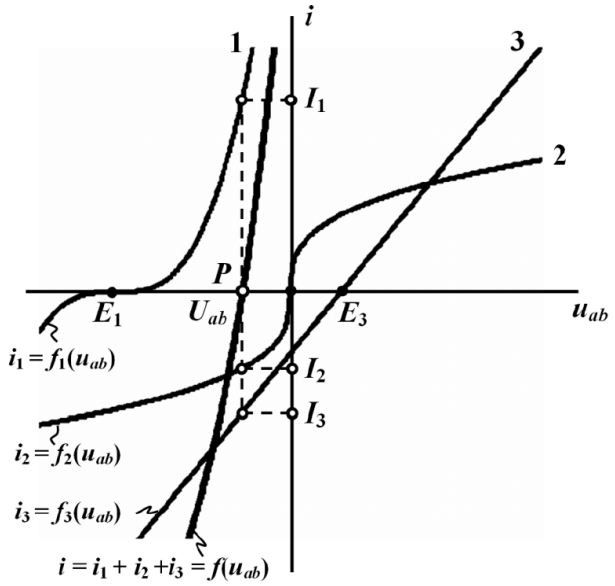


Рисунок 12.19. Коректовані вольт-амперні характеристики, з урахуванням ЕРС віток

Для третьої вітки:

$$u_{ab} = u_3 + E_3, \tag{12.19}$$

тому всі точки її характеристики $i_3 = f_3(u_3)$ будуть зміщені вправо на величину E_3 відносно графіка $i_3 = \mathrm{f}(u_3)$.

Графік вольт-амперної характеристики другої вітки $i_2 = f_2(u_2)$ збігається з графіком $i_2 = f(u_2)$, оскільки $u_{ab} = u_2$ (рис. 12.19).

Таким чином, для методу двох вузлів можна сформулювати загальне правило побудови характеристик віток за вольт-амперними характеристиками опорів.

Якщо дія е.р.с. E_k у вітці збігається за напрямом зі струмом цієї вітки, то характеристика самої вітки має бути зміщеною відносно вольт-амперної характеристики k-го опору на величину E_k в напрямку від'ємних значень. Коли ж дія е.р.с. E_k спрямована назустріч струму I_k, характеристика вітки зміщується в сторону додатних значень на ту ж величину E_k.

Для визначення струмів побудуємо в цій же системі координат ще одну криву – графік функції:

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = f(u_{ab}), \tag{12.20}$$

(рис. 12.19), який отримаємо у графічний спосіб шляхом складання значень ординат (струмів) перших трьох графіків за довільно заданих значень абсцис (напруг).

Оскільки для вузла a (рис. 12.17) має виконуватися перший закон Кірхгофа, то, вочевидь, що точка перетину кривої (12.20) з віссю абсцис (точка P на рис. 12.19) і буде графічним розв'язком нелінійного рівняння:

$$\mathrm{f}(\mathrm{u}_{\mathrm{ab}}) = \mathrm{i}_1 + \mathrm{i}_2 + \mathrm{i}_3 = 0.$$

Як видно з рис. 12.19, за розташуванням точки P безпосередньо можна визначити напругу U_{ab}, а вже за цією напругою, скориставшись вольт-амперними характеристиками самих віток – і електричні струми I_1, I_2, I_3.

Як бачимо, в нашому випадку напруга U_{ab} буде від'ємною. Сказане стосується і електричних струмів I_2 та I_3.

Однією з основних операцій наведеного методу двох вузлів була побудова підсумкових характеристик віток, до складу яких входять джерела ЕРС.

12.4 Графоаналітичний метод розрахунку нелінійних електричних кіл постійного струму

До графоаналітичних методів відносять комбіновані методи розрахунку нелінійних електричних кіл, в яких розв'язок задачі шукається переважно аналітично, але в поєднанні з відповідними графічними побудовами.

Розглянемо електричне коло з одним нелінійним резистивним елементом (рис. 12.20), характеристика якого зображена на рис. 12.21.

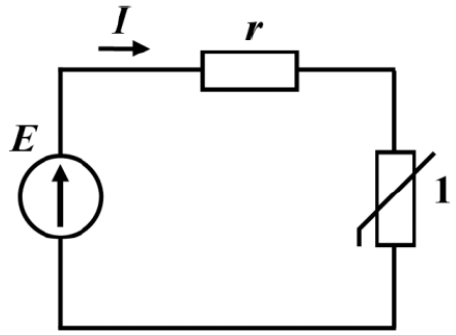


Рисунок 12.20. Приклад нелінійного електричного кола з одним нелінійним елементом

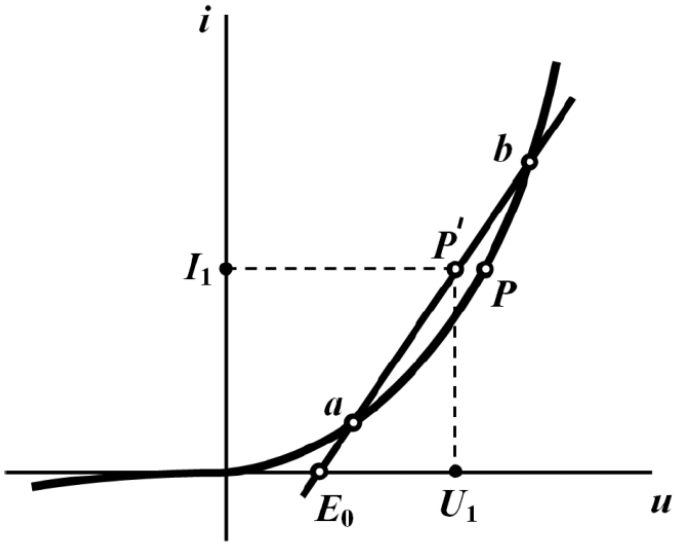


Рисунок 12.21. Приклад вольт-авперних характеристик елементів нелінійного кола

Припустимо, що робоча точка P знаходиться на ділянці ab вольт-амперної характеристики. Замінимо цю криволінійну ділянку прямою лінією, яка, як видно з рис. 12.21, проходить через точки a та b і перетинає вісь абсцис у деякій точці E_0.

Практично така заміна означає, що нелінійний опір заміщується віткою, до складу якої входять два елементи: лінійний опір r_0 і ЕРС E_0. Остання має бути направлена назустріч струму I, оскільки характеристика цієї вітки зміщена вправо відносно точки початку координат.

Таким чином, отримано лінійне електричне коло, схема якого наведена на рис. 12.22.

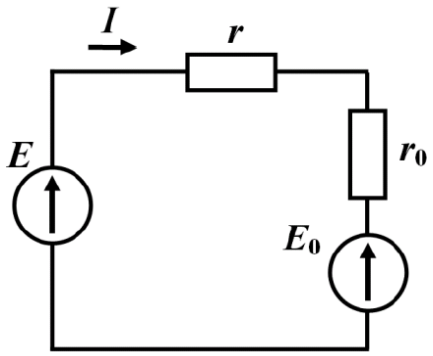


Рисунок 12.22. Схема заміщення нелінійного електричного кола

Величина е.р.с. E_0 визначається у графічний спосіб безпосередньо з рисунка вольт-амперної характеристики (рис. 12.22), а опір r_0 можна розрахувати за виразом:

$$r_0 = \frac{U_1 - E_0}{I_1}, \tag{12.21}$$

при цьому точка P' вибирається довільно.

Для такого лінеаризованого кола легко визначити струм за законом Ома:

$$I = \frac{E - E_0}{r + r_0}, \tag{12.22}$$

що є основною перевагою даного методу, який називають методом лінеаризації.

Після визначення струму I потрібно перевірити чи знаходиться знайдений струм в межах ділянки ab характеристики. Якщо так, то розрахунок закінчено, в іншому ж випадку необхідно вибрати нову ділянку лінеаризації кривої і повторити розрахунок.

До недоліків цього методу відносять деяку неточність результатів розрахунку. Це пояснюється заміщенням реальної нелінійної ділянки вольт-амперної характеристики прямолінійною наближеною, що призводить до зміщення робочої точки з P в P' (рис. 12.21).

Для розрахунку електричного кола з кількома нелінійними елементами підхід подібний: кожен із нелінійних елементів замінюється віткою, що має складатися з лінійного опору r_k та ЕРС E_k. Отриману лінійну схему заміщення аналізують аналітично відомими з теорії лінійних кіл методами, а всі знайдені значення струмів перевіряються на відповідність їх лінеаризованим ділянкам характеристик.

12.5 Аналітичний метод розрахунку нелінійних електричних кіл постійного струму

При використанні аналітичного методу вольт-амперні характеристики подають аналітично у вигляді функціональних залежностей.

Нехай, наприклад, характеристику нелінійного опору електричного кола, наведеного на рис. 12.21, задано співвідношенням:

$$i = a_1 u_{\text{н}} + a_2 u_н^2 + a_3 u_н^3. \tag{12.23}$$

Складемо рівняння за другим законом Кірхгофа:

$$ri + u_н = \text{E}. \tag{12.24}$$

З врахуванням (12.23) отримаємо:

$$a_1 r u_{\text{н}} + a_2 r u_н^2 + a_3 r u_н^3 + u_н = E. \tag{12.25}$$

Розв'язуючи це нелінійне алгебраїчне рівняння, знаходимо напругу $u_{\text{н}}$ на нелінійному опорі, а скориставшись формулою (12.23) – невідомий струм i.

Розв'язок задачі і в цьому випадку отримуємо наближено, оскільки нелінійне алгебраїчне рівняння майже завжди розв'язується числовими методами.

Одним із простих та ефективних числових методів наближеного розв'язування нелінійних алгебраїчних рівнянь є метод Ньютона - Рафсона.

Нехай маємо нелінійне алгебраїчне рівняння:

$$f(x) = 0. \tag{12.26}$$

Припустимо, що значення x_0 – нульове наближення розв'язку рівняння (12.26).

Позначимо наступний наближений розв'язок:

$$x_1 = x_0 + h, \tag{12.27}$$

де h – поправка до нульового наближення.

Підставимо (12.27) в (12.26) та розкладемо функцію у ряд Тейлора, обмежившись двома першими членами розкладу:

$$f(x_1) = f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) \approx 0. \tag{12.28}$$

Звідси:

$$h = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

де $f'(x_0)$ – значення похідної функції $f(x)$ при $x = x_0$.

Відповідно до (12.28):

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \qquad (12.29)$$

Продовжимо знаходити наступні наближення і для k+1-го наближення отримаємо:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \qquad (12.30)$$

Ітераційний процес припиняють тоді, коли із заздалегідь заданою точністю буде виконуватися умова:

$$x_{k+1} \approx x_k.$$

Контрольні запитання до розділу 12

1. Які елементи електричного кола називаються нелінійними?
2. Що називається керованим нелінійним елементом? Наведіть приклад.
3. Що таке статичний опір нелінійного резистивного елемента? Як він визначається?
4. Що таке динамічний опір нелінійного резистивного елемента? Як він визначається?
5. Чи може статичний опір лелінійного елемента набувати від'ємних значень? А динамічний?
6. Які Ви знаєте методи аналітичної апроксимації характеристик нелінійних елементів?
7. У чому полягає суть методу інтерполяції?
8. У чому полягає суть методу найменших квадратів?
9. У чому полягає суть методу кучково-лінійної апроксимації?
10. Як побудувати еквівалентну ВАХ для послідовного з'єднання?
11. Як побудувати еквівалентну ВАХ для паралельного з'єднання?
12. Чи можна у нелінійних колах виконувати еквівалентні аналітичні перетворення елементів кола, якщо при цьому нелінійні елементи не зачіпаються?
13. Чи можна до частини схеми, що замінюється еквівалентним генератором, вносити нелінійні елементи?
14. Для кола якої структури можна застосувати метод двох вузлів?

15. Чи можна застосовувати графічні методи розрахунку для кола, що містить нелінійний елемент з від'ємним динамічним опором?

16. Як вибираються межі діапазону лінійної апроксимації при застосуванні графоаналітичного методу?

17. Яким чином у графоаналітичному методі знаходиться значення лінійного опору, шо вводиться у коло замість нелінійного елемента?

18. Яким чином у графоаналітичному методі знаходиться значення е.р.с., що вводиться у коло замість нелінійного елемента?

19. Що необхідно зробити, якщо у графоаналітичному методі після завершення розрахунку виявилося, що значення струму нелінійного елемента знаходиться поза межами вибраного діапазону лінеаризації?

20. У чому полягає аналітичний метод розрахунку нелінійних електричних кіл?

21. Які Ви знаєте методи аналітичної апроксимації характеристик нелінійних елементів?

22. У яких випадках для розрахунку нелінійних електричних кіл аналітичним методом потрібно використовувати числові методи розрахунку лінійнх рівнянь?

23. Чому при використанні числових методів розрахунку лінійних рівнянь неможливо отримати точний розв'язок?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Яке з наведених співвідношень записано правильно?
   А) $u_r = \frac{i}{R}$; Б) $i_r = \frac{u}{R}$; В) $u_L = \frac{1}{L}\int i\,dt$; Г) $u_c = C\frac{di}{dt}$.

2. Яке з наведених співвідношень записано неправильно?
   А) $u_r = i\,r$; Б) $i_r = \frac{u}{R}$; В) $u_L = L\frac{di}{dt}$; Г) $u_c = C\frac{di}{dt}$.

3. Яке з наведених співвідношень записано правильно?
   А) $u_r = \frac{i}{r}$; Б) $i_L = u/r$; В) $u_L = \frac{1}{L}\int i\,dt$; Г) $u_c = \frac{1}{C}\int idt$

4. Що називається віткою електричного кола?
   А) сукупність елементів, в яких протікає однаковий струм;
   Б) частина кола, що підходить до вузла;
   В) послідовне з'єднання елементів;
   Г) сукупність послідовно з'єднаних елементів, в яких протікає один і той самий струм.

5. Контур електричного кола - це:
   А) будь-який замкнений шлях по вітках електричного кола;
   Б) сукупність елементів, що входять до складу кола;
   В) шлях по вітках кола від одного вузла до іншого;
   Г) сукупність вузлів електричного кола.

6. Електрична схема - це:
   А) сукупність елементів, що входять до складу кола;
   Б) сукупність опорів, що входять до складу кола;
   В) сукупність активних та реактивних опорів, що входять до складу кола;
   Г) умовне графічне зображення кола за допомогою ідеалізованих елементів.

7. Яке з наведених тверджень відповідає дійсності?
   А) сила струму характеризує швидкість руху електричних зарядів;
   Б) сила струму характеризує здатність електричних зарядів виконувати роботу;
   В) струм вимірюється у вольтах;
   Г) сила струму - це сукупність електричних зарядів;

8. Яке з наведених тверджень не відповідає дійсності?
   А) сила струму вимірюється в амперах (А);
   Б) активна потужність вимірюється у варах (вар);
   В) напруга вимірюється у вольтах (В);
   Г) активна потужність вимірюється у ватах (Вт).

9. Що називається періодичним струмом?
А) струм, що змінюється з часом;
Б) струм, що має однакові значення;
В) струм, який час від часу набуває нульового значення;
Г) струм, що повторює свої значення через певні проміжки часу.

10. Яке з співвідношень відповідає миттєвому значенню синусоїдного струму?
А) $i = I_m \sin x$; Б) $i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$:
В) $I = i \sin(\omega t + \varphi)$: Г) $I_m = I \sin(\omega t + \varphi)$:

11. Чому дорівнює повний опір кола?
А) $z = r + x$; Б) $z = r - x$;
В) $z = \sqrt{r^2 + x^2}$; Г) $z = x_l - x_c$.

12. Яке зі співвідношень не відповідає дійсності (φ – зсув фаз між напругою та струмом в елементах кола)?
А) $\varphi_r = 0$; Б) $\varphi_L = 0$;
В) $\varphi_C = -{}^{\pi}/_{2}$; Г) $\varphi_L = {}^{\pi}/_{2}$.

13. Яке зі співвідношень не відповідає дійсності?
А) $P = U\, I \cos\varphi$; Б) $S = U\, I$;
В) $P = U\, I \sin\varphi$; Г) $Q = U\, I \sin\varphi$.

14. Перший закон Кірхгофа записується:
А) для контурів схеми; Б) для активних опорів;
В) для віток; Г) для вузлів.

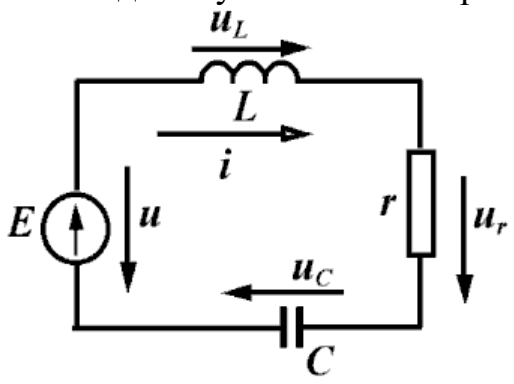
15. Другий закон Кірхгофа записується:
А) для незалежних контурів схеми; Б) для активних опорів;
В) для віток; Г) для вузлів.

16. Чому дорівнює опір індуктивності?
А) $x_L = 2\pi L$; Б) $x_L = 2\pi\omega L$;
В) $x_L = \omega L$; Г) $x_L = \omega f L$.

17. Чому дорівнює опір ємності?
А) $x_C = 2\pi C$; Б) $x_L = 2\pi\omega C$;
В) $x_C = \frac{1}{\omega C}$; Г) $x_C = \omega f C$.

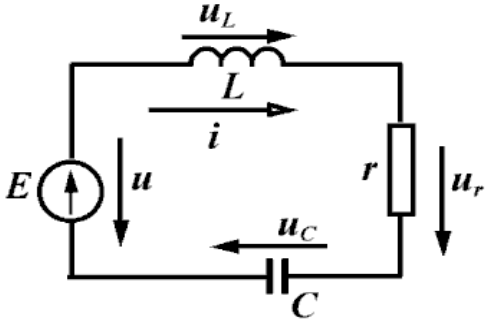
18. Чому дорівнює реактивна потужність в індуктивності?
А) $Q = I^2 x_L$; Б) $Q = 0$;
В) $P = I^2 x_L$; Г) $Q = I^2 L$.

19. За якої умови в наведеному колі виникне резонанс струмів?



А) $x_L = x_C$;
Б) $Re(\underline{Z}) = 0$;
В) $z = \sqrt{r^2 + (x_L - x_C{}^2)}$ =0;
Г) не може виникнути.

20. За якої умови в наведеному колі виникне резонанс напруг?



А) $x_L = x_C$;
Б) $Re(\underline{Z}) = 0$;

В) $z = \sqrt{r^2 + (x_L - x_C)^2}$ =0;

Г) не може виникнути.

21. Що називається трифазним електричним колом?
А) електричне коло, в якому діє три ЕРС;
Б) електричне коло, яке складається з трьох або чотирьох проводів;
В) сукупність трьох електричних кіл, що називаються фазами, в яких діє трифазний генератор;
Г) сукупність трьох проводів.

22. Що називається симетричним трифазним генератором?
А) сукупність трьох ЕРС;
Б) сукупність трьох ЕРС однакової частоти, однакової амплітуди, що мають зсув по фазі на 120^0;
В) сукупність трьох опорів, що з'єднані «зіркою»;
Г) сукупність трьох ємностей, що з'єднані «трикутником».

23. Що називається симетричним трифазним колом?
А) сукупність трьох проводів;
Б) трифазне коло, яке має однакові за модулем опори фаз;
В) сукупність чотирьох проводів;
Г) трифазне коло, в якому діє симетричний трифазний генератор і в якому опори всіх фаз однакові за модулем та аргументом.

24. Що називається лінійною напругою в трифазному колі?
А) напруга між лінійними проводами; Б) напруга між двома точками;
В) напруга на фазах навантаження; Г) сума фазних напруг.

25. Що називається фазною напругою в трифазному колі?
А) напруга між лінійними проводами; Б) напруга між двома точками;
В) напруга на фазах навантаження; Г) сума фазних напруг.

26. В симетричному трифазному колі напруга в фазі *A* дорівнює: $u_A = 100\sqrt{2}\sin\omega t$, струм в фазі *C* становить $i_C = 10\sqrt{2}\sin(\omega t + 60^0)$. Чому дорівнює активна потужність, що споживається трифазним колом?
А) 1500 Вт; Б) 1000 Вт; В) $1000\sqrt{3}$ Вт; Г) 1000 вар.

27. В симетричному трифазному колі напруга в фазі *B* дорівнює: $u_в = 100\sqrt{2}\sin\omega t$, а струм в фазі *C* становить $i_C = 10\sqrt{2}\sin(\omega t - 120^0)$. Чому дорівнює активна потужність, що споживається трифазним колом?
А) 1000 Вт; Б) 3000 Вт; В) $1000\sqrt{3}$ Вт; Г) 1000 вар.

28. В симетричному трифазному колі напруга в фазі *B* дорівнює: $u_в = 100\sqrt{2}\sin\omega t$, а струм в фазі *C* становить $i_C = 10\sqrt{2}\sin(\omega t - 120^0)$. Чому дорівнює реактивна потужність, що споживається трифазним колом?
А) 1500 вар; Б) 0 вар; В) $1000\sqrt{3}$ вар; Г) 1000 вар.

29. В симетричному трифазному колі напруга в фазі *C* дорівнює: $u_C = 100\sqrt{2}\sin\omega t$, а струм в фазі *C* становить $i_C = 10\sqrt{2}\sin(\omega t - 30^0)$. Чому дорівнює реактивна потужність, що споживається трифазним колом?
А) 1500 Вт; Б) 0 Вт; В) $1000\sqrt{3}$ Вт; Г) 1000 Вт.

30. Коло складається з двох послідовних опорів : активного *r* та реактивного *x*. Чому дорівнює повна провідність кола?
А) $\underline{Y} = \frac{1}{r+jx}$; Б) $y = \frac{1}{r} + \frac{1}{x}$;
В) $y = \frac{1}{\sqrt{r^2+x^2}}$; Г) $y = \frac{1}{r} + \frac{1}{x}j$.

31. Коло складається з двох паралельних опорів : активного *r* та реактивного *x*. Чому дорівнює комплексна провідність кола?

А) $\underline{Y}=\frac{1}{r+jx}$; Б) $y=\frac{1}{r}+\frac{1}{x}$;

В) $y=\frac{1}{\sqrt{r^2+x^2}}$; Г) $y=\frac{1}{r}-\frac{1}{x}j$.

32. В симетричному трифазному генераторі фазна напруга дорівнює 220 В. Чому дорівнює лінійна напруга?

А) Uл = 220 В; Б) Uл =$220\sqrt{2}$ В;

В) Uл =$220\sqrt{3}$ В; Г) Uл =$220/\sqrt{3}$ В.

33. Які співвідношення ***не відповідають*** симетричному трифазному колу, що з'єднане зіркою?

А) $Uл=\sqrt{3}*Uф$; Б) $Iл=Iф$;

В) $Iл=\sqrt{3}*Iф$; Г) $Uф=Uл/\sqrt{3}$.

34. Як зміняться фазні струми симетричного трифазного чотирьохпровідного кола, якщо нульовий провід розімкнути?

А) збільшаться в $\sqrt{3}$ рази; Б) зменшаться в $\sqrt{3}$ рази;

В) будуть дорівнювати нулю; Г) не зміняться.

35. Яка з формул не відповідає перетворенню «трикутника» в «зірку»?

А) $\underline{Z}_a=\frac{\underline{Z}_{ab}\underline{Z}_{ac}}{\underline{Z}_{ab}+\underline{Z}_{bc}+\underline{Z}_{ac}}$, Б) $\underline{Z}_{ab}=\frac{\underline{Z}_{ab}\underline{Z}_{ac}}{\underline{Z}_{ab}+\underline{Z}_{bc}+\underline{Z}_{ac}}$,

В) $\underline{Z}_b=\frac{\underline{Z}_{ab}\underline{Z}_{bc}}{\underline{Z}_{ab}+\underline{Z}_{bc}+\underline{Z}_{ac}}$, Г) $\underline{Z}_c=\frac{\underline{Z}_{ac}\underline{Z}_{bc}}{\underline{Z}_{ab}+\underline{Z}_{bc}+\underline{Z}_{ac}}$.

36.Яка з формул не відповідає перетворенню «зірки» в «трикутник»?

А) $\underline{Z}ab=\underline{Z}_a+\underline{Z}_b+\frac{\underline{Z}_a\underline{Z}_b}{\underline{Z}_c}$; Б) $\underline{Z}bc=\underline{Z}_b+\underline{Z}_c+\frac{\underline{Z}_b\underline{Z}_c}{\underline{Z}_c}$;

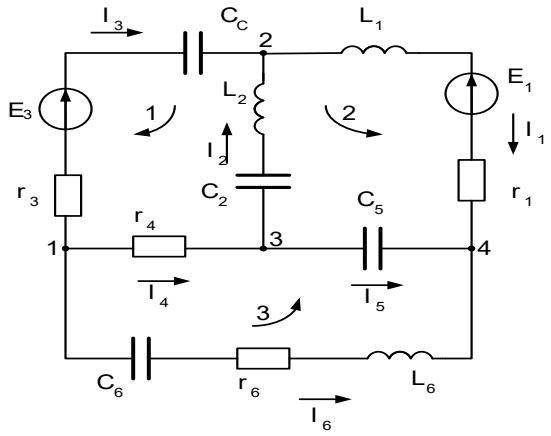
В) $\underline{Z}ca=\underline{Z}_a+\underline{Z}_b+\frac{\underline{Z}_a\underline{Z}_b}{\underline{Z}_b}$; Г) $\underline{Z}ca=\underline{Z}_c+\underline{Z}_a+\frac{\underline{Z}_a\underline{Z}_c}{\underline{Z}_b}$.

37. Кількість рівнянь, які мають бути складені за другим законом Кірхгофа для електричного кола, дорівнює:

А) кількості вузлів кола; Б) кількості віток кола;

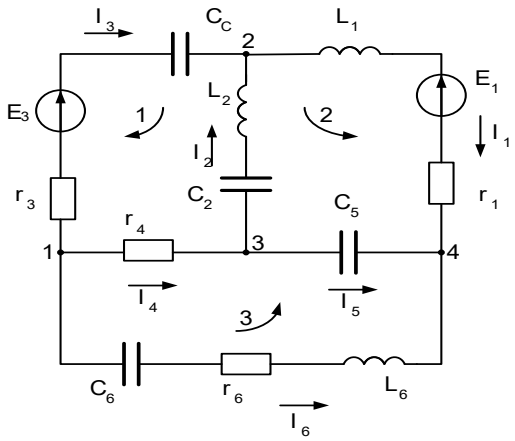
В) кількості незалежних контурів кола; Г) кількості контурів кола.

38. Яке з рівнянь за законами Кірхгофа записане неправильно?



А) $i_3+i_4+i_6=0$; Б) $i_3+i_2=i_1$; В) $i_4-i_2-i_5=0$; Г) $i_4+i_5-i_6=0$.

39. Яке з рівнянь за законами Кірхгофа записане правильно?



А) $i_3-i_2-i_4=0$; Б) $i_3+i_2-i_1=0$; В) $i_4-i_2+i_5=0$; Г) $i_4+i_5-i_6=0$.

40. Активна потужність вимірюється у:
А) ватах (Вт); Б) джоулях (Дж); В) омах (Ом); Г) амперах (А).

41. Реактивний опір індуктивності в колі синусоїдного струму дорівнює:
А) $x = 2\pi f$; Б) $x = 2\pi fL$; В) $x = 2\pi f/L$; Г) $x = 2\pi L$.

42. Реактивний опір ємності в колі синусоїдного струму дорівнює:
А) $x = 2\pi f$; Б) $x = 2\pi fC$; В) $x = 2\pi f/C$; Г) $x = \frac{1}{2\pi fC}$.

43. Напруга на індуктивності знаходиться як:
А) $U = I\,r$; Б) $U = I\,L$; В) $U = I\,x$; Г) $U = I/L$.

44. Напруга на ємності знаходиться як:
А) $U = I\,r$; Б) $U = I\,C$; В) $U = I\,x$; Г) $U = I/C$.

45. Кількість рівнянь, які мають бути складені за першим законом Кірхгофа для електричного кола, дорівнює:

А) кількості вузлів кола;

Б) кількості віток кола;

В) на одиницю менше, ніж кількість вузлів;

Г) кількості контурів кола.

46. Ватметр призначений для вимірювання:

А) струму; Б) напруги;

В) реактивної потужності; Г) активної потужності.

47. Еквівалентний опір при паралельному з'єднанні двох віток $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2$ визначається як:

А) $\underline{Z}_{екв} = \frac{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$; Б) $\underline{Z}_{екв} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2}$;

В) $\underline{Z}_{екв} = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}$; Г) $\underline{Z}_{екв} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$.

48. Залежність діючого значення напруги від діючого значення струму на резисторі визначається за:

А) першим законом Кірхгофа; Б) законом Ома;

В) першим законом Ньютона; Г) другим законом Кірхгофа.

49. В колі, що складається з послідовно з'єднаних опору, індуктивності та ємності, напруги на окремих елементах становлять: $U_R = 10\ B$, $U_L = 20\ B$, $U_C = 30\ B$. Чому дорівнює напруга на вході кола?

А) U =60 В, Б) U =20 В, В) U =10$\sqrt{2}$ В, Г) U =30 В.

50. В колі, що складається з послідовно з'єднаних опору R =10 Ом та індуктивності $X_L = 10$ Ом, напруга на вході кола становить $U = 100\sqrt{2}\ B$. Чому дорівнює активна потужність?

А) P = 1000Вт; Б) P = 100Вт; В) Q = 1000вар; Г) P = 1000$\sqrt{2}$Вт;

51. В колі, що складається з послідовно з'єднаних ємності *Xc* =20 Ом та індуктивності $X_L = 10$ Ом, напруга на вході кола становить $U = 100B$. Чому дорівнює активна потужність, що споживається?

А) P = 0 Вт; Б) P = 100 Вт; В) Q = 1000 вар; Г) P = 1000$\sqrt{2}$ Вт.

52. В колі, що складається з послідовно з'єднаних опору *R* =80 Ом та індуктивності $X_L = 60$ Ом, напруга на вході кола становить $U = 100B$. Чому дорівнює активна потужність, що споживається?

А) P = 100ВА; Б) P = 80Вт; В) Q = 140вар; Г) P = 1000$\sqrt{2}$вар.

53. У колі змінного струму з активним опором і ємністю вимірювальні прилади на вході показали P =40 Вт; U = 50 Вт; I = 1 А. Який з параметрів кола визначений неправильно?

А) R =40 Ом; Б) Z= 50 Ом; В) X= 1000 Ом; Г) X=30 Ом.

54. Чому дорівнює активний опір ділянки кола, якщо миттєві значення струму та напруги описуються наведеними виразами?

$i = 10 \sin(\omega t + 30^0)$ А, $u = 100 \sin(\omega t - 30^0)$ В.

А) R= 10 Вт; Б) R = 5 Ом; В) R= 0.1 См; Г) R= $5\sqrt{3}$ Дж

55. Чому дорівнює реактивний опір ділянки кола, якщо миттєві значення струму та напруги описуються наведеними виразами?

$i = 10 \sin(\omega t + 15^0)$ А, $u = 100 \sin(\omega t - 15^0)$ В.

А) X= -5 Ом; Б) X = 10 А; В) X= 0.1 Вт; Г) X= $5\sqrt{3}$ В.

56. Чому дорівнює активна потужність ділянки кола, якщо миттєві значення струму та напруги описуються наведеними виразами?

$i = 10 \sin(\omega t + 30^0)$ А, $u = 100 \sin(\omega t - 30^0)$ В.

А) P= 1000 Дж; Б) P = 500 В; В) P= 250 Вт; Г) S= 500 ВА.

57. Чому дорівнює реактивна потужність ділянки кола, якщо миттєві значення струму та напруги описуються наведеними виразами?

$i = 10\sqrt{2} \sin(\omega t - 30^0)$ А, $u = 100\sqrt{2}\sin(\omega t + 30^0)$ В.

А) Q= 1000 Вт; Б) P = 500 Вт; В) S= 250 ВА; Г) Q= $500\sqrt{3}$ Вар.

58. В колі, що складається з послідовно з'єднаних опору та ємності, напруги на окремих елементах становлять: $U_R = 40\ B$, $U_C = 30\ B$. Чому дорівнює напруга на вході кола?

А) U =70 В, Б) U =50 В, В) U =$\sqrt{40 + 30}$ В, Г) U =10 В.

59. Симетричний трифазний споживач з'єднаний «трикутником». Як зміняться фазні струми, якщо його переключити на з'єднання «зіркою»?

А) струми не зміняться; Б) збільшаться в три рази;

В) зменшаться в $\sqrt{3}$ рази; Г) зменшаться в три рази.

60. Симетричний трифазний споживач з'єднаний «зіркою». Як зміняться лінійні струми, якщо його переключити на з'єднання «трикутником»?

А) струми не зміняться; Б) збільшаться в три рази;

В) зменшаться в $\sqrt{3}$ рази; Г) зменшаться в три рази.

61. На ділянці кола миттєві значення струму та напруги:

$$i = 0.5\ sin(\omega t + 45^0); \qquad u = 10\ sin\omega t.$$

Яке з наведених співвідношень не відповідає дійсності?

А) Z= 20 Ом; Б) R= $10\sqrt{2}$ Ом; В) X= $10\sqrt{2}$ Ом; Г) X=-$10\sqrt{2}$ Вт.

62. На ділянці кола миттєві значення струму та напруги:

$$i = 5\ sin(\omega t + 60^0); \qquad u = 100\ sin\omega t.$$

Яке з наведених співвідношень не відповідає дійсності?

А) S= 250ВА; Б) P= 125 Вт; В) Q= 125 Вт; Г) R = 10 Ом.

63. В симетричному трифазному колі, що з'єднане «трикутником», опір фази $Z\phi = 38$ Ом при $cos\varphi = 0.5$. Лінійна напруга мережі $Uл$= 380 В. Чому дорівнює активна потужність, що споживається колом?

А) P= 1900 Дж; Б) P= 5700 Вт; В) P= 5700 В; Г) Q= 1900 вар.

64. В симетричному трифазному колі, що з'єднане «трикутником», опір фази $Z\phi = 22$ Ом при $cos\varphi = 0$. Лінійна напруга мережі $Uл$= 380 В. Чому дорівнює реактивна потужність, що споживається колом?

А) Q= 0 вар; Б) P= 3300 Вт; В) P= 5700 Вт; Г) Q= 1900 ВА.

65. В симетричному трифазному колі, що з'єднане «зіркою», опір фази $Z\phi = 22$ Ом при $cos\varphi = 0.5$. Лінійна напруга мережі $Uл$= 380 В. Чому дорівнює активна потужність, що споживається колом?

А) P= 1900 ВА; Б) P= 1100 вар; В) P= 5700 А; Г) P= 3300 Вт.

66. В симетричному трифазному колі активна потужність $P = 6,6$ кВт при $cos\varphi = 0.5$. Лінійна напруга мережі $Uл$= 380 В. Чому дорівнює струм, що споживається колом?

А) I= 20А; Б) I= 20$\sqrt{3}$В; В) I= 20/$\sqrt{3}$Вт; Г) I= 10 Ом.

67. Активна потужність в колі при напрузі на вході $U = 100$ *В* та струмі $I = 5$ *А* становить $P = 400$ *Вт*. Визначити реактивну потужність кола.

А) Q=10 вар; Б) Q=300 вар; В) Q=500 Вт; Г) Q=0 ВА.

68. Активна потужність, що виділяється в колі при напрузі на вході $U = 100$ *В* та струмі $I = 5$ *А,* становить $P = 400$ *Вт*. Визначити реактивний опір кола.

А) R=16 Ом; Б) X=16 А; В) Z=20 См; Г) X=12 Ом.

69. В колі, що складається з паралельно з'єднаних опору та індуктивності, струм на вході кола становить $I = 10$ *А.* Чому дорівнює струм індуктивності, якщо струм в опорі дорівнює $I_r = 8A$?

А) I= 10В; Б) I= 8 Ом; В) I= 6 А; Г) I= 2Вт.

70. В колі, що складається з паралельно з'єднаних опору та ємності, струм в паралельних вітках кола становить $I_r = 3\ A$, $I_c = 4\ A$. Чому дорівнює струм в нерозгалуженій частині кола?

А) I = 7А; Б) I = 5 А; В) I = 1 А; Г) I = 12А.

71. В колі, що складається з паралельно з'єднаних індуктивності та ємності, струм в паралельних вітках кола становить $I_L = 3\ A$, $I_C = 4\ A$. Чому дорівнює струм в нерозгалуженій частині кола?

А) I = 7ВА; Б) I = 5Вт; В) I = 1 А; Г) I = 12Ом.

72. В колі, що складається з паралельно з'єднаних опору, ємності та індуктивності, струм в кожній з паралельних віток становить $I = 1\ A$. Чому дорівнює в нерозгалуженій частині кола?

А) I = 1А; Б) I = 3 Ом; В) I = 0 А; Г) I = $\sqrt{2}$Вт.

73. В колі, що складається з трьох паралельно з'єднаних опорів, струм у кожній з паралельних віток становить $I = 3\ A$. Чому дорівнює струм в нерозгалуженій частині кола ?

А) I = 1А; Б) I = 9 Ом; В) I = 9 А; Г) I = $\sqrt{2}$А.

74. Реактивна потужність в колі, що складається з послідовно з'єднаних резистора та конденсатора, становить Q = 80 вар. Струм в колі I = 2 А при вхідній напрузі U= 50 В. Знайти активний опір кола.

А) R=25 См; Б) X=25 Ом; В) Z=20 Ом; Г) R=15 Ом.

75. Активна потужність та струм в колі, що складається з послідовно з'єднаних резистора та конденсатора, становлять P = 48 Вт при струмі I = 2 А та вхідній напрузі U= 40 В. Знайти реактивний опір кола.

А) R=20 Ом; Б) X=16 Ом; В) Z=20 Ом; Г) X=12Вт.

76. Симетричний трифазний споживач з'єднаний «трикутником». Як зміниться потужність, якщо його переключити на з'єднання «зіркою»?

А) потужність не зміниться; Б) збільшиться в три рази;

В) зменшиться в $\sqrt{3}$ рази; Г) зменшиться в три рази.

77. Симетричний трифазний споживач з'єднаний «зіркою». Як зміниться потужність, якщо його переключити на з'єднання «трикутником»?

А) потужність не зміниться; Б) збільшиться в три рази;

В) зменшиться в $\sqrt{3}$ рази; Г) зменшиться в три рази.

78. На ділянці кола миттєві значення струму та напруги:

$$u = 100\sqrt{2}\sin\omega t; \qquad i = \sqrt{2}\sin(\omega t - 60^0).$$

Чому дорівнює активна потужність, що споживається колом?

А) P= 100 ВА; Б) Q = 500 вар; В) P= 50 Вт; Г) S= 50 ВА.

79. В колі, що складається з послідовно з'єднаних опору R =10 Ом та індуктивності $X_L = 10$ Ом, напруга на вході кола становить $U = 100\sqrt{2}\ B$. Чому дорівнює активна потужність?

А) P = 1000Вт; Б) P = 100Вт; В) Q = 1000вар; Г) P = 1000$\sqrt{2}$Вт.

80. В колі, що складається з послідовно з'єднаних опору, індуктивності та ємності, напруги на окремих елементах становлять: $U_R = 10\ B$, $U_L = 20\ B$, $U_C = 30\ B$. Чому дорівнює напруга на вході кола?

А) U =60 В, Б) U =20 В, В) U =10$\sqrt{2}$ В, Г) U =30 В.

81. Власний опір контуру в методі контурних струмів - це:

А) сума опорів всіх віток схеми;

Б) сума всіх опорів віток, що входять в цей контур;

В) сума провідностей віток, що входять в цей контур;

Г) сума активних опорів , що входять до схеми.

82. Взаємний опір контурів в методі контурних струмів - це:

А) сума опорів всіх віток схеми;

Б) сума всіх опорів віток, що входять в цей контур;

В) сума опорів віток, що є спільними для двох контурів;

Б) сума активних опорів , що входять до схеми.

83. Контурна ЕРС в методі контурних струмів - це:

А) сума ЕРС всіх віток схеми;

Б) сума всіх ЕРС, що входять в цей контур;

В) сума ЕРС віток, що є спільними для двох контурів;

Г) сума активних опорів на ЕРС , що входять до схеми.

84. Власна провідність в методі вузлових потенціалів - це:

А) сума провідностей віток, що входять в контур;

Б) сума активних провідностей, що входять до схеми;

В) сума провідностей віток, що під'єднані до вузла;

Г) сума провідностей віток, що з'єднують два вузли.

85. Взаємна провідність в методі вузлових потенціалів - це:
А) сума провідностей віток, що входять в контур;
Б) сума активних провідностей, що входять до схеми;
В) сума провідностей віток, що під'єднані до вузла;
Г) сума провідностей віток, що з'єднують два вузли.

86. Вузловий струм в методі вузлових потенціалів - це:
А) сума добутків ЕРС на провідностей віток плюс сума джерел струму, що приєднані до вузла;
Б) сума активних провідностей, що входять до схеми;
В) сума ЕРС, що під'єднані до вузла;
Г) сума джерел струму та ЕРС віток, що з'єднують два вузли.

87. Реактивний опір індуктивності в колі синусоїдного струму дорівнює:
А) $x = 2\pi f$; Б) $x = 2\pi f L$; В) $x = \frac{2\pi f}{L}$; Г) $x = 2\pi L$.

88. Реактивний опір ємності в колі синусоїдного струму дорівнює:
А) $x = 2\pi f$; Б) $x = 2\pi f C$; В) $x = 2\pi f / C$; Г) $x = \frac{1}{2\pi f C}$.

89. Напруга на індуктивності знаходиться як:
А) $U = I\, r$; Б) $U = I\, L$; В) $U = I\, x$; Г) $U = I/L$.

90. Напруга на ємності знаходиться як:
А) $U = I\, r$; Б) $U = I\, C$; В) $U = I\, x$; Г) $U = I/C$.

91. Вольтметр призначений для вимірювання:
А) струму; Б) напруги;
В) реактивної потужності; Г) активної потужності.

92. У вітці з ідеальним джерелом струму:
А) напруга на затискачах дорівнює ЕРС;
Б) опір вітки дорівнює нулю;
В) струм дорівнює нескінченності;
Г) струм в вітці дорівнює струму джерела.

93. У вітці з ідеальним джерелом струму:
А) напруга на затискачах дорівнює нулю;
Б) опір вітки дорівнює нескінченності;
В) струм дорівнює нескінченності;
Г) струм в вітці дорівнює нулю.

94. У вітці з ідеальним джерелом напруги:
А) напруга на затискачах дорівнює ЕРС;
Б) опір вітки дорівнює нескінченності;
В) струм дорівнює нескінченності;
Г) струм дорівнює нулю.

95. У вітці з ідеальним джерелом напруги:
А) напруга на затискачах дорівнює ЕРС;
Б) опір вітки дорівнює нулю;
В) струм дорівнює нескінченності;
Г) струм дорівнює нулю.

96. Яке зі співвідношень відповідає дійсності для резистора
А) $u = r\frac{di}{dt}$; Б) $i = r\frac{du}{dt}$; В) $i = \frac{u}{r}$; Г) $i = \frac{r}{u}$.

97.Яке зі співвідношень відповідає дійсності для індуктивності?
А) $u = L\frac{di}{dt}$; Б) $i = L\frac{du}{dt}$;
В) $i = \frac{u}{r}$; Г) $i = \frac{u}{L}$.

98. Яке зі співвідношень відповідає дійсності для ємності?
А) $u = C\frac{di}{dt}$; Б) $i = C\frac{du}{dt}$;
В) $i = \frac{u}{C}$; Г) $u = \frac{i}{C}$.

99. Яке з тверджень відповідає дійсності при резонансі напруг?
А) резонанс напруг виникає при послідовному з'єднані індуктивності та резистора.
Б) резонанс напруг виникає при послідовному з'єднані індуктивності та ємності.
В) резонанс напруг виникає при паралельному з'єднані індуктивності та ємності.
Г) резонанс напруг виникає при послідовному з'єднані резистора та ємності.

100. Яке зі співвідношень відповідає дійсності для резонансу струмів?
А) резонанс струмів виникає при паралельному з'єднані індуктивності та резистора.
Б) резонанс струмів виникає при послідовному з'єднані індуктивності та ємності.
В) резонанс напруг виникає при паралельному з'єднані індуктивності та ємності.
Г) резонанс напруг виникає при послідовному з'єднані котушки та конденсатора.

101. Яке з тверджень відповідає дійсності при резонансі напруг?
А) реактивний опір кола дорівнює нулю;
Б) реактивний опір кола дорівнює нескінченності;
В) активний опір кола дорівнює нулю;
Г) активний опір кола дорівнює нескінченності.

102. Яке з тверджень не відповідає дійсності при резонансі напруг?
А) добротність контура дорівнює відношенню напруги на реактивному опорі в момент резонансу до вхідної напруги;
Б) добротність контура дорівнює відношенню реактивних опорів в момент резонансу до активного опору кола;
В) добротність контура дорівнює відношенню характеристичного опору кола до активного опору кола;
Г) добротність контура дорівнює відношенню реактивних опорів в момент резонансу.

103. Яке з тверджень відповідає дійсності при резонансі струмів?
А) в момент резонансу опір кола досягає мінімального значення;
Б) в момент резонансу реактивний опір кола дорівнює нулю;
В) в момент резонансу реактивна провідність кола дорівнює нулю;
Г) в момент резонансу струм випереджає напругу.

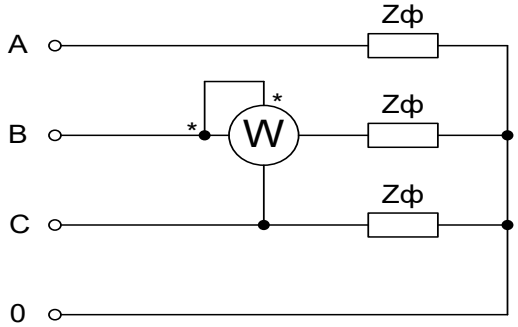
104. Яке з тверджень не відповідає дійсності при резонансі?
А) в момент резонансу струм та напруга збігаються по фазі;
Б) резонанс стуміів використовується для компенсації реактивної потужності;
В) умовою резонансу напруг є рівність нулю результуючого реактивного опору кола;
Г) умовою резонансу струмів є рівність нулю результуючого реактивного опору кола.

105. Кола із взаємною індукцією - це:
А) кола, що містять котушки та конденсатори;
Б) кола, що містять дві та більше котушки;
В) кола, в яких дві котушки знаходяться поруч;
Г) кола, що містять індуктивно зв'язані котушки.

106. Яке з тверджень не відповідає дійсності індуктивно зв'язаним котушкам?
А) котушки, магнітні потоки яких перетинають одна одну;
Б) індуктивно зв'язані котушки вважаються з'єднаними узгоджено, якщо власний магнітний потік співпадає за напрямком з потоком взаємної індукції;
В) при узгодженому з'єднанні напруга взаємної індукції додається до напруги самоіндукції;
Г) при зустрічному з'єднанні напруга взаємної індукції додається до напруги самоіндукції.

107. При послідовному з'єднанні індуктивно зв'язаних котушок:
А) струм більший, якщо котушки з'єднані узгоджено;
Б) струм менший, якщо котушки з'єднані узгоджено;
В) струм менший, якщо котушки з'єднані зустрічно;
Г) опір кола більший, якщо котушки з'єднані узгоджено.

108. Чому дорівнює показ ватметра в заданому трифазному колі?



А) $P = Re(\underline{U_b} * \bar{I}_b)$; Б) $P = Re(\underline{U_{bc}} * \bar{I}_b)$;
В) $P = Re(\underline{U_{bc}} * \bar{I}_c)$; Г) $P = U_b * I_b \cos \varphi_b$.

109. Чому дорівнюють лінійні струми в симетричному трифазному колі, що з'єднане трикутником, якщо $U_л$ = 380 в, а опір фаз $Z_\phi = 38 * e^{j*30^0}$ Ом?
А) 10 А; Б) 15 А; В) $10 * \sqrt{3}$ А; Г) $10/\sqrt{3}$.

110. Як змінюється з часом миттєва потужність симетричного трифазного кола?

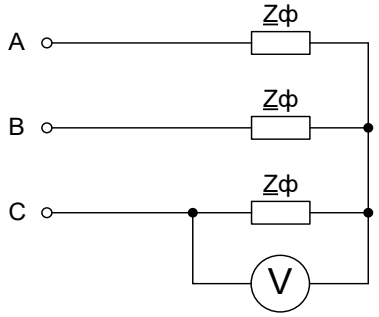
А) не змінюється;

Б) змінюється з частотою мережі;

В) змінюється з подвоєною частотою мережі;

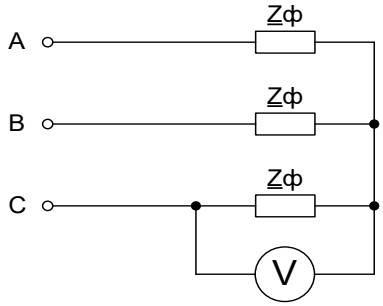
Г) змінюється з потроєною частотою мережі.

111. Чому дорівнює показ вольтметра при обриві фази «В», якщо фазна напруга генератора дорівнює 220 в?



А) 220 В; Б) 380 В; В) 190 В; Г) 330 В.

112. Чому дорівнює показ вольтметра при короткому замиканні фази «В», якщо фазна напруга генератора дорівнює 220 в?



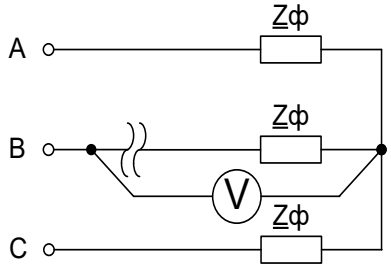
А) 220 В; Б) 380 В; В) 190 В; Г) 330 В.

113. Як знаходиться струм фази «А», що замкнена накоротко в три провідній трифазній мережі?

А) $\underline{I}a = (\underline{E}a - \underline{U}n)\ \underline{Y}a;$ Б) $\underline{I}a = \infty;$

В) $\underline{I}a = 0;$ Г) $\underline{I}a = -(\underline{I}b - \underline{I}c)$.

Чому дорівнює показ вольтметра при обриві фази «В», якщо лінійна напруга генератора дорівнює 380 в?



А) 220 В; Б) 380 В; В) $220\sqrt{3}/2$ В; Г) $380\sqrt{3}/2$ В.

114. Яке зі співвідношень для симетричних складових трьохпровідної трифазної системи записано неправильно?

А) $\underline{I}_2 = (\underline{I}_a + \underline{I}_b\, a + \underline{I}c\, a^2)/3$; Б) $\underline{I}_0 = 0$;

В) $\underline{I}_1 = (\underline{I}_a + \underline{I}_b\, a + \underline{I}c\, a^2)/3$; Г) $\underline{I}_2 = (\underline{I}_a + \underline{I}_b\, a^2 + \underline{I}c\, a)/3$.

115. Частота коливань становить 50 Гц. Чому дорівнює період коливань?

А) *T= 1 сек;* Б) *T= 0,01 сек;* В) *T=0,02 сек;* Г) *T= 2мсек.*

116. Період коливань становить 1 мсек. Чому дорівнює частота коливань?

А) *f = 1 Гц;* Б) *f = 1 кГц;* В) *f = 10 Гц;* Г) *f = 100 Гц.*

118. Частота коливань становить 50 Гц. Початкова фаза коливань дорівнює 180. Скільки часу пройшло з початку коливання?

А) *t= 1 сек;* Б) *t= 0,01 сек;* В) *t=0,02 сек;* Г) *t= 2мсек.*

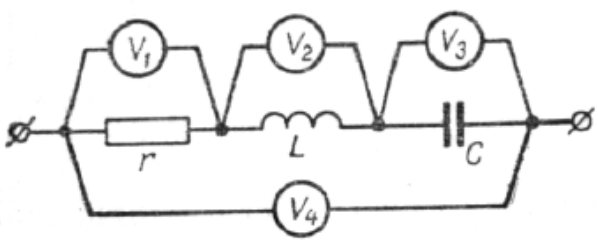
119. Чому дорівнює мінімальна кількість контурів, яку може мати коло?

А) два; Б) один; В) нуль; Г) три.

120. Чому дорівнює мінімальна кількість вузлів, яку може мати коло?

А) два; Б) один; В) нуль; Г) три.

121. У колі синусоїдального струму усі три вольтметри V_1, V_2 і V_3 мають однакові показання – 500 В. Що показує вольтметр V_4?



А) 1000 В; Б) 500 В; В) 1500 В; Г) 750 В.

122. Для симетричного чотириполюсника характеристичний опір дорівнює:

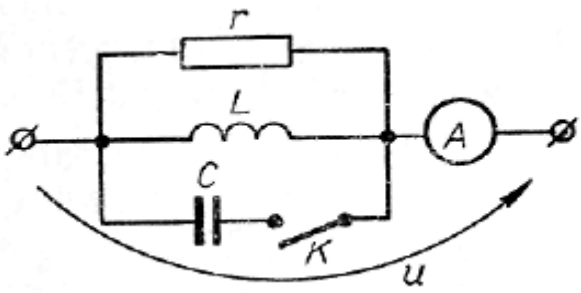
А) $\underline{Z}_c = \underline{Z}_{1к} + \underline{Z}_{1x}$; Б) $\underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}_{1к}\underline{Z}_{1x}}$;

В) $\underline{Z}_c = \dfrac{\underline{Z}_{1к}}{\underline{Z}_{1x}}$; Г) $\underline{Z}_c = \sqrt{\dfrac{\underline{Z}_{1x}}{\underline{Z}_{1к}}}$.

123. Яку мінімальну кількість реактивних елементів повинна мати послідовна ділянка кола, щоб у ній був можливий резонанс напруг?

А) два; Б) три; В) один; Г) жодного.

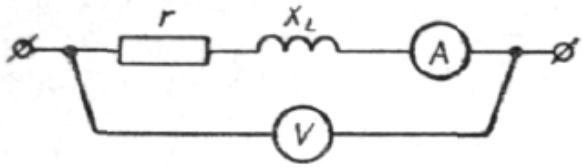
124. Як зміниться показання амперметра після розмикання вимикача К, якщо $\boldsymbol{r = x_C = x_L}$ *?*



А) зменшиться; Б) неможливо визначити;

В) не зміниться; Г) збільшиться.

125. Як зміниться показання амперметра в колі, якщо замість змінного струму через коло пропустити постійний струм, при незмінному показанні вольтметра? Відомо, що $r = x_L$ (на змінному струмі):



А) зменшиться; Б) неможливо визначити;

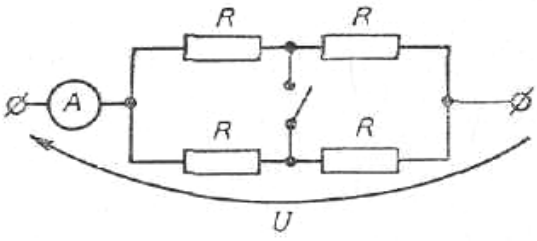
В) не зміниться; Г) збільшиться.

126. Внутрішній опір амперметра:

А) має бути дуже малим; Б) має дорівнювати 500 Ом;

В) має дорівнювати 20 Ом; Г) має бути дуже великим.

127. Як зміниться еквівалентний опір ділянки кола, якщо замкнути рубильник?



А) зменшиться в 2 рази; Б) збільшиться в 2 рази;
В) майже не зміниться; Г) не зміниться.

128. При вмиканні котушки в коло постійного струму амперметр показував струм $I_1 = 3$ А, а вольтметр напругу $U_1 = 30$ В. Після цього котушку ввімкнули в коло змінного струму з частотою f = 50 Гц. Амперметр показав $I_2 = 6$ А, а вольтметр $U_2 = 120$ В. Визначити активний опір котушки:

А) $R = 10$ Ω; Б) $R = 20$ Ω; В) $R = 12$ Ω; Г) $R = 16$ Ω.

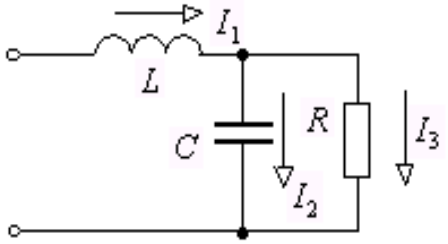
129. Котушка, що ввімкнена на напругу $u = 200\sqrt{2}\sin\omega t$, споживає активну потужність P = 100 Вт при струмі I = 2 А. Знайти повний опір котушки.

А) Z = 10 Ом; Б) Z = 50 Ом; В) Z = 200 Ом; Г) Z = 100 Ом.

130. Повний опір паралельного з'єднання двох резисторів:

А) більше більшого з них; Б) менше меншого з них;
В) дорівнює їх сумі; Г) дорівнює їх добутку.

131. У колі синусоїдального струму $I_2 = 3$ А, $I_3 = 4$ А. Визначити I_1.

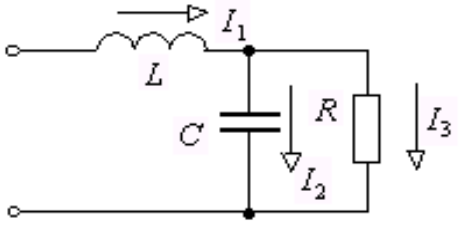


А) 7 А; Б) 4 А; В) 3 А; Г) 5 А.

132. У колі з послідовно з'єднаними активним опором R і індуктивністю L, струм $I = 2$ А, повна потужність $S = 100$ ВА, активний опір $R = 40$ Ом. Знайти вхідну напругу:

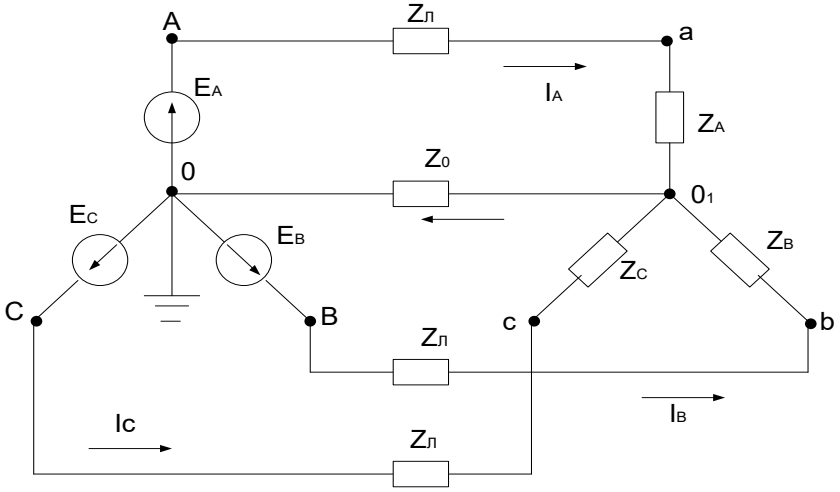
А) U = 50 В; Б) U = 150 В; В) U = 100 В; Г) U = 200 В.

133. У колі синусоїдального струму $I_1=10\ A,\ \ I_2=6A$.Знайти I_3:



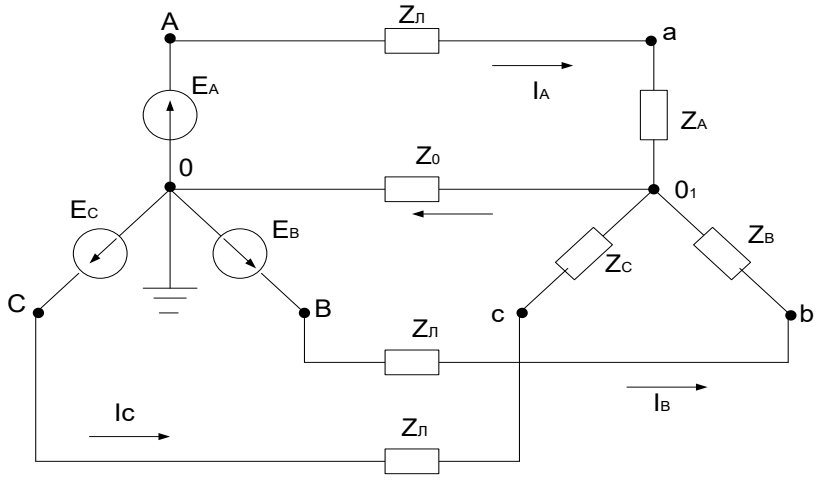
А) 4 А; Б) 16А; В) 8 А; Г 6 А.

134. Яка з напруг трифазного кола є фазною навантаження?



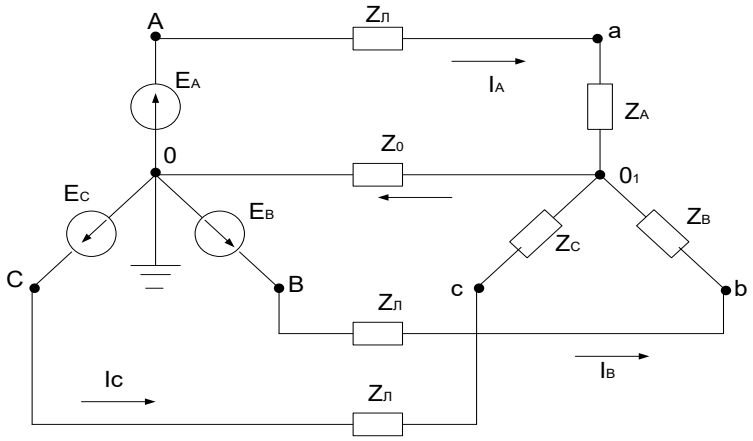
А) U_{Aa}; Б) U_{A0}; В) U_{A0^1}; Г) U_{AB}.

135. Яка з напруг трифазного кола є лінійною навантаження?



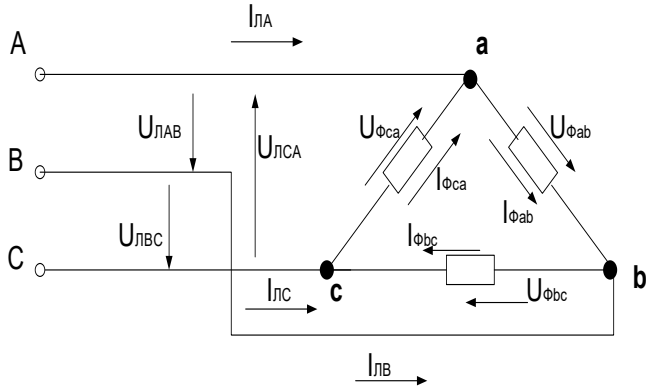
А) U_{Aa}; Б) U_{A0}; В) U_{A0^1}; Г) U_{AB}.

136. Яка з напруг трифазного кола є напругою зміщення нейтралі?



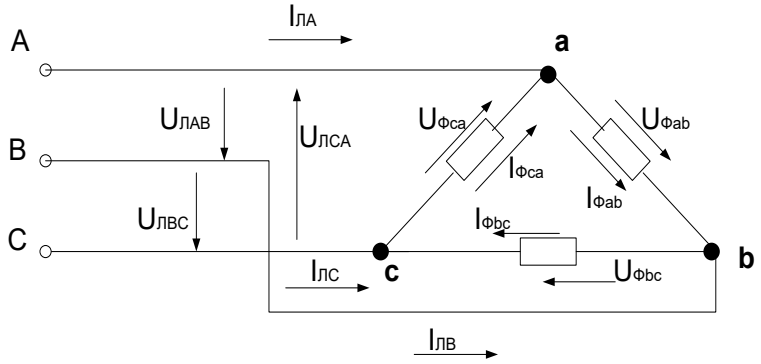
А) U_{Aa}; Б) U_{O^1O}; В) U_{AO^1}; Г) U_{AB}.

137. Яка з напруг трифазного кола є фазною навантаження?



А) U_{Aa}; Б) U_{Cc}; В) U_{AO^1}; Г) U_{AB}

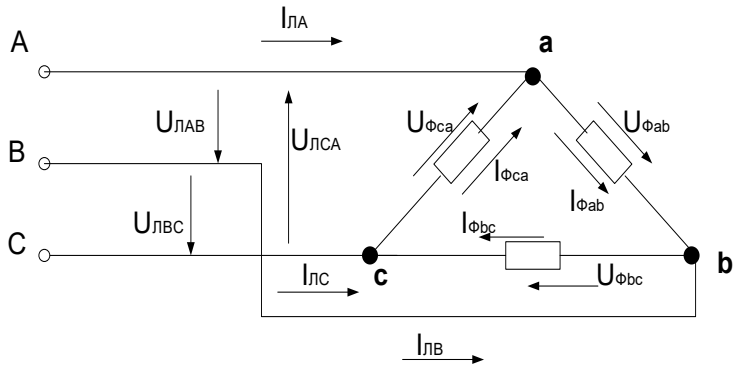
138. Яка з напруг трифазного кола є лінійною навантаження?



б

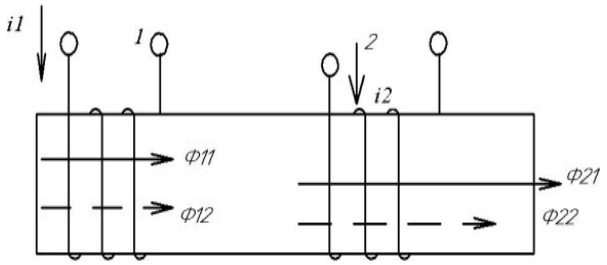
А) U_{Aa}; Б) U_{Cc}; В) U_{AO^1}; Г) U_{AB}.

139. Який із струмів не є лінійним?



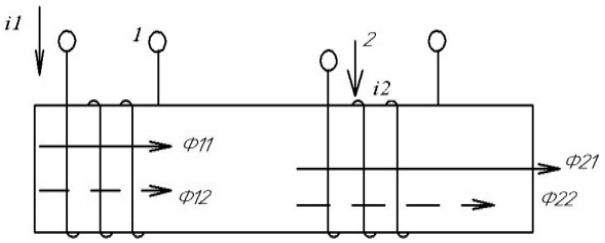
А) $I_{ЛА}$; Б) $I_{ЛВ}$; В) $I_{Фав}$; Г) $I_{ЛС}$.

140. Яке з тверджень для двох індуктивно зв’язаних котушок не відповідає дійсності?



А) котушки з’єднані узгоджено;
Б) якщо у обох котушок змінити напрямки струмів, то вони будуть з’єднані зустрічно;
В) якщо у обох котушок змінити напрямки струмів, то вони будуть з’єднані узгоджено;
Г) якщо у однієї з котушок змінити напрямки струмів, то вони будуть з’єднані зустрічно.

141. Який з виразів для двох індуктивно зв'язаних котушок не відповідає дійсності?



А) $u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$; Б) $u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$;

В) $\underline{U}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2$; Г) $\underline{U}_2 = j\omega L_2 \underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_1$.

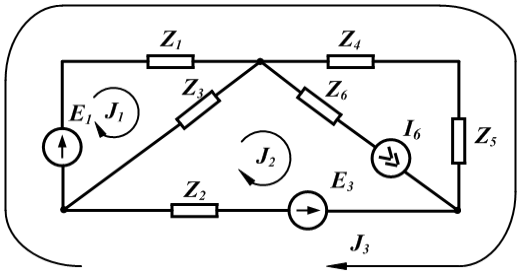
142. Який з виразів записаний неправильно?

А) $j = e^{j90^0}$; Б) $a = e^{j120^0}$; В) $a = e^{j90^0}$; Г) $a^2 = e^{-j120^0}$.

143. Який з виразів відповідає симетричному трифазному колу?

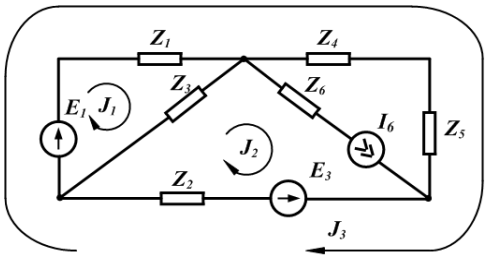
А) $E_b = E_a a$; Б) $E_b = E_a a^2$; В) $E_c = E_a a^2$; Г) $E_b = E_c a^2$.

144. Яке із тверджень для наведеної схеми не відповідає дійсності?



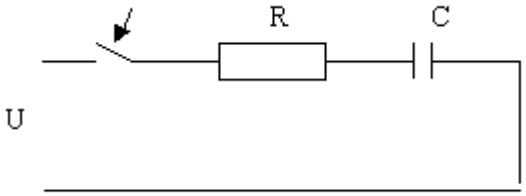
А) за першим законом Кірхгофа необхідно скласти два рівняння;
Б) за другим законом Кірхгофа необхідно скласти два рівняння;
В) за другим законом Кірхгофа необхідно скласти три рівняння;
Г) за законами Кірхгофа необхідно скласти чотири рівняння.

145. Яке із тверджень для наведеної схеми не відповідає дійсності?



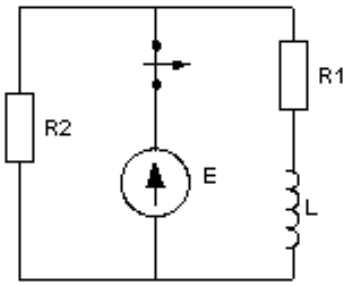
А) за законами Кірхгофа необхідно скласти чотири рівняння;
Б) за методом контурних струмів необхідно скласти два рівняння;
В) за методом контурних струмів необхідно скласти три рівняння;
Г) за методом вузлових потенціалів необхідно скласти два рівняння.

146. Визначити сталу часу перехідного процесу.



А) $\tau = R + C$; Б) $\tau = \frac{C}{R}$; В) $\tau = RC$; Г) $\tau = \frac{R}{C}$.

147. Визначити струм через індуктивність до комутації:

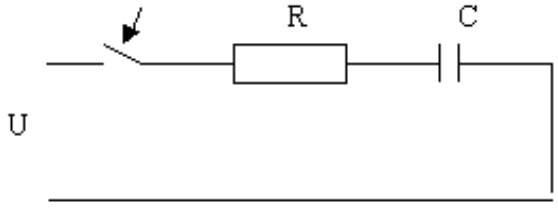


А) $i_L(0) = 0$; Б) $i_L(0) = \frac{E}{R2}$;

В) $i_L(0) = \frac{E}{R1 + R2}$; Г) $i_L(0) = \frac{E}{R1}$.

148. Інтеграл Дюамеля використовується при розрахунку:
А) усталених режимів в колах синусоїдного струму;
Б) усталених режимів в колах несинусоїдного струму;
В) перехідних процесів в колах з довільним вхідним сигналом;
Г) резонансних явищ в колах синусоїдного струму.

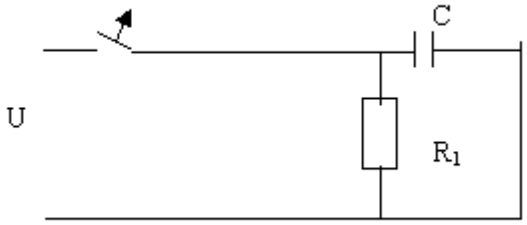
148. Визначити перехідну напругу на ємності:



А) $u_C = U - Ue^{\frac{1}{RC}\cdot t}$; Б) $u_C = U - Ue^{-\frac{1}{2RC}\cdot t}$;

В) $u_C = U + Ue^{-\frac{1}{RC}\cdot t}$; Г) $u_C = U - Ue^{-\frac{1}{RC}\cdot t}$.

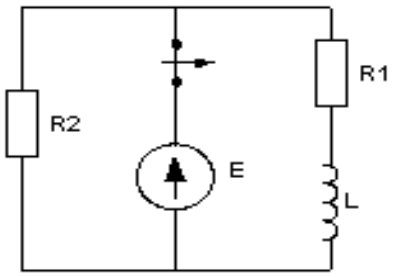
149. Визначити напругу на ємності до комутації:



А) $u_C(0_+) = u_C(0_-) = \frac{U}{2}$; Б) $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$;

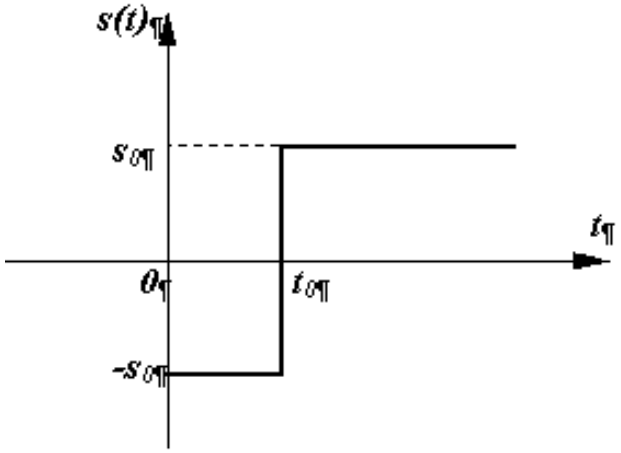
В) $u_C(0_+) = u_C(0_-) = U$; Г) $u_C(0_+) = u_C(0_-) = \frac{U}{3}$.

150. Визначити струм через індуктивність після комутації:



А) $i_L(0) = 0$; Б) $i_L(0) = \frac{E}{R2}$; В) $i_L(0) = \frac{E}{R1 + R2}$; Г) $i_L(0) = \frac{E}{R1}$.

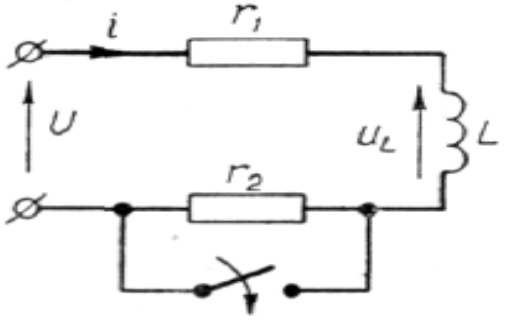
151. Представити сигнал $s(t)$ через функцію Хевісайда:



А) $s(t)=s_0\sigma(t-t_0)-s_0\sigma(t)$;
Б) $s(t)=s_0\sigma(t)-s_0\sigma(t-t_0)$;
В) $s(t)=s_0\sigma(t)+2s_0\sigma(t-t_0)$;
Г) $s(t)=-s_0\sigma(t)+2s_0\sigma(t-t_0)$.

152. Перехідна характеристика кола використовується при розрахунку:
А) напруженості електростатичного поля;
Б) усталених режимів в колах несинусоїдного струму;
В) перехідних процесів в колах з довільним вхідним сигналом;
Г) резонансних явищ в колах синусоїдного струму.

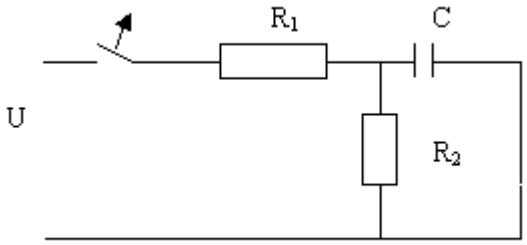
153. Визначити примусову складову струму через індуктивність, якщо U = 120 В; r_1=10 Ом; r_2 = 30 Ом; L = 0,1 Гн:



А) $i_{Lnp}=8\,\text{А}$; Б) $i_{Lnp}=10\,\text{А}$; В) $i_{Lnp}=12\,\text{А}$; Г) $i_{Lnp}=15\,\text{А}$.

154. Енергія, що запасається в індуктивності, визначається як:
А) $\frac{LI^2}{2}$; Б) $\frac{CU^2}{2}$; В) $\frac{CI^2}{2}$; Г) $\frac{LU^2}{2}$.

155. Скласти операторне рівняння за законами Кірхгофа:



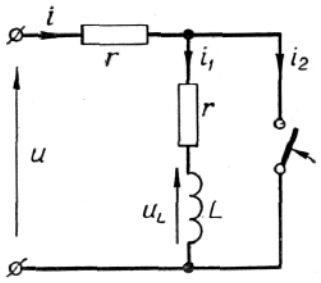
А) $\frac{u_C(0)}{s} = I(s)\left(R_1 + \frac{1}{sC}\right)$; Б) $\frac{u_C(0)}{s} = I(s)\left(R_2 + \frac{1}{sC}\right)$;

В) $0 = I(s)\left(R_2 + \frac{1}{sC}\right)$; Г) $U = I(s)\left(R_2 + \frac{1}{sC}\right)$.

156. При вмиканні котушки в коло постійного струму амперметр показував струм $I_1 = 3$ А, а вольтметр $U_1 = 30$ В. Після цього котушку ввімкнули в коло змінного струму. Амперметр показав $I_2 = 6$ А, а вольтметр $U_2 = 120$ В. Визначити повний опір котушки:

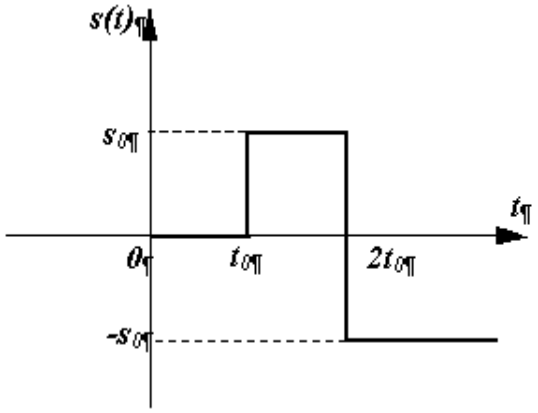
А) $Z = 10$ Ω; Б) $Z = 12$ Ω; В) $Z = 20$ Ω; Г) $Z = 25$ Ω.

157. Визначити струм через індуктивність до комутації:



А) $i_L(0) = \frac{U}{2r}$; Б) $i_L(0) = \frac{U}{r}$; В) $i_L(0) = \frac{2U}{3r}$; Г) $i_L(0) = 0$.

158. Представити сигнал $s(t)$ через функцію Хевісайда:



А) $s(t) = s_0\sigma(t - t_0) - s_0\sigma(t)$; Б) $s(t) = s_0\sigma(t - t_0) - 2s_0\sigma(t - 2t_0)$;

В) $s(t) = s_0\sigma(t) + 2s_0\sigma(t - t_0)$; Г) $s(t) = -s_0\sigma(t) + 2s_0\sigma(t - t_0)$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Теоретичні основи електротехніки. Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими та розподіленими параметрами: підручник / Карпов Ю. О., Кацив С. Ш., Кухарчук В. В., Ведміцький Ю. Г.: за ред. проф. Ю. О. Карпова. Вінниця: ВНТУ, 2011. 377 с.

2. Теоретичні основи електротехніки. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола: підручник / Карпов Ю. О., Ведміцький Ю. Г., Кухарчук В. В., Кацив С. Ш.: за ред. проф. Ю. О. Карпова. Вінниця: ВНТУ, 2011. 527 с.

3. Карпов Ю. О., Кацив С. Ш., Кухарчук В. В. Теоретичні основи електротехніки. Комп'ютерні розрахунки та моделювання лінійних електричних кіл : навчальний посібник. Вінниця: ВНТУ, 2013. 213 с.

4. Кацив С. Ш., Мад'яров В. Г., Говор І. К. Комп'ютерне моделювання електричних кіл: лабораторний практикум. Вінниця: ВНТУ, 2007. 89 с.

5. Основы теории цепей / Зевеке Г. В., Ионкин П. А., Нетушил А. В., Страхов С. В. Москва: Энергоатомиздат, 1989. 528 с.

6. Коровкин Н. В., Селина Е. Е., Чечурин В. Л. Теоретические основы электротехники: сборник задач. Санкт-Питербург: Питер, 2004. 512 с.

7. Костін М. О., Шейкіна О. Г. Теоретичні основи електротехніки: підручник. Дніпропетровськ: Вид. Дніпропетр. нац. ун-ту залізнич. транспорту, 2006. Т. 1. 336 с.

8. Костін М. О., Шейкіна О. Г. Теоретичні основи електротехніки: підручник. Дніпропетровськ: Вид. Дніпропетр. нац. ун-ту залізнич. транспорту, 2006. Т. 2. 276 с.

9. Кухарчук В. В., Кацив С. Ш., Граняк В. Ф., Байда Л. А., Голодюк В. С. Залежність коефіцієнту нелінійних спотворень вихідного струму системи «Інвертор – LCL-фільтр. *Вісник інженерної академії України*. 2019. №4. С.250-254

10. Матханов П. Н. Основы анализа электрических цепей. Нелинейные цепи. Москва: Высшая школа, 1977. 272 с.

11. Кузовкин В.А. Теоретическая электротехника: учебное пособие. Москва: Логос, 2005, 480 с.

12. Матвійчук В. А., Рубаненко О. Є., Стаднійчук І. П. Електротехнології в АПК: навчальний посібник. Вінниця: ТВОРИ, 2020, 272 с.

13. Нейман Л. Р., Демирчян К. С. Теоретические основы электротехники. Ленинград: Энергоатомиздат, 1981. Т. 1. 536 с.

14. Нейман Л. Р., Демирчян К. С. Теоретические основы электротехники. Ленинград: Энергоатомиздат, 1981. Т. 2. 416 с.

15. Kukharchuk V. V., Hraniak V. F., Katsyv S. Sh., Madyarov V. G. Analysis of dependency between current harmonics coefficient and load, as well as filter parameters for asymmetrical network modes. *PRZEGLAD ELECTROTECHNICZNY*. 2020. №9. P. 103-107 doi:10.15199/48. 2020.09.22

16. Перхач В. С. Теоретична електротехніка. Лінійні кола: підручник. Київ: Вища школа, 1992. 450 с.

17. Glover J. D., Sarma M. S., Overbye T. J. Power system analysis and design. Fifth edition. Edinburg: CENGAGE, 2017. 828 p.

18. Теоретичні основи електротехніки: підруч. у 3-х т. / Бойко В. С., та ін.; за заг. ред. І.М. Чиженка, В.С. Бойка. Київ: Політехніка, 2004. Т.1. 272 с.

19. Буртаев Ю. Б., Овсянников П. Н. Теоретические основы электротехники: учебное пособие. Москва: Либроком, 2019. 552 с.

20. Филиппов Е. Нелинейная электротехника: пер. с нем. Москва: Энергия, 1976. 496 с.

21. Beaty H. W., Fink D. G. Standard Handbook for Electrical Engineers, Sixteenth Edition. New York: McGraw-Hill Companies, 2017. 348 p.

22. Фриск В.В. Основы теории цепей: учебое пособие. Москва: Радиософт, 2002. 288 с.

23. Матвійчук В. А., Рубаненко О. О., Явдик В. В. Аналіз режимів роботи мікроелектромереж і методів керування ними. *Техніка, енергетика, транспорт АПК.* 2017. № 1 (96). С. 162-165.

24. Чабан В. Й. Теоретична електротехніка: навчальний посібник. Львів: Фенікс, 2002. 240 с

25. Маляр В. С. Теоретичні основи електротехніки: підручник. Львів: Львівськаполітехніка, 2018. 416 с.

26. Купчук І. М., Яропуд В. М., Телекало Н. В., Граняк В. Ф. Перспективи та передумови впровадження автономних систем електрозабезпечення агропромислових підприємств. *Техніка, енергетика, транспорт АПК.* 2020. №3. С.51-63

27. Scherz P., Monk S. ractical Electronics for Inventors. Third edition. New York: McGraw-Hill Companies, 2012. 1027 p.

28. Арбузов В. Н. Применение комплекса программ ELCUT для решения задач электростатики: Учебное пособие. Москва: МИЭЭ, 2008. 27с.

24. Курганов С. А., Филаретов В. В. Символьный анализ аналоговых и дискретно-аналоговых электрических цепей: Учебное пособие. Ульяновск: УлГТУ, 2008. 284 с.

29. Vedmitskyi Y. G., Kukharchuk V. V., Hraniak V. F. Newton binomial in the generalized Cauchy problem as exemplified by electrical systems. *Proc. SPIE 10808, Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High-Energy Physics Experiments*. 2018 7 p. doi: 10.1117/12.2501600

30. Граняк В. Ф., Кухарчук В. В. Компенсаційний метод та засіб вимірювання різниці фаз високочастотних електромагнітних сигналів. *Вісник Вінницького політехнічного інституту.* 2016. №1. С. 85-90

СЛОВНИК ІНШОМОВНИХ ТЕРМІНІВ

активний опір	active resistance
активна потужність	active power
амплітудне значення	peak value
амплітудно-частотний спектр	peak-frequency spectrum
амплітудно-частотна характеристика	peak-frequency characteristic
біжуча хвиля	running wave
векторна діаграма	vector diagramme
відбита хвиля	reflected wave
вільна складова	free component
вітка	branch
власний опір контура	own resistance of a contour
власна провідність вузла	own conductivity of knot
вольт-амперна характеристика	voltamperes characteristic
вузлові струми	knots currents
вузол	knot
гармоніка	harmonic
джерело напруги	voltage source
джерело струму	current source
діюче значення змінного струму	operating value of an alternating current
диференціальний опір	differential resistance
довга лінія	long line
довжина хвилі	length of a wave
другий закон Кірхгофа	second law of Kirhgof
електричне коло	electric circuit

електричний опір	electric resistance
ємність	capacity
ємнісний опір	capacitance
закони комутації	laws of switching
закон Ома	the Ohm law
залежні початкові умови	dependent entry conditions
зворотне перетворення Лапласа	return transformation of Laplace
зворотне перетворення Фур'є	return transformation of Fure
індуктивність	inductance
індуктивний опір	inductive resistance
інтеграл Дюамеля	integral of Djuamel
коефіцієнт амплітуди	amplitude factor
коефіцієнт згасання	attenuation factor
коефіцієнт нелінійних спотворень	factor of nonlinear distortions
коефіцієнт поширення	distribution factor
коефіцієнт спотворення	factor of distortion
коло із зосередженими параметрами	circuit with the concentrated parametres
коло із розподіленими параметрами	circuit with the distributed parametres
комутація	switching
контур	contour
контурна ЕРС	contours electromotive power
кут зсуву фаз	angle of shift of phases
кутова (циклічна) частота	cyclic frequency
лінійний елемент	linear element

лінійне коло	linear circuit
лінія без втрат	line lost-free
лінія без спотворень	line without distortions
магнітна індукція	magnetic induction
магнітне коло	magnetic circuit
магнітний потік	magnetic stream
метод вузлових потенціалів	method of knots potentials
метод вхідного опору	method of entrance resistance
метод контурних струмів	method of contours currents
миттєве значення струму	instant value of a current
напруженість магнітного поля	intensity of a magnetic field
незалежні початкові умови	independent entry conditions
нелінійний елемент	nonlinear element
нелінійне коло	nonlinear circuit
падаюча хвиля	falling wave
паралельне з'єднання опорів	parallel connection resistance
передатна характеристика	transfer characteristics
перехідний процес	transient
перехідна характеристика кола	transitive characteristic of circuit
період	period
періодичний змінний струм	periodic alternating current
перший закон Кірхгофа	first law of Kirhgof
петля гістерезису	hysteresis loop
повний комплексний опір	full complex resistance

повна комплексна потужність	full complex power
повна комплексна провідність	full complex conductivity
повний опір	full resistance
повна потужність	full power
послідовне з’єднання опорів	consecutive connection resistance
потужність спотворення	power of distortion
початкова фаза	initial phase
примусова складова	forced component
провідність	conductivity
пряме перетворення Фур’є	direct transformation of Fure
реактивний опір	reactive resistance
реактивна потужність	reactive power
резистор	resistor
резонанс напруг	resonance of voltage
резонанс струмів	resonance of current
синусоїдний струм	sinusoidal current
спектральна густина вхідного сигналу	spectral density of entrance signal
спільний опір контурів	joint resistance of contours
спільна провідність вузлів	joint conductivity of knots
стала передачі	transfer constant
стала часу перехідного процесу	constant of time of transient
статичний опір	static resistance
стояча хвиля	standing wave
телеграфні рівняння	cable equations

фаза коливань	phase of fluctuations
фазовий коефіцієнт	phase factor
фазова швидкість	phase speed
фазочастотний спектр	fazofrequency spectrum
фазочастотна характеристика	fazofrequency characteristic
функція Хевісайда	function of Hevisajd
характеристичний опір	characteristic resistance
характеристична провідність	characteristic conductivity
хвильова діаграма	wave diagramme
хвильовий опір	wave resistance
частота	frequency
чотириполюсник	two-port network

Навчальне видання

Віктор Андрійович Матвійчук
Валерій Федорович Граняк

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ.

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено авторами

Підписано до друку __.__.2023. Формат 30 × 42/4.

Папір офсетний. Різографія. Авт. арк. 5,55.

Обл.-вид. арк. 5,55. Тираж 30 прим. Зам._____.

Підготовлено до друку та видруковано у вищому
навчальному закладі
«Вінницький національний аграрний університет».

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842.

21000, м. Вінниця, вул. Сонячна, 3.